GEOMETRÍA PLANA CON PAPEL

GRUPO PI DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

GEOMETRÍA PLANA CON PAPEL

GRUPO PI DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Edita: Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

I.S.B.N.: 978-84-9333517-7-9

Depósito legal: GR 754-2009

EL GRUPO PI.

El Grupo PI está formado por un grupo de estudiantes de doctorado en Didáctica de la Matemática impartido por el departamento homónimo de la Universidad de Granada.

Nuestra procedencia e intereses son muy variados (seis nacionalidades, distintas profesiones, cuatro líneas personales de investigación…), pero nos une una profunda preocupación por el desarrollo de la Educación Matemática.

Actualmente estamos trabajando (no exclusivamente en ello) en el uso de materiales didácticos aplicados a la enseñanza de la Geometría.

MIEMBROS DE GRUPO PI QUE HAN REALIZADO ESTE DOCUMENTO[1]:

Mª CONSUELO CAÑADAS SANTIAGO
(UNIVERSIDAD DE GRANADA)
FRANCISCO DURÁN CEACERO
(I.E.S. CERRO DE LOS INFANTES, PINOS PUENTE, GRANADA)
SANDRA GALLARDO JIMÉNEZ
(I.E.S. VIRGEN DE LA CARIDAD, LOJA, GRANADA)
MANUEL J. MARTÍNEZ-SANTAOLALLA MARTÍNEZ
(UNIVERSIDAD DE ALMERÍA)
MARTA MOLINA GONZÁLEZ
(UNIVERSIDAD DE GRANADA)
MARÍA PEÑAS TROYANO
(I.E.S. LUIS BUENO CRESPO, ARMILLA, GRANADA)
JOSÉ LUIS VILLEGAS CASTELLANOS
(UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, MÉRIDA, VENEZUELA)

[1] Los nombres de los coautores de este documento están en orden alfabético.

Índice

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

Quienes nos dedicamos al interesante mundo de la enseñanza de las matemáticas tratamos con frecuencia de hacer el trabajo cotidiano menos complejo y más entretenido. En este sentido, la búsqueda de elementos que nos permitan afrontar el día a día con ciertas garantías de éxito hace que intentemos desarrollar nuevas estrategias de enseñanza y que exploremos nuevos recursos.

De estas inquietudes surge la necesidad de trabajar con materiales didácticos cercanos y versátiles. Son numerosos los que podemos encontrar en nuestro entorno o que resultan de fácil elaboración (Grupo PI, 2002) pero de todos ellos, uno de los que mayor satisfacción proporciona es el papel. Hemos comprobado que el doblado de papel (papiroflexia) puede convertirse en un recurso didáctico de primer orden, especialmente en el tan denostado campo de la Geometría.

La Geometría es, tal vez, la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad. Sin embargo, tenemos la percepción de que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sigue sin atribuírsele la importancia que le corresponde, fundamentalmente en sus aspectos sintéticos o visuales. Se arrincona al final de un temario, se trabaja casi exclusivamente la geometría analítica y se valoran únicamente sus facetas propedéuticas.

Uno de los motivos de esta falta de interés por la Geometría puede deberse a un conocimiento incompleto u olvidado de este campo por parte del profesorado, atrapado en las tentadoras redes de la aritmética y el álgebra. Ante la ausencia o el olvido de los conocimientos necesarios, nos sentimos inseguros manipulando elementos que no se ajustan a ecuaciones o números. Pero estamos convencidos de que la disponibilidad de materiales didácticos adecuados puede suponer un incentivo suficientemente atractivo como para rescatar de su confinamiento a la Geometría.

Entendemos por materiales didácticos adecuados aquellos que cumplan, al menos, las siguientes características:

- Se adapten a distintas capacidades y niveles de conocimientos previos de los alumnos.

- Permitan el tratamiento de contenidos variados.
- Sean accesibles en dos sentidos: próximos al entorno del alumno, esto es, disponibles en todo momento y baratos.
- Sean incentivos, esto es faciliten el aprendizaje y fomenten el interés.

Con el trabajo que aquí presentamos pretendemos acercar la Geometría a las aulas a través de un material que, como comprobaremos, cumple con estas características.

Esperamos que pueda vislumbrarse en este trabajo nuestro interés por los materiales didácticos adecuados como sustento ineludible de la enseñanza de las matemáticas, nuestra inclinación por la desatendida Geometría y el convencimiento de su importancia científica y social.

Esta declaración de principios sustenta la empresa que el Grupo PI tiene todavía por delante. En el XI CEAM “THALES” sólo presentamos el documento finalista en el Concurso “Física + Matemáticas en Acción 2003” pero este documento sólo es una parte de nuestro trabajo en el campo de los materiales, la resolución de problemas y la Geometría. Esta labor viene desarrollándose y haciéndose pública en distintos foros sobre la Didáctica de la Matemática a lo largo del último año (Grupo PI, 2002; 2003a; 2003b; 2003c).

Sin lugar a dudas son muchos los aspectos a mejorar. Pero creemos que en las páginas siguientes se puede encontrar un material valioso para el profesor y provechoso para el alumno en su acercamiento a un campo tan interesante como la Geometría.

¿QUÉ ES LA PAPIROFLEXIA?

La Papiroflexia es el arte de hacer figuras de papel. Todos los autores están de acuerdo en reconocer el nacimiento del arte del papel plegado en Japón, con el nombre de ORIGAMI (de Ori=plegar y Kami=papel). Según la corriente más ortodoxa de la papiroflexia, tan solo se está permitido plegar el papel, sin usar tijeras ni pegamento (Royo, 2003). Además se deberá utilizar como punto de partida un único trozo de papel cuadrado. No obstante, hay muchas otras modalidades, si se alivian un poco estas restricciones. Sirva como ejemplo la llamada “papiroflexia modular”, que permite, mediante el ensamblaje de pequeñas piezas o módulos de papel, la creación de numerosos cuerpos de distinta complejidad, desde poliedros de todo tipo a fractales tridimensionales.

No seremos tan ambiciosos en este trabajo dedicado a la Geometría plana, pero sí relajaremos las estrictas normas de la papiroflexia ortodoxa, lo que redundará en una mayor y más significativa gama de actividades.

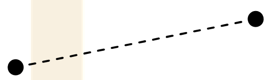
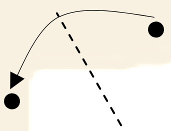
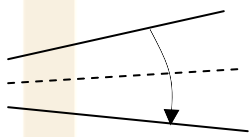
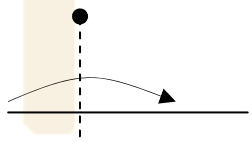
La historia de la papiroflexia (Engel, 1994) comienza junto con la del papel, en China, allá por el siglo I ó II, y llega a Japón en el siglo VI. A pesar de su origen centenario, ha sido recientemente cuando este arte japonés de la papiroflexia se ha convertido en tema de interés matemático. El patriarca de la papiroflexia moderna es el japonés Akira Yoshizawa, una leyenda viva de los maestros orientales de Origami. Es a Yoshizawa a quien debemos la simbología actual de las instrucciones de plegado de los modelos (Sistema Yoshizawa-Randlett, 1956).

El objetivo de muchos aficionados a la papiroflexia es diseñar nuevas figuras y, para muchos, el estudio de la relación entre las matemáticas y la papiroflexia se centra en una búsqueda de herramientas que lleven a diseños cada vez más complejos y sofisticados. Pero este no es nuestro empeño, sino la descripción de elementos y propiedades de la geometría mediante el uso del papel.

AXIOMAS DE LA PAPIROFLEXIA

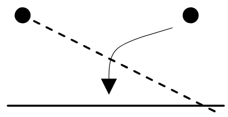
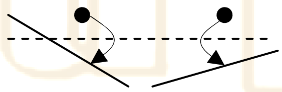
La papiroflexia ha sido considerada en ocasiones como “arte-ciencia” y los matemáticos han sido de los científicos que más profusamente la han estudiado. Existen varias propuestas de axiomas (o reglas del juego) para la papiroflexia. Para los propósitos del trabajo realizado, hemos escogido la propuesta del matemático japonés Humiaki Huzita, aunque hay otras posibles, como las de Beitia o Alperín[2].

Hemos completado la tabla siguiente, extraída de la propuesta de Humiaki Huzita, con una columna que incluye el objeto matemático construido por el doblez que postula cada axioma:

Axioma	Gráfico[3]	Objeto Matemático
Dados dos puntos p_1 y p_2, se puede realizar un pliegue que los conecte.		Recta que pasa por dos puntos
Dados dos puntos p_1 y p_2, se puede realizar un pliegue que los conecte.		Mediatriz del segmento P_1P_2
Dadas dos rectas l_1 y l_2, podemos plegar l_1 sobre l_2.		Bisectriz del ángulo formado por las rectas l_1 y l_2.
Dado un punto p y una recta l, podemos hacer un pliegue perpendicular a l que pase por p.		Recta perpendicular a otra que pasa por p. Segmento de longitud mínima que une un punto de l y p. Distancia de p a l.

2 http://www.uaq.mx/matematicas/origami/taller1.html

3 La línea discontinua corresponde al pliegue que se postula construible.

Dados dos puntos p_1 y p_2 y una recta l, podemos hacer un pliegue que haga corresponder a p_1, con un punto de l y que pase por p_2.		Repitiéndolo, se obtiene la envolvente de una parábola.
Dados dos puntos p_1 y p_2 y dos rectas l_1 y l_2, podemos hacer un pliegue que haga corresponder a p_1, con un punto de l_1 y p_2 con un punto de l_2.		Permite resolver ecuaciones cúbicas[4]

En cada uno de los axiomas está implicada una forma posible de plegado del papel, pero también un objeto matemático construible. Es aquí donde comienza la tarea del profesor y su habilidad para organizar la enseñanza de la geometría, con los ejemplos que estime convenientes. Por tanto, el profesor puede desarrollar, a partir de los axiomas anteriores, actividades que supongan la construcción de representaciones de objetos matemáticos, teniendo en cuenta, por supuesto, los intereses y conocimientos previos de los alumnos.

4 http://web.merrimack.edu/hullt/geoconst.html

LA PAPIROFLEXIA COMO RECURSO PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA.

Entendemos que un material didáctico es cualquier objeto o recurso que, eventualmente, contribuya al desarrollo de los objetivos didácticos propuestos en un determinado programa, aunque inicialmente el material no estuviera diseñado para este fin. Es decir, aquellos objetos que pueden ayudar a construir, entender o consolidar conceptos, ejercitar y reforzar procedimientos e incidir en las actitudes de los alumnos en las diversas fases del aprendizaje. Si además, permite el tratamiento de determinados contenidos presentes en el currículo, habremos avanzado en su adecuación al aula.

En este documento presentaremos una serie de fichas y orientaciones didácticas que transforman la actividad del doblado del papel en un recurso didáctico para la enseñanza de la Geometría que contribuye al desarrollo de las capacidades expresadas en gran parte de los objetivos del área de Matemáticas, según el currículo establecido.

Consideramos que el papel, como material didáctico manipulativo, proporciona una mayor implicación del alumno en las tareas a realizar ya que la manipulación "constituye un modo de dar sentido al conocimiento matemático" (Segovia y Rico, 2001, p. 86), y además, mediante ésta el estudiante "adquiere una percepción más dinámica de las ideas" (Mora, 1995, p.104).

Pero además, la bondad de la papiroflexia podrá juzgarse en función de su ajuste a las características que se estipulen como "deseables" en todo material curricular.

En este trabajo adoptaremos los criterios que Coriat (1997, p. 159) establece como convenientes para un material didáctico:

1. Disponibilidad en el momento que se decide usar.
2. Equipamiento suficiente para todos los alumnos.
3. Cierta práctica por parte del profesor y de los alumnos en el manejo antes de empezar a razonar matemáticamente con ellos.

4. Temporalización adecuada que permita extraer consecuencias a la mayoría de los alumnos en los momentos previstos.

El papel se ajusta, sin justificaciones adicionales, a estas características. Quizás sea necesario aclarar que entendemos por “cierta práctica” con la papiroflexia el hecho de que todo el mundo ha manipulado papel y lo ha doblado alguna vez en su vida, ya sea para introducir un papel doblado en tres partes en un sobre o para construir un simple avión o pajarita.

Además, el uso del papel permite la manipulación de los objetos geométricos, un acercamiento intuitivo a la geometría del plano y del espacio y los procesos de construcción implicados son lógicos, eficientes y económicos.

Podrá pensarse no sin razón que todo esto que decimos hay que demostrarlo. Si tras la lectura y puesta en práctica de este trabajo el lector no queda convencido de la bondad de la papiroflexia como recurso didáctico para la enseñanza de la Geometría, no podrá afirmarse otra cosa sino que no hemos sido capaces de transmitirla.

TAREAS

TAREAS

TAREA 1. CONSTRUIMOS PUNTOS Y TRAZAMOS RECTAS

OBTENCIÓN DE PUNTOS

Tópicos implicados: Puntos, rectas, e intersección de rectas.

Nivel Educativo: 1º ESO y 2º ESO

Formato Papel: Papel de cualquier tamaño y forma

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 1: CONSTRUCCIÓN DE PUNTOS

1. Construye un punto doblando papel.

2. Explica cómo lo has conseguido.

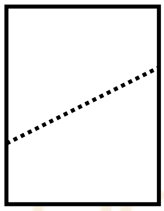
3. ¿Puedes hacerlo con cualquier tipo de dobleces (rectas)?

Instrucciones al profesor

Objetivos: Percibir que dos rectas que se cortan lo hacen en un punto.

Solución Ficha 1:

1. Hacemos un doblez en el papel.



2. Realizamos otro doblez que pase por algún lugar del primer doblez.

3. Desdoblamos y el punto de intersección de los dos dobleces es un punto.

Nota: Esta sencilla actividad permite determinar puntos como intersección de dos rectas mediante el doblado para sucesivas tareas.

POR DOS PUNTOS PASA UNA ÚNICA RECTA

Tópicos implicados: Puntos, Recta, Semirrecta y Segmento

Nivel Educativo: 1º ESO y 2º ESO

Formato Papel: Trozo de cualquier tamaño y forma

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 2: POR DOS PUNTOS PASA UNA ÚNICA RECTA

1. Construye la recta que pasa por los puntos dados A y B.

2. Señala el segmento AB.

3. Indica qué semirrectas puedes señalar en esta recta con esos dos puntos.

Instrucciones para el profesor

Objetivos: Manejar los siguientes elementos matemáticos: punto, recta, semirrecta y segmento. Por la relación biunívoca entre recta y doblez, se puede comprobar que sólo existe un doblez AB, que equivale a decir que existe una única recta que pase por los puntos A y B.

Solución Ficha 2:

1. Hacemos un doblez en el papel que pase por A y por B.
2. El segmento es parte del doblez que hemos conseguido, justo el que empieza en A y acaba en B.
3. Podemos indicar dos semirrectas. La primera, la parte de la recta que pasa por A y por B (sin incluir A) y la parte de esa misma recta que pasando por A y por B, no incluye a B.

Nota: Esta tarea se corresponde con el primer axioma de Humiaki Huzita.

TRAZAR LA PERPENDICULAR A UNA RECTA

Tópicos implicados: Rectas, Rectas perpendiculares y Ángulo recto

Nivel Educativo: 1º ESO y 2º ESO

Formato Papel: trozo de papel sin forma definida y cuyos bordes no sean rectas.

Propuesta para el alumno:

FICHA Nº 3: TRAZAR LA PERPENDICULAR A UNA RECTA

1. Construye dos rectas perpendiculares en un trozo de papel irregular.

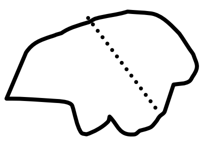
2. Señala un punto en el papel, que no pertenezca a la recta y traza una recta perpendicular a la primera recta que pase por ese punto.

Instrucciones para el profesor

Objetivos: Aprender a construir dos rectas perpendiculares. Manejar la caracterización de rectas perpendiculares. Percibir la invarianza de las rectas perpendiculares al eje de simetría.

Solución Ficha 3:

1. Cogemos el trozo de papel y trazamos un doblez como queramos. Ya tienes determinada una recta.



2. Hacemos coincidir un punto de ese doblez (x) con otro punto del mismo doblez (y) y vuelve a doblar el papel

3. Deshacemos los dos dobleces quedando marcadas dos rectas perpendiculares.

   La recta perpendicular que se pide se consigue de manera análoga al caso anterior, teniendo en cuenta que debe pasar por el punto que nos den indicado.

Pistas para ayudar a los alumnos:

Recordar que un ángulo llano es la suma de dos ángulos rectos.

CONSTRUCCIÓN DE RECTAS PARALELAS.

Tópicos implicados: Paralelismo.

Nivel educativo: 1º ESO y 2º ESO

Formato papel: Folio A4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 4. CONSTRUCCIÓN DE RECTAS PARALELAS.

1. Construye en el folio dos rectas paralelas y explica cómo lo has hecho.

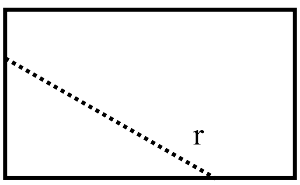
2. Señala un punto y a partir de una recta construye otra que sea paralela y pase por el punto marcado. Explica lo que has hecho.

Instrucciones para el profesor

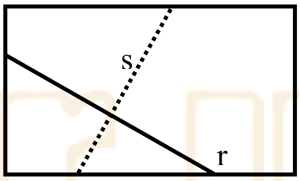
Objetivos: Manejar los conceptos de perpendicularidad y paralelismo. Razonar y utilizar que si dos rectas tienen una misma recta perpendicular dichas rectas son paralelas entre sí.

Solución Ficha 4:

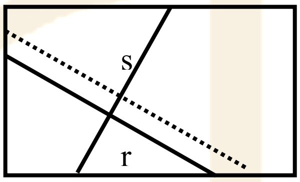
1. Doblamos el folio para obtener una recta r.



2. Construimos una recta perpendicular a r que denominamos s (ver la tarea de perpendicularidad, ficha nº 3).



3. Finalmente trazamos una recta perpendicular a s.



4. Dicha última recta es una recta paralela a r.

Para la segunda parte basta trazar la perpendicular a s de forma que pase por el punto.

Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Doblamos el folio por donde queramos de forma que obtengamos una recta r. Calculamos una recta paralela a r.
2. Trazamos una recta perpendicular a r. ¿Cómo podemos utilizarla para construir la recta paralela?
3. Llamamos s a la recta perpendicular que has trazado con la pista anterior. ¿Cómo son las rectas paralelas a r con respecto a s? Entonces, ¿cómo podemos calcular la recta paralela a r?
4. La recta paralela a r que buscamos y la recta s serán perpendiculares. Sabiendo esto, ¿cómo podemos calcular la recta paralela?

CONSTRUCCIÓN DEL SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE OTRO PUNTO.

Tópicos implicados: Rectas, segmentos, transportar distancias y simetría central.

Nivel educativo: 2º ESO

Formato papel: Folio A4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 5: SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A UN PUNTO

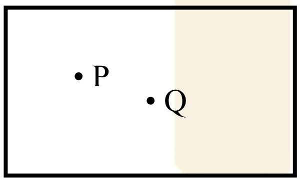
1. Calcula el simétrico de un punto respecto de otro punto. Explica cómo lo has realizado.

Instrucciones para el profesor

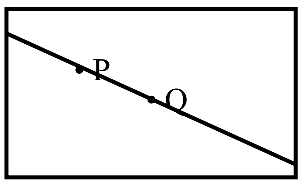
Objetivos: Manejar los conceptos de distancia de un punto a otro punto, transporte de distancias y simetría central.

Solución Ficha 5:

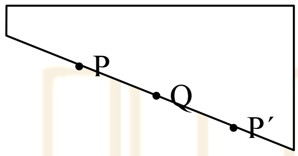
1. Marcamos dos puntos sobre un folio P y Q (ver ficha nº 1). Vamos a calcular el simétrico de P respecto de Q.



2. Doblamos el folio trazando una recta que una los puntos (ver ficha nº2).



3. Doblamos por dicha recta y, a continuación, se dobla por el punto Q observando que el punto P coincide con otro punto de la recta el cual marcamos. Dicho punto es el simétrico de P respecto de Q pues hemos trasportado la distancia de P a Q a lo largo de la recta que los une.



Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Señalamos dos puntos en el folio y llámalos P y Q. ¿cómo podemos calcular el simétrico de P respecto de Q?
2. Recordamos que el simétrico de P respecto de Q es un punto P´ que verifica que Q es el punto medio del segmento PP´.
3. P y P´ deben encontrarse a la misma distancia con respecto a Q. ¿Recordamos cómo se mide la distancia entre dos puntos? ¿Cómo podemos entonces obtener el punto simétrico?

CONSTRUCCIÓN DEL SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA RECTA.

Tópicos implicados: Rectas, segmentos, perpendicularidad, transportar distancias y simetría axial.

Nivel Educativo: 2º ESO

Formato papel: Folio A4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 6: SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A UNA RECTA

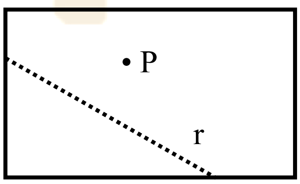
1. Calcula el simétrico de un punto respecto de una recta. Explica cómo lo has hecho.

Instrucciones para el profesor

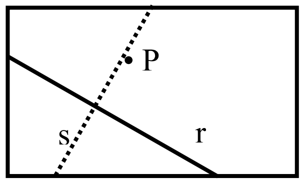
Objetivos: Manejar los conceptos de distancia de un punto a una recta, recta perpendicular a otra por un punto dado, transporte de distancias y simetría axial.

Solución Ficha 6:

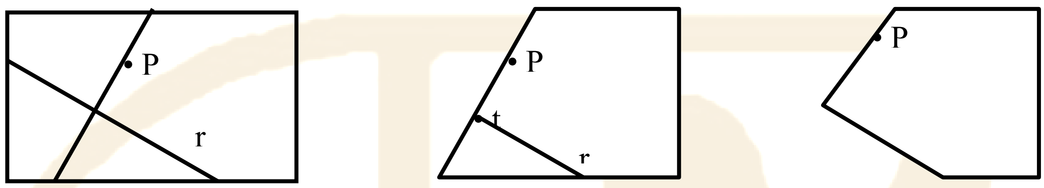
1. Doblamos el folio y obtenemos la recta r. Señalamos un punto P con la condición de no pertenecer a la recta r.



2. A continuación trazamos una recta perpendicular a r que pase por P (ver la ficha nº 3).



3. Doblamos por dicha recta perpendicular (s) y sin desdoblar volvemos a doblar por el punto t de la recta r para llevar el punto p a otro punto de la recta s.



4. Tras este último doblez el punto P coincide con otro punto de la recta el cual marcamos. Dicho punto es el simétrico de P respecto de r pues hemos transportado la distancia de P a r a lo largo de la recta perpendicular.

Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Doblamos el folio por donde queramos de forma que obtengamos una recta r. Dibujamos un punto P fuera de la recta trazada.
2. El simétrico de P respecto de la recta r es el punto Q que verifica que r es la mediatriz del segmento PQ.
3. P y Q deben encontrarse a la misma distancia con respecto a r. Eso puede serte útil para obtener Q. Recuerdas ¿cómo se mide la distancia de P a la recta r?
4. Si trazamos la recta perpendicular a r que pasa por Q, la distancia de P a la recta r es la longitud del segmento que une P con el punto donde intersecan r y dicha perpendicular. Traza esa recta perpendicular ¿cómo puedes obtener ahora el punto simétrico?

TAREA 2. MEDIATRIZ Y BISECTRIZ

MEDIATRIZ

Tópicos implicados: Segmento, perpendicularidad y mediatriz.

Nivel Educativo: 2º ESO y 3º ESO

Formato Papel: Folio A-4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 7: MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

1. Construye en un folio dos puntos

2. Encuentra la mediatriz del segmento que une a los dos puntos construidos en 1.

3. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

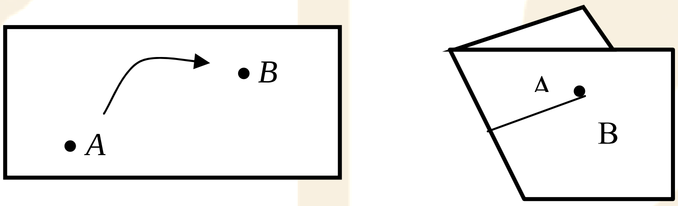
a. Simetría axial
b. Punto medio

c. Mediatriz de un segmento es la recta perpendicular trazada en su punto medio
d. Perpendicularidad.

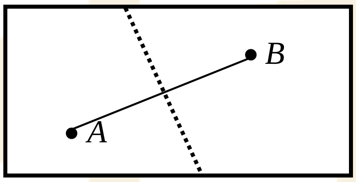
Solución Ficha 7:

1. Construimos dos puntos A y B en un folio.

2. Realizamos un doblez que sitúe a A sobre B.



3. El doblez generado es la mediatriz del segmento que une a A y B.



Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos la noción de perpendicularidad.
2. Recordamos la noción de punto medio.
3. Recordamos la definición de mediatriz.
4. Reflexiones y simetrías.

BISECTRIZ

Tópicos implicados: Ángulo, paralelismo, ángulos suplementarios y bisectriz.

Nivel Educativo: 2º ESO y 3º ESO

Formato Papel: Folio A-4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 8: LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

1. Construye en un folio un ángulo cualquiera.

2. Explica cómo lo has realizado.

3. Encuentra la bisectriz del ángulo construido en 1.

4. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

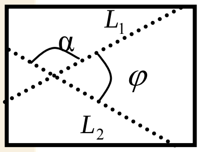
Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

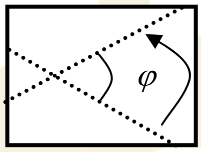
a. Ángulo: Región comprendida entre dos semirrectas
b. Bisectriz de un ángulo: recta que lo divide en dos partes iguales.
c. Propiedad: Las dos semirrectas que definen un ángulo son simétricas respecto a la bisectriz del mismo.

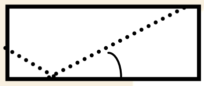
Solución Ficha 8:

1. Construimos dos rectas L_1 y L_2 no paralelas ni coincidentes (que se corten en el folio), obtendrás un ángulo φ (se forma también uno $(=180^\circ - \varphi)$.

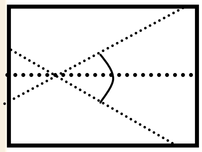


2. Realizamos un pliegue que sitúe a L2 sobre L1





3. El doblez realizado es la recta que divide al ángulo φ en dos ángulos iguales.



Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos la noción de paralelismo.
2. Recordamos la definición de ángulo.
3. Recordamos la definición de bisectriz.
4. Reflexiones y simetrías.

TAREA 3. ÁNGULOS

ÁNGULOS CON PAPEL

Tópicos implicados: Noción de ángulo, perpendicularidad, mediatriz y bisectriz.

Nivel Educativo: 1º ESO y 2º ESO

Formato Papel: Folio A4 y folio irregular.

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 9: ÁNGULOS DE 90º Y 45º.

---

1. Te damos un folio A4, ¿cuánto miden sus ángulos? ¿Por qué lo sabemos? ¿Cómo convencerías a otra persona que esos ángulos son de 90º?

2. Construye con un folio A4 un ángulo de 45º.

3. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido estos pasos.

4. Construye con una hoja de papel irregular los siguientes ángulos: 90º y 45º.

5. Explica cómo lo has realizado y qué has utilizado de la actividad 2 para realizarlo.

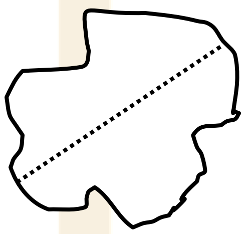
Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

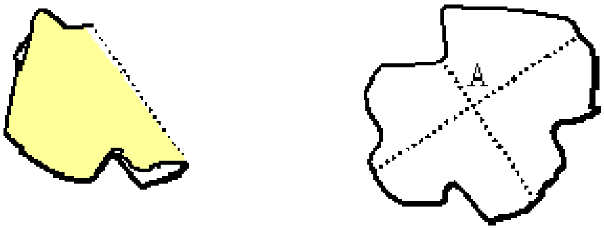
a. Ángulo: región comprendida entre dos semirrectas
b. Una recta divide al plano en dos regiones.
c. Perpendicularidad
d. Propiedad: Toda recta es simétrica respecto a una perpendicular suya.
e. Bisectriz de un ángulo: Existe una recta que es eje de simetría de dos semirrectas que parten de un mismo punto.
f. Propiedad: Las dos semirrectas que definen un ángulo son simétricas respecto a la bisectriz del mismo.

Solución Ficha 9:

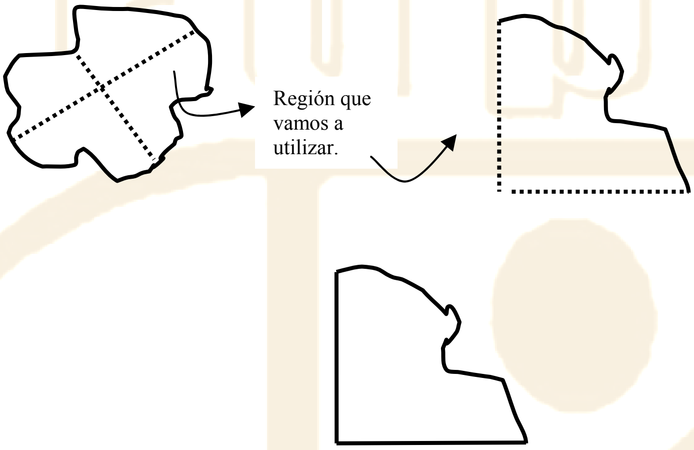
1. Trazamos una recta en el papel.



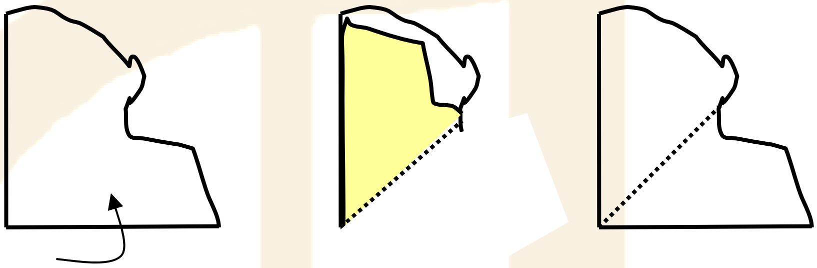
2. Doblamos la recta sobre sí misma (coincidiendo puntos de la recta sobre puntos de la recta) por un punto cualquiera. Y volvemos a desdoblar la hoja. En este momento la hoja está dividida en 4 regiones cada una de las cuales forma un ángulo de 90º.



3. Tomamos como base una de las regiones y trabajamos con ella.



4. En primer lugar llevamos una semirrecta sobre la otra semirrecta que delimitan el ángulo de 90º. De esta manera habremos trazado la bisectriz y por tanto obtendremos dos ángulos de 45º.



Nota: Hemos dado la solución para papel irregular ya que la de folio A4 nos da ya el 90º y el de 45º se realiza de igual forma.

Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos la definición de ángulo.
2. Recordamos la noción de perpendicularidad y mediatriz.
3. Recordamos la noción de bisectriz.
4. Reflexiones y simetrías. ¿Dónde debemos colocar un espejo para que refleje la mitad de un objeto?

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 10: ÁNGULOS de 60º y 30º

1. Te damos un folio, y por tanto todos los ángulos son de 90º. Construye un ángulo de 60º.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido estos pasos.

3. Construye ahora un ángulo de 30º.

4. Explica cómo lo has realizado y qué has utilizado de la actividad 1 para realizarlo.

Instrucciones para el profesor

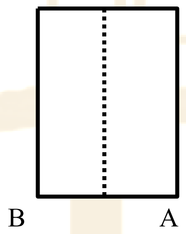
Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

a. Ángulo: región comprendida entre dos semirrectas
b. Perpendicularidad y mediatriz.
c. Propiedad: Toda recta es simétrica respecto a una perpendicular suya.

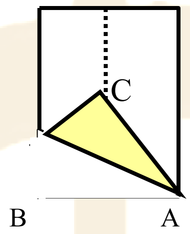
d. Transportar distancias y ángulos.
e. Medida de ángulos.
f. La suma de los ángulos de un triángulo es 180º.
g. Propiedad: En un triángulo equilátero la mediatriz de un lado pasa por el vértice opuesto.

Solución Ficha 10:

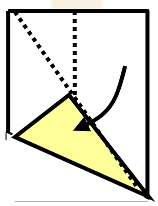
1. Trazamos mediatriz del lado menor del folio (ver ficha nº 7).



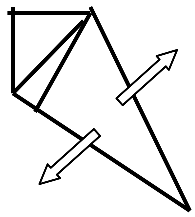
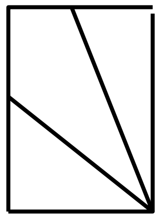
2. Llevamos el vértice B a la mediatriz marcando un doblez que pase por A. (Este paso no cumple con algunos de los axiomas de la papiroflexia en los que se supone que no se pueden llevar puntos a rectas por la inexactitud de esta acción).



3. Llamamos C al punto de la mediatriz donde llega B y obtenemos el triángulo ABC, que tiene el ángulo C de 90º por construcción. Doblemos después por CA. Al doblar observamos que tenemos tres dobleces de ángulos iguales.



4. Observamos ahora cuánto miden los ángulos formados al desdoblar el papel.

5. Lo que hemos logrado es trisecar un ángulo de 90º con lo que al desdoblar el papel podemos observar tres ángulos de 30º. Cogiendo dos de ellos tendremos el de 60º. ¿Por qué el ángulo construido mide 30º?

Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos la construcción de:

   i. Perpendicular a una recta.

   ii. Mediatriz de un segmento.

2. La suma de los ángulos de un triángulo suman 180º.

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 11: TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO

1. Te damos una hoja cuadrada y por tanto todos los ángulos son de 90º. Construye un ángulo cualquiera.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido estos pasos.

3. Divide ahora ese ángulo en tres ángulos iguales. ¿Puedes hacerlo con cualquier ángulo?

4. Explica cómo lo has realizado y qué has utilizado de las fichas anteriores para realizarlo.

Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

a. Ángulo: región comprendida entre dos semirrectas
b. Perpendicularidad y mediatriz.
c. Propiedad: Toda recta es simétrica respecto a una perpendicular

suya.

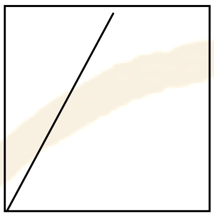
d. Transportar distancias y ángulos.

e. La suma de los ángulos de un triángulo es 180º.

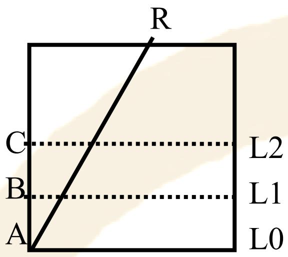
f. Propiedad: En un triángulo equilátero la mediatriz de un lado pasa por el vértice opuesto.

Solución Ficha 11:

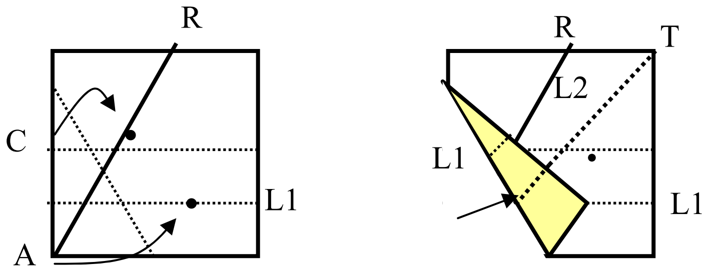
1. Trazamos un ángulo cualesquiera.



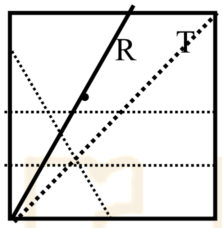
2. Obtenemos dos rectas paralelas a un lado con la condición que de A a B haya la misma distancia que de B a C. De esta manera obtenemos tres rectas paralelas L0, L1 y L2.

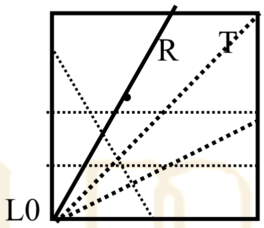


3. Llevamos C a la semirrecta que determina el ángulo que queremos trisecar y que llamamos R, y llevamos A a la recta L1. En el reverso del doblez observamos la marca de la recta L1 cuya dirección nos determina la trisección del ángulo y que llamaremos T.



4. Por último, bisecamos el ángulo comprendido entre las semirrectas T y L0. De esta manera habremos logrado la trisección del ángulo limitado por las semirrectas R y L0.





Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos la construcción de:
    - i. Perpendicular a una recta.
    - ii. Paralelas a una recta.
    - iii. Mediatriz de un segmento.
    - iv. Bisectriz de un ángulo.
2. Teorema de Thales.
3. Ángulos opuestos.

TAREA 4: TRANSPORTADOR DE ÁNGULOS

Tópicos implicados: Noción de ángulo y construcción de diversos ángulos

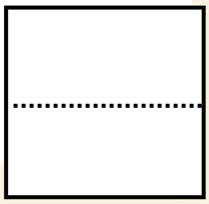
Nivel Educativo: 3º ESO y 4º ESO

Formato Papel: Papel Cuadrado

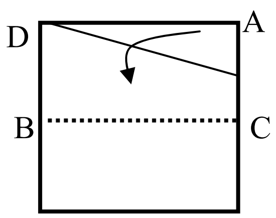
Propuesta para el alumno

FICHA Nº 12: TRANSPORTADOR DE ÁNGULOS[5]

1. Sigue las siguientes instrucciones para construir un transportador de ángulos.
    a. Coge una hoja de papel cuadrada. Dobla el papel por la mitad y desdóblalo nuevamente. ¿Cuál es la razón entre el largo y el ancho de cada rectángulo que se forma y el cuadrado completo?

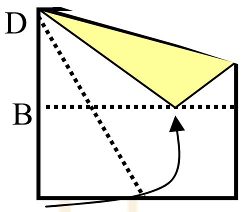


    b. Dobla la esquina superior derecha hacia abajo de tal manera que el vértice A caiga sobre el segmento BC. Asegúrate de que el doblez pasa por el vértice D. ¿Qué clase de triángulo acabas de construir?

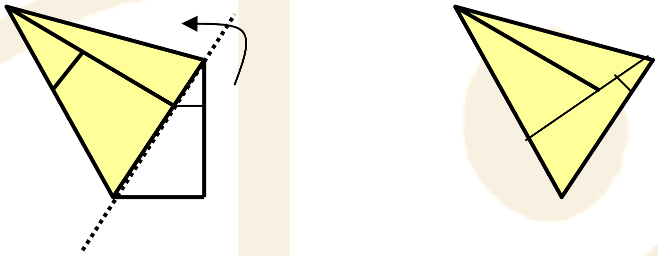


[5] La siguiente tarea ha sido extraída de la página Web de la Fundación CIENTEC. La hemos incluido a pesar de no ser nuestra porque nos permite comprobar los ángulos de algunas construcciones posteriores.

c. Dobla la esquina izquierda inferior hacia arriba hasta que se una con la esquina superior derecha del cuadrado. ¿Qué clase de triángulo has formado?



d. Dobla la base del triángulo tal como se muestra en la figura. ¿Qué tienen en común todos los triángulos del dibujo superior?



2. Desdobla tu herramienta de medición angular y encuentra la medida de cada uno de los ángulos formados por los dobleces. Escribe los ángulos sobre los triángulos correspondientes en tu herramienta y guárdalo para utilizarlo como referencia.

Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

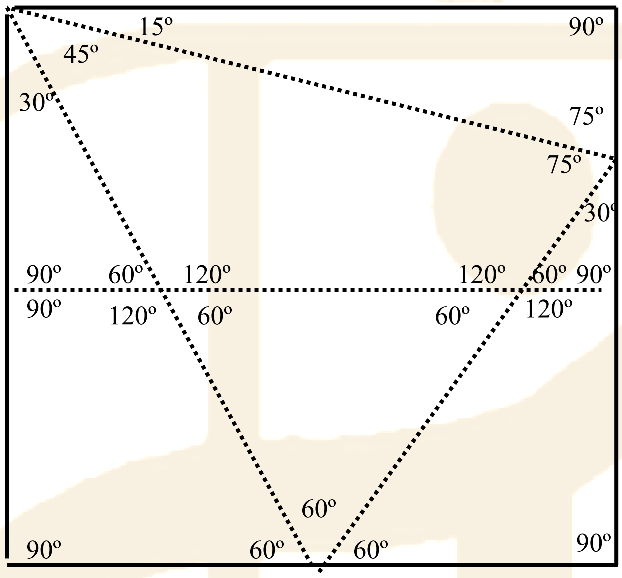
a. Ángulo: región comprendida entre dos semirrectas.
b. Perpendicularidad y mediatriz.
c. Triángulos rectángulos.
d. Transportar distancias y ángulos.
e. Medida de ángulos.
f. La suma de los ángulos de un triángulo es 180º.

Solución Ficha 12:

Pregunta 1:

a. El lado largo del rectángulo y el lado del cuadrado son del mismo tamaño. El ancho del rectángulo es la mitad del largo del cuadrado.
b. Un triángulo rectángulo escaleno.
c. Un triángulo rectángulo escaleno 30-60-90
d. Todos son triángulos rectángulos escalenos.

Pregunta 2:



Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos la construcción de:
   i. Ángulos de 45º, 3º y 90º.
   ii. Trisección de ángulos.
   iii. Ángulos complementarios y suplementarios.
2. Teorema de Thales.
3. La suma de los ángulos de un triángulo suman 180º.

TAREA 5: TEOREMAS DE THALES Y TEOREMA DE PITÁGORAS

DIVIDIENDO UN FOLIO EN PARTES IGUALES

Tópicos implicados: Teorema de Thales

Nivel Educativo: 2º ESO y 3º ESO

Formato Papel: Folio A4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 13: DIVIDIR UN FOLIO EN PARTES IGUALES

1. Divide un folio en 2 partes iguales.
2. Divídelo ahora en 4 partes iguales.

3. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

4. ¿Sabrías dividirlo en 8 partes iguales? Razona tu respuesta.

5. ¿Puedes dividir ahora el folio en 7 partes del mismo tamaño?

6. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

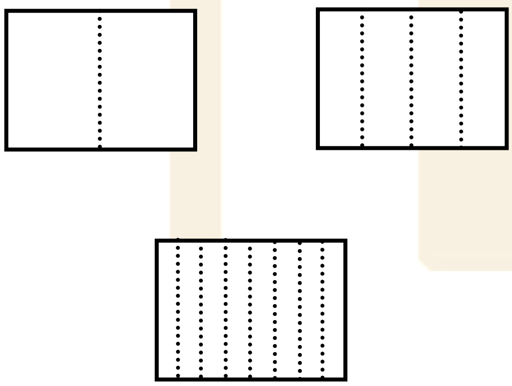
Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

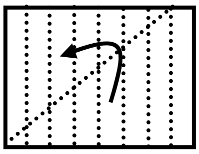
a. Coincidencia de puntos
b. Paralelismo
c. Perpendicularidad
d. Intersección de segmentos
e. Proporcionalidad de segmentos
f. Teorema de Thales

Solución Ficha 13:

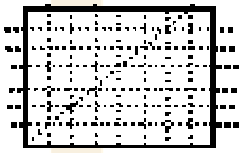
1. Dividimos el lado menor del folio en partes iguales, dividimos el lado mayor en la menor potencia de 2 que supere el número de lados en el que queramos dividirlo. Para el caso que nos incumbe de 7, la potencia sería 2^3. Luego con 3 dobleces, siempre sobre la mitad del anterior, conseguiremos dividir el folio en 8 partes iguales. (Para dividir el lado mayor procederíamos con la división del lado menor según estas indicaciones).



2. Hacemos un doblez que una lados opuestos y pase por un vértice del folio y el punto determinado por la séptima parte de los trozos obtenidos.



3. Una vez determinado el doblez anterior lo deshacemos. Los puntos de intersección entre el último doblez obtenido y los dobleces que dividían en el largo en 8 partes determinan las siete partes en las que queremos dividir el estrecho del folio.
4. Trazamos rectas perpendiculares al lado menor del folio que pasen por los puntos intersección obtenidos en el paso anterior.



5. De esta manera hemos conseguido dividir el lado menor del folio en 7 partes iguales.

Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Si no lo podemos conseguir dividir en 7 partes, intentadlo primero con 3 partes. Para ello, solo tenemos que dividir en cuatro partes el lado mayor (si es que se pretende dividir el lado menor, y viceversa).
2. Trazamos un doblez que pase por un vértice y el extremo del tercer doblez que divide el folio en 4 partes. ¿Qué proporciones aparecen si trazas un doblez que una un vértice con el extremo del tercer doblez opuesto a ese vértice? ¿Y si miramos las proporciones existentes entre los nuevos puntos intersección?
3. Intentamos de nuevo buscar la división en 7 partes.
4. Recordamos que ahora hay que dividir el lado opuesto en 8 partes iguales.
5. Trazamos un doblez análogo al que hacíamos para dividirlo en tres partes.

TEOREMA DE PITÁGORAS

Tópicos implicados: Mediatriz, simetría, transportar distancias, diagonal y construcción triángulos rectángulos.

Nivel Educativo: 2º ESO y 3º ESO

Formato Papel: Papel Cuadrado

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 14: DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

1. Con un folio A4, intenta realizar una demostración del Teorema de Pitágoras.

2. Explica cómo lo has realizado y por que has seguido estos pasos.

Instrucciones para el profesor:

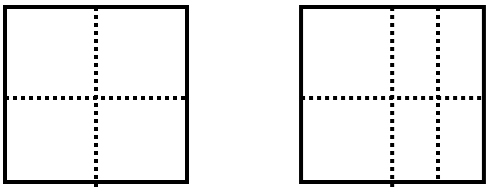
Objetivos: Percibir los elementos implicados en el teorema de Pitágoras:

   a. Triángulo rectángulo.
   b. Comparación de Superficies.

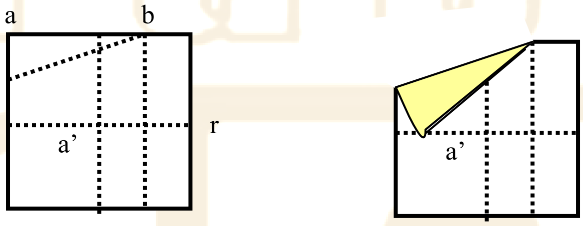
Y el propio teorema de Pitágoras.

Solución Ficha 14:

1. Cogemos un papel cuadrado y lo dividimos en cuatro cuadrados iguales. Posteriormente volvemos a dividir el lado de uno de estos cuadrados pequeños otra vez por la mitad.

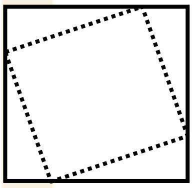


2. Llevamos el vértice a sobre el punto a' de la recta r y pasando por b construyendo así un triángulo rectángulo.

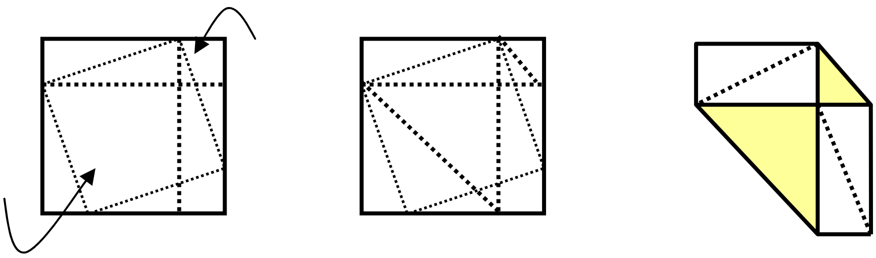


3. Repetimos el proceso con todos los vértices y desdoblamos. De esta manera hemos construido un cuadrado sobre la hipotenusa de nuestro triángulo rectángulo. El proceso ha sido ir construyendo perpendiculares a los vértices de la hipotenusa de los triángulos rectángulos construidos.

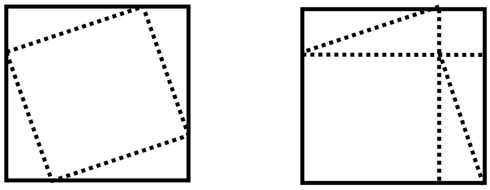
   (Nota: Este cuadrado ha salido de un triángulo rectángulo de catetos en proporción 3-1 pero es posible realizar el mismo proceso con otras relaciones).



4. A continuación construimos los cuadrados sobre los catetos. Para ello hacemos uso de la simetría del cuadrado respecto a su diagonal, transportando distancias.



5. Desdoblamos y el teorema de Pitágoras queda demostrado.



Nota: Esta sólo es una de las muchas demostraciones posibles.

Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos teorema de Pitágoras.
2. Construimos un cuadrado sobre un segmento.
3. Propiedades de un cuadrado.
4. Dibujamos esta demostración en la pizarra.

TAREA 6. TRIÁNGULOS

CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA

Tópicos implicados: Triángulos, Clasificaciones de triángulos y Tipos de ángulos. Altura de un triángulo. Área de un triángulo.
Nivel educativo: 2º ESO
Formato Papel: Folio A-4.

FICHA Nº 15: CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA

1. Construye un triángulo.

2. ¿Qué tipo de triángulo es? ¿Cómo lo has construido?

3. Comprueba que el área de ese triángulo es $\frac{bxh}{2}$, donde b es la base del triángulo y h la altura.

4. Construye los otros tipos de triángulos que existen.

Instrucciones para el profesor

Objetivos: En esta primera tarea relativa a la construcción de triángulos, se trata de que el alumno construya un triángulo cualquiera y determine cuáles son sus características atendiendo a sus lados y a sus ángulos. A partir de este caso particular, el alumno podrá obtener en papel, atendiendo a las clasificaciones que se les presentan, los tipos de triángulos que existen. Finalmente y como resumen del trabajo realizado, se requiere que construyan la tabla que presentamos al profesor en esta tarea.

Sobre este primer triángulo, se requiere que se compruebe la fórmula del área. Para lo cuál deben manejar la altura del triángulo.

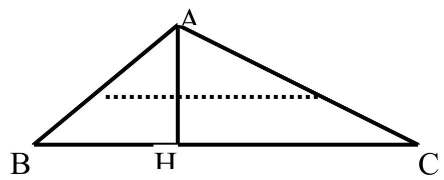
Además, tal y como se verá en las sucesivas tareas, se pretende que el alumno perciba el concepto de mediatriz, que maneje el transporte de distancias.

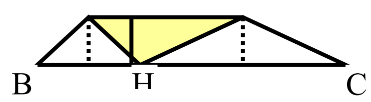
La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.

Solución Ficha 15 (1):

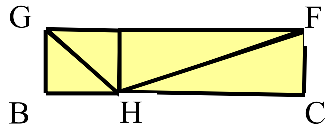
1. Hacemos tres dobleces en el papel de forma que se corten dos a dos, se obtiene una región cerrada de tres lados, o sea, un triángulo.
2. Según sus ángulos, puede ser acutángulo, rectángulo u obtusángulo. Según sus lados, puede ser isósceles, escaleno o equilátero.
3. Se trata de la comprobación de una fórmula conocida. Para poder comprobarla mediante papiroflexia, se ha de trazar la altura que pase por el mayor ángulo del triángulo.

   Hacemos coincidir el vértice donde se encuentra el ángulo mayor con el lado opuesto. Doblamos el papel de forma que B y C coincidan con H.





Doblamos de forma que B y C coincidan con H.



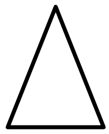
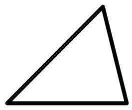
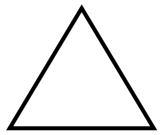
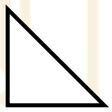
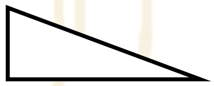
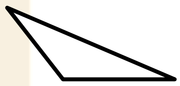
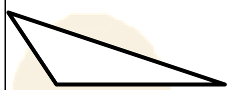
Observamos que dos áreas BCFG equivalen a la de ABC.

Área ABC = 2 BCFG = 2 BG x BC = 2 x $\frac{1}{2}$BC x $\frac{1}{2}$AH = $\frac{1}{2}$BC x AH = $\frac{1}{2}$bxh.

4. Las clasificaciones con las que trabajaremos en lo sucesivo son las que indicamos a continuación. Los triángulos se clasifican según sus lados en:
   - Escalenos: tienen sus tres lados de diferente longitud.
   - Isósceles: tienen dos de sus lados de igual longitud.
   - Equiláteros: tienen sus tres lados de igual longitud.

   Los triángulos se clasifican según sus ángulos en:
   - Acutángulos: tienen sus tres ángulos interiores agudos.
   - Rectángulos: tienen un ángulo recto.
   - Obtusángulos: tienen un ángulo obtuso.

   En la siguiente tabla aparecen los tipos de triángulos que existen según las dos clasificaciones presentadas. La exponemos para que el profesor la tenga presente. Sin embargo, es conveniente que sea el alumno quien trate de elaborarla con las indicaciones que le vaya dando el profesor y con su propio trabajo. En este caso, la tabla no la conocería el alumno hasta finalizar las tareas sobre la construcción de triángulos.

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS	SEGÚN LADOS			
SEGÚN ÁNGULOS		Isósceles	Escaleno	Equilátero
	Acutángulo			
	Rectángulo			*Imposible*
	Obtusángulo			*Imposible*

Nota: Una vez conocidas las dos clasificaciones, remitimos al profesor a la tarea que corresponda al triángulo que haya construido el alumno.

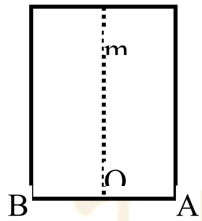
Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Preguntamos por la definición de triángulo (región cerrada del plano determinada por tres rectas que se cortan dos a dos).
2. Clasificamos el triángulo construido atendiendo a dos criterios: sus lados y sus ángulos.
3. Sobre el triángulo construido, recordamos el área del triángulo y tratar de obtener el área del triángulo como el doble de otra área que se pueda observar sobre la propia figura.
4. Con el papel, construimos los triángulos que sean posibles.

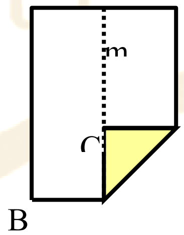
TRIÁNGULOS ISÓSCELES

Solución Ficha 15 (2)

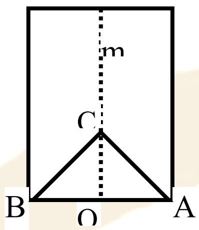
Para construir triángulos isósceles, consideraremos como vértices los dos puntos de uno de los lados menores del folio A4 (A y B) y el tercer vértice lo tomaremos en la mediatriz del lado menor (m). Esto nos asegura que el triángulo es isósceles puesto que la mediatriz del segmento AB la forman los puntos del plano que equidistan de A y de B.



Llevamos la distancia OA sobre m.

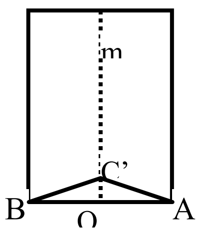


Si llamamos OC al nuevo segmento que resulta sobre m, el triángulo ACB es un TRIÁNGULO ISÓSCELES RECTÁNGULO.

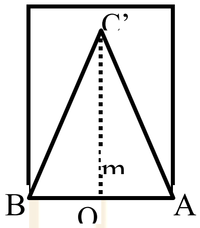


Si tomamos cualquier otro punto de la mediatriz distinto de C como tercer vértice del triángulo, obtendremos los triángulos isósceles acutángulos y los triángulos isósceles obtusángulos.

Doblamos para obtener C’ más abajo que el C anterior (con lo cual el ángulo formado en C’ es mayor de 90 grados), conseguimos un TRIÁNGULO ISÓSCELES OBTUSÁNGULO en AC’B.



Si, doblando el papel, tomamos C' más arriba que el C anterior (en C' se forma un ángulo menor de 90 grados), obtenemos un TRIÁNGULO ISÓSCELES ACUTÁNGULO en AC'B.



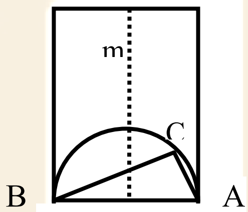
Nota: Un caso particular del triángulo isósceles acutángulo es el triángulo equilátero, como veremos en la siguiente ficha.

TRIÁNGULOS ESCALENOS

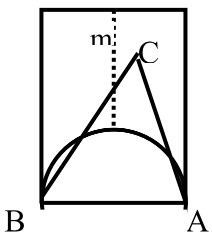
Solución Ficha 15 (3)

Tomaremos los vértices A y B como vértices del triángulo y consideraremos, la semicircunferencia con centro en O y radio OA (la trazamos con lápiz).

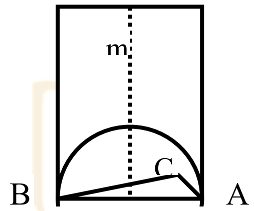
Si tomamos el tercer vértice del triángulo (C) sobre la circunferencia, obtenemos el TRIÁNGULO ESCALENO RECTÁNGULO ACB.



Siempre que tomemos el vértice C fuera de la mediatriz (con esto aseguramos que el triángulo es escaleno) y fuera de esa semicircunferencia (así aseguramos que el ángulo que se forma en C es agudo), obtendremos en ACB un TRIÁNGULO ESCALENO ACUTÁNGULO.



Si tomamos el tercer vértice fuera de la mediatriz (con esto aseguramos que el triángulo es escaleno) y dentro de esa semicircunferencia (con esto aseguramos que el ángulo que se forma en C es obtuso), obtendremos en ACB un TRIÁNGULO ESCALENO OBTUSÁNGULO.



TRIÁNGULO EQUILÁTERO

FICHA Nº 16: TRIÁNGULO EQUILÁTERO

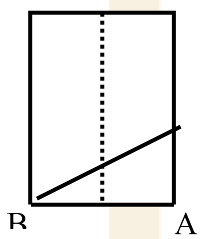
1. Construye con un folio un triángulo equilátero.

2. Explica cómo lo has hecho y por qué has seguido esos pasos.

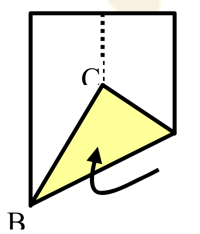
Solución Ficha 16:

Dado que el segmento del que se pretende hallar su mediatriz es uno de los lados del folio A-4, bastará con doblar el folio por la mitad del lado menor del folio.

1. Trazamos mediatriz del lado menor del folio.



2. Llevamos vértice A a la mediatriz marcando un doblez que pase por B.
3. Llamamos C al punto de la mediatriz donde llega A.



4. Desdoblamos CB y CA obteniendo el triángulo ABC.

Nota: En la introducción general se explicará que se entiende por doblar una recta entre dos puntos. Esta construcción está ligada a la construcción de un ángulo de 60º.

Pistas para ayudar a los alumnos:

Recordar características de un triángulo equilátero:

- Lados iguales
- Ángulos de 60º
- Mediatriz de un segmento.
- La mediana, mediatriz y alturas coinciden.
- La mediatriz de un lado pasa por el vértice opuesto en un triángulo equilátero.

Nota: Si los tres lados tienen igual longitud, los tres ángulos deben ser iguales. Por tanto los tres ángulos tienen que ser de 60 grados. Esto imposibilita la existencia de triángulos rectángulos equiláteros y obtusángulos equiláteros.

TAREA 8: SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

Tópicos implicados: Triángulos y ángulos.

Nivel Educativo: 2º ESO

Formato papel: Folio A4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 17: SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

1.¿Cuánto suman las medidas de los ángulos de un triangulo? Compruébalo (o averígualo) utilizando un triángulo de papel.

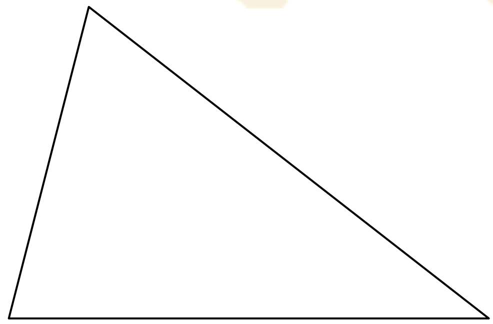
Explica cómo lo has hecho.

Instrucciones para el profesor

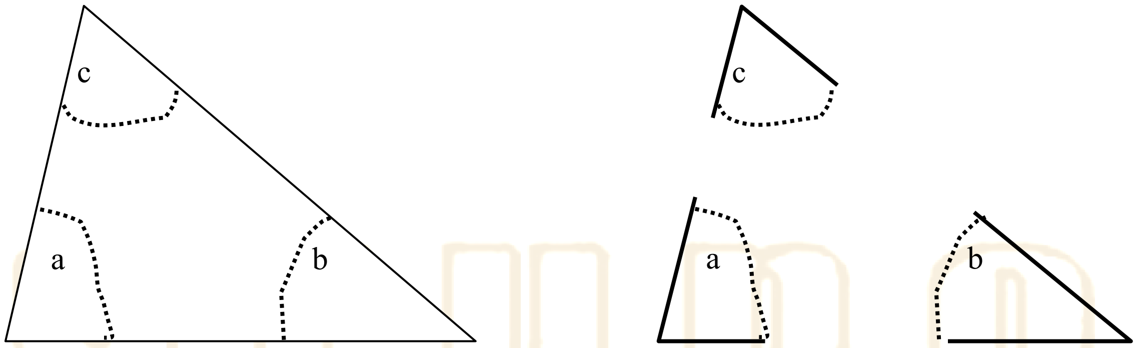
Objetivos: Se pretende que el alumno practique la suma geométrica de ángulos y compruebe o descubra manualmente la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo. Esta demostración resulta más intuitiva y convincente para el alumno que las habituales demostraciones analíticas.

Solución 1 Ficha 17:

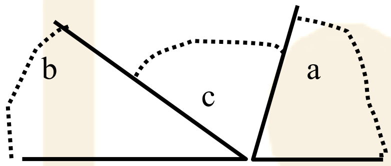
1. Recortamos un triángulo del folio con la forma que queramos.



2. Recortamos con las manos las esquinas del triángulo de papel.



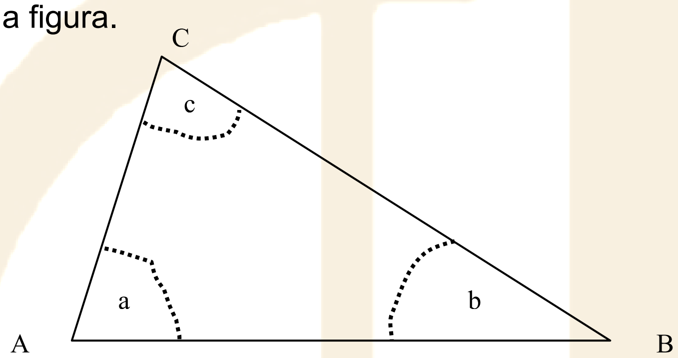
3. Disponemos las esquinas haciendo coincidir los vértices para sumar geométricamente los ángulos.



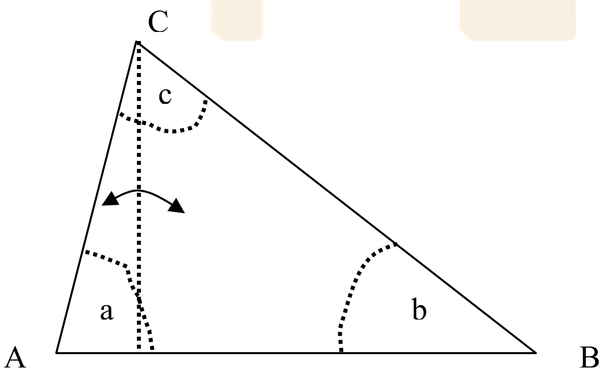
4. Así visualmente observamos que los ángulos de un triangulo suman un ángulo que mide 180º.

Solución 2 Ficha 17:

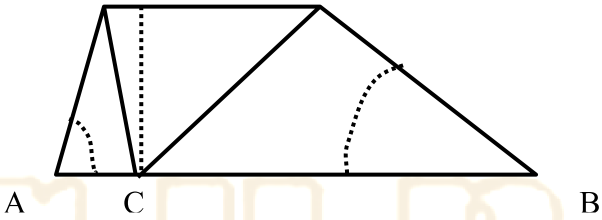
1. Denominamos a los ángulos a, b y c y a los vértices A, B y C tal y como indica la figura.



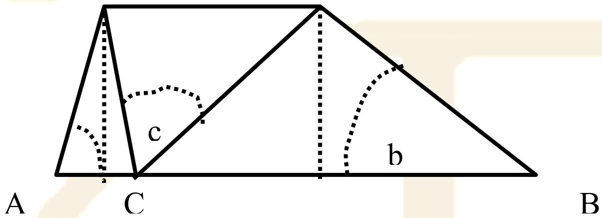
2. Marcamos una altura del triangulo, en este caso desde el vértice C.

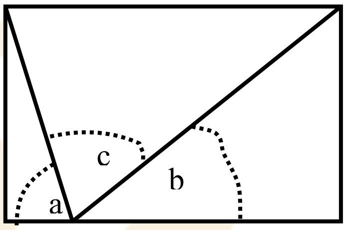


3. Doblamos el triángulo llevando el vértice C al punto intersección de la altura con la base del triángulo.



4. Ahora doblamos haciendo coincidir los vértices A y B con el C.





5. Así, visualmente observamos que los ángulos del triángulo suman un ángulo que mide 180º.

Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recortamos un triángulo del folio con la forma que quieras. ¿Cómo puedes sumar los ángulos del triángulo sin usar lápiz ni papel?
2. Para sumar ángulos geométricamente (sin lápiz ni papel) debemos colocar los ángulos uno a continuación del otro (doblando, recortando,...).
   ¡Inténtalo con tu triángulo!

Nota: Área del triángulo (ver tarea 7).

TAREA 9: LUGARES NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

CIRCUNCENTRO

Tópicos implicados: Mediatriz y Circuncentro

Nivel Educativo: 3º ESO y 4º ESO

Formato Papel: Folio A-4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 18: EL CIRCUNCENTRO DE UN TRIÁNGULO

1. Construye un triángulo acutángulo.

2. Traza las mediatrices a cada uno de los lados del triángulo.

3. ¿Qué pasa con las mediatrices? ¿Dónde se cortan con respecto al triángulo?.

4. A este punto de corte se le denomina circuncentro. Comprueba que este punto es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

5. Realiza los pasos del 1 al 4 para un triángulo rectángulo y un obtusángulo. ¿Qué ocurre ahora con el punto de corte?

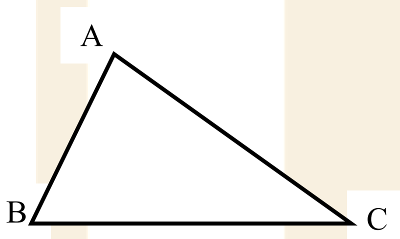
Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

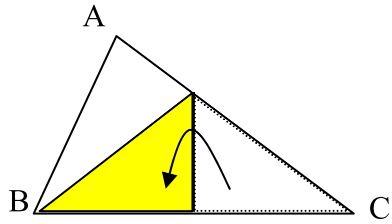
a. Mediatriz de un segmento es la recta perpendicular trazada en su punto medio
b. Perpendicularidad.
c. Punto medio.
d. Circuncentro y circunferencia circunscrita.
e. Triángulo acutángulo, rectángulo y obtusángulo.

Solución Ficha 18:

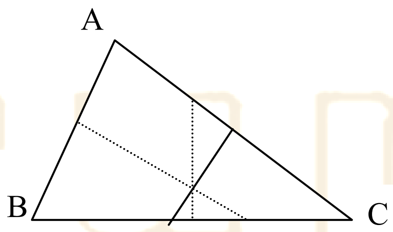
1. Construimos un triángulo acutángulo.



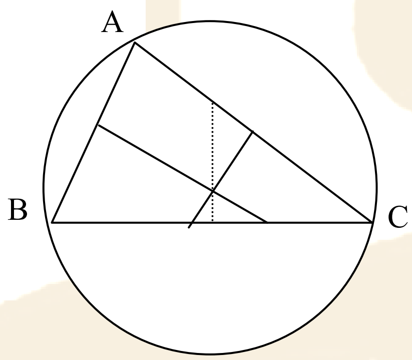
2. Trazamos la mediatriz de uno de los lados del triángulo, p.e. del lado BC, para esto has coincidir el vértice C con el vértice B



3. El pliegue generado es la mediatriz del lado BC. Hacemos lo mismo para los lados AB y AC. El punto de intersección de los tres pliegues es el circuncentro.



4. Haciendo centro en el circuncentro, podemos trazar una circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.



Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos la noción de perpendicularidad.
2. Recordamos la definición de mediatriz.
3. Recordamos la definición de circuncentro y la circunferencia circunscrita.
4. Triangulo acutángulo, rectángulo, obtusángulo.

Nota: Se puede observar la imposibilidad de realizarla para triángulos obtusángulos.

BARICENTRO

Tópicos implicados: Medianas y baricentro

Nivel Educativo: 2º ESO y 3º ESO

Formato Papel: Folio A-4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 19: EL BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO

1. Construye un triángulo acutángulo.

2. Halla el baricentro (o centro de gravedad) del triángulo.

3. Explica como lo has realizado y porque has seguido esos pasos.

4. Realiza los pasos del 1 al 4 para un triángulo rectángulo y un obtusángulo. ¿Por qué queda siempre el baricentro dentro del triángulo?

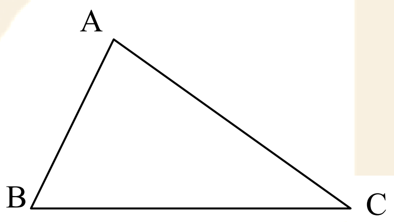
Instrucciones para el profesor

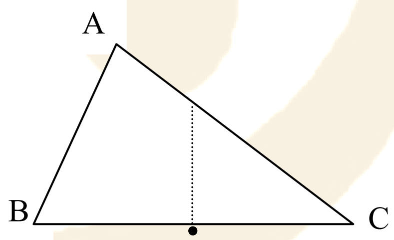
Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

a. Punto medio.
b. Mediana.
c. Baricentro.
d. Triángulo acutángulo, rectángulo y obtusángulo.

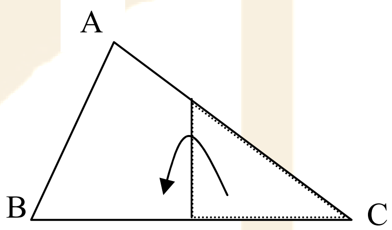
Solución Ficha 19:

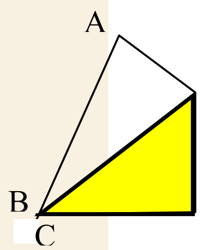
1. Construimos un triángulo acutángulo.
2. Trazamos la mediatriz de uno de los lados del triángulo, p.e. del lado BC, para esto has coincidir el vértice C con el vértice B



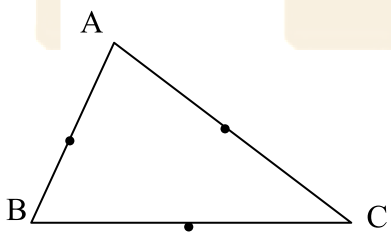


3. El pliegue generado es la mediatriz del lado BC. El punto de corte de la mediatriz y el lado BC es el punto medio.

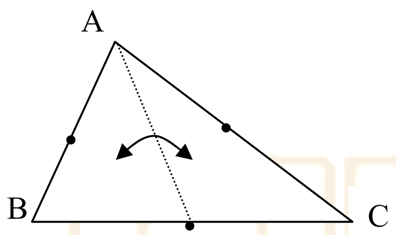


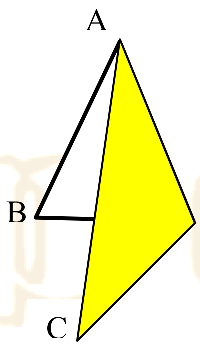


4. Hacemos lo mismo para los lados AB y AC. De esta manera tendrás los puntos medios de los tres lados.

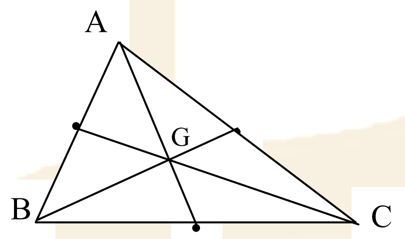


5. Realizamos un pliegue que una el punto medio del lado BC con el vértice opuesto A. El pliegue generado es la mediana.





6. Hacemos lo mismo para los otros dos lados y sus vértices opuestos correspondientes, las tres medianas se cortaran en un punto G, este punto es el baricentro.



Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos la noción de punto medio
2. Recordamos la definición de mediatriz y mediana.
3. Recordamos la definición de baricentro.
4. Triangulo acutángulo, rectángulo, obtusángulo.

Nota: En esta tarea se pueden trabajar las propiedades del baricentro como centro de gravedad del triángulo (Punto de equilibrio y Trayectoria de un móvil).

INCENTRO

Tópicos implicados: Bisectrices - Incentro

Nivel educativo: 2º ESO y 3º ESO

Formato Papel: Folio A-4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 20: EL INCENTRO DE UN TRIÁNGULO

1. Construye un triángulo acutángulo.

2. Encuentra las bisectrices de cada uno de los ángulos del triángulo.

3. El punto de corte se le denomina incentro, comprueba que en este punto podemos dibujar una circunferencia interior a el triángulo y que es tangente a los tres lados del triángulo.

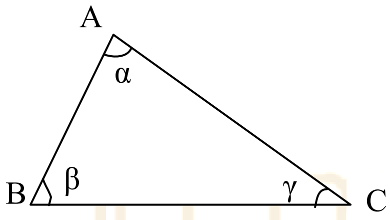
Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

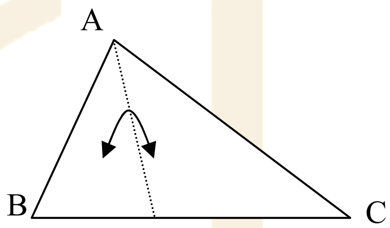
a. Bisectriz de un ángulo
b. Incentro y circunferencia inscrita.

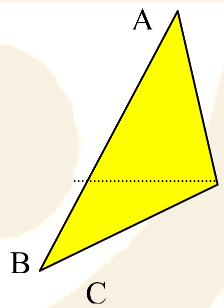
Solución Ficha 20:

1. Construimos un triángulo acutángulo.

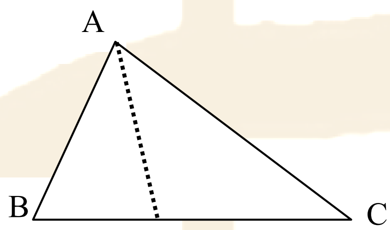


2. Marcamos la bisectriz del ángulo α del triángulo, para esto colocamos el lado AC sobre el lado AB y desdoblamos.

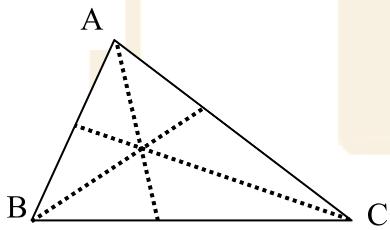




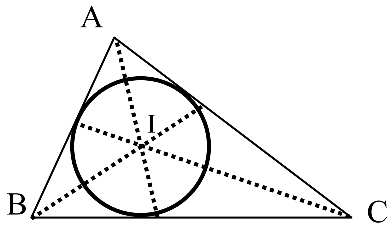
3. El pliegue generado es la bisectriz del ángulo α..



4. Hacemos lo mismo para los ángulos β y γ. De esta manera tendrás las bisectrices de los tres ángulos del triángulo.



5. El punto de corte de las tres bisectrices es el incentro.



Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos la definición de bisectriz.
2. Recordamos la definición de incentro.
3. Triangulo acutángulo, rectángulo, obtusángulo.

Nota:

- *Se puede pedir que comprueben si afecta de forma significativa el tipo de triángulo en la construcción.*
- *Se puede plantear como otra posible tarea, hallar el ortocentro.*

TAREA 9. CUADRILÁTEROS

CUADRADO

Tópicos implicados: Perpendicularidad y paralelismo.

Nivel Educativo: 1º ESO

Formato papel: Papel irregular

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 21: CUADRADO

1. Construye con el papel que te han dado un cuadrado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

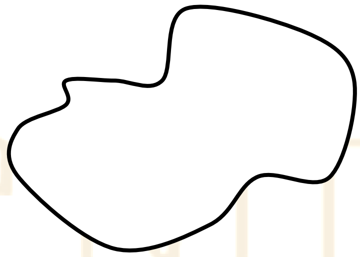
Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

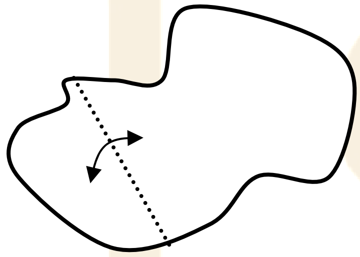
a. Perpendicularidad
b. Diagonal
c. Paralelismo
d. Cuadrado

Solución Ficha 21:

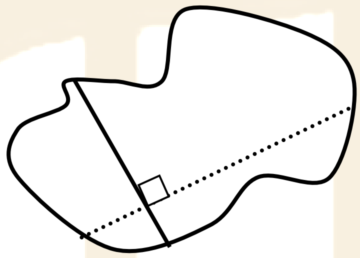
1. Nuestra intención es construir un cuadrado. Partimos de la siguiente situación:



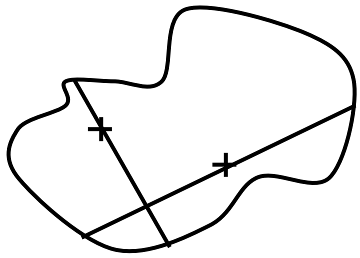
2. En primer lugar doblamos el papel para obtener una línea, que será donde se encontrará el primer lado del cuadrado.



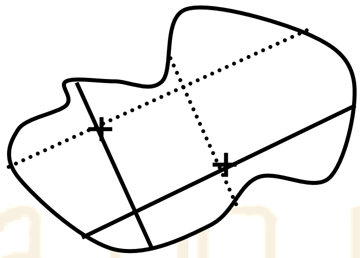
3. Sólo necesitamos recordar lo que ya hicimos en una ficha anterior, para la construcción de un cuadrado a partir de un segmento dado. Trazaremos por tanto una perpendicular a la línea inicial y ya tendremos nuestro primer ángulo del cuadrado.



4. A partir de este momento trabajamos con la región A (la región con mayor superficie de folio). Si hacemos coincidir las dos rectas, doblando por la mitad el ángulo común que más folio contenga, podremos señalar en ambas un punto que equidiste del vértice y que nos dará el lugar por donde hemos de doblar el papel para obtener los dos lados que nos faltan.



5. Sólo nos queda trazar dos perpendiculares, una a cada recta señalada, que pasen por los puntos marcados en cada una de ellas.



Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos como es un cuadrado: cuatro lados paralelos dos a dos y cuatro ángulos de 90º.
2. Deberemos recordar también los pasos que seguiste para trazar una perpendicular.

Nota: Tras la realización de esta tarea, los alumnos podrían construir sus propios papeles rectangulares en las tareas en que se requiera un folio A4, al no ser relevante las proporciones para la realización de las mismas.

Tópicos implicados: CUADRADO

Nivel Educativo: 1º ESO

Formato papel: Papel cuadrado

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 22: CUADRADO A PARTIR DE UN CUADRADO

1. Construye un nuevo cuadrado a partir del que te han dado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

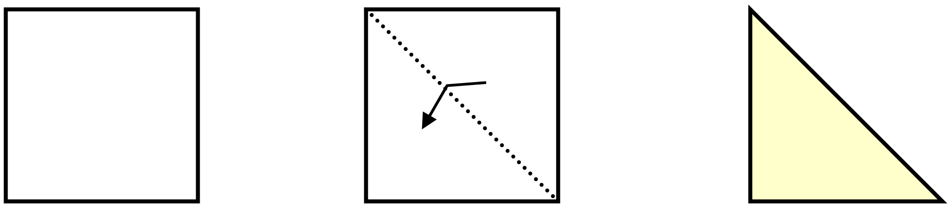
Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

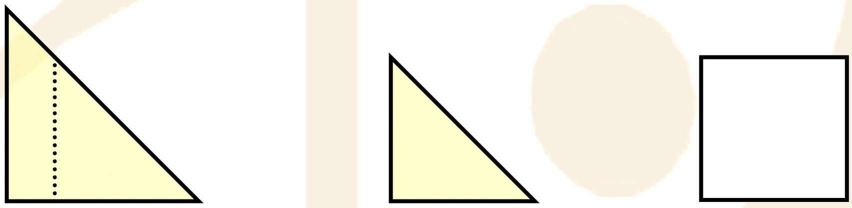
a. Paralelismo
b. Diagonal

Solución Ficha 22:

1. Tenemos un papel cuadrado y queremos construir un nuevo cuadrado a partir de él. Posiblemente surjan en el aula diversas formas de construirlo, pero vamos a dar aquí una muy sencilla aprovechando dos de los lados del cuadrado que ya tenemos. En primer lugar doblaremos el cuadrado por su diagonal.



2. Bastará con marcar una línea paralela a uno de los dos catetos de ese triángulo y recortar por ella para conseguir un nuevo cuadrado que veremos si desdoblamos el papel. Podríamos incluso elegir de antemano la medida del lado del nuevo cuadrado, (siempre menor que la del cuadrado de partida).



Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Semejanza de figuras (cuadrados).
2. La diagonal de un cuadrado es un eje de simetría del mismo.

Tópicos implicados: Perpendicularidad y paralelismo.

Nivel Educativo: 1º ESO y 2º ESO

Formato papel: Cualquier tipo de papel

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 23: CUADRADO SOBRE UN SEGMENTO

1. Construye un cuadrado utilizando como lado el segmento que aparece en el folio que te han dado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

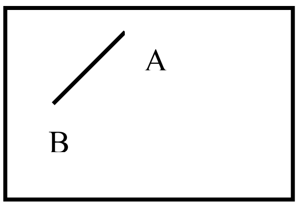
Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

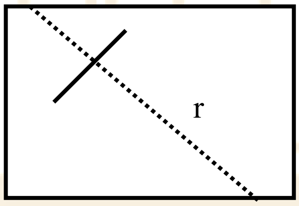
a. Segmento
b. Perpendicularidad
c. Diagonal
d. Paralelismo

Solución Ficha 23:

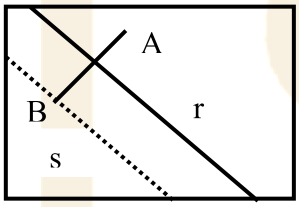
1. Tenemos la siguiente situación, un segmento de extremos A y B:



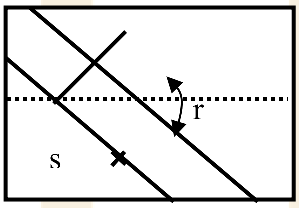
2. El segmento se corresponde con uno de los lados del cuadrado. Sabemos que un cuadrado tiene cuatro lados, verificando que son paralelos dos a dos y de manera que los ángulos que forman entre sí son de 90º.
3. Construimos una recta r perpendicular al segmento. Será más fácil si primero esta recta perpendicular pasa por uno de los puntos centrales de dicho segmento. Para construir la perpendicular ver fichas iniciales.



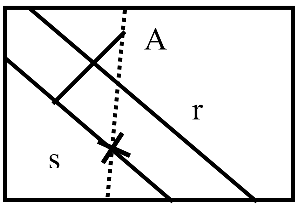
4. A continuación construimos una recta paralela a r, y por tanto perpendicular al segmento, que pase por uno de los extremos del mismo.



5. Doblando por el extremo B (punto que une la recta s y el segmento), hacemos coincidir el segmento con la recta s, quedando así dividido por la mitad el ángulo que forman el segmento y dicha recta y que mide 90º. Marcamos el punto de la recta s donde llegaría el segmento. Tendríamos así un segundo lado del cuadrado.

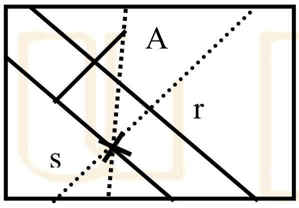


6. Construimos la diagonal del cuadrado mediante un doblez que una el extremo A del segmento con el punto señalado en la recta s.

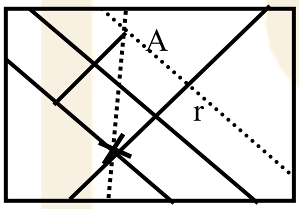


Construiremos a continuación los dos lados que nos faltan. Para ello utilizaremos la diagonal y dos rectas paralelas, una al segmento y otra a la recta s.

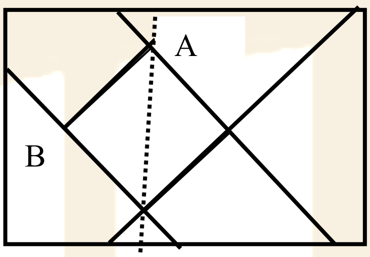
7. Doblaremos el papel para conseguir una recta paralela al segmento que pase por el punto marcado en la recta s.



8. Por último, construiremos una recta paralela a s que pase por el extremo A del segmento.



Ya tenemos el cuadrado formado.



Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos que un cuadrado tiene cuatro lados, paralelos dos a dos y cuyos ángulos son todos de 90º.
2. Recordamos la construcción de rectas perpendiculares y la diagonal como eje de simetría.

Tópicos implicados: Proporcionalidad, paralelismo y perpendicularidad.

Nivel Educativo: 2º ESO y 3º ESO

Formato papel: Papel cuadrado

Propuesta para ayudar al alumno

FICHA Nº 24: CUADRADO DE ÁREA MITAD DE OTRO

1. Construye un cuadrado de área la mitad del que te han dado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

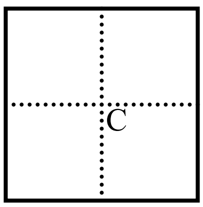
Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

a. Proporción
b. Paralelismo

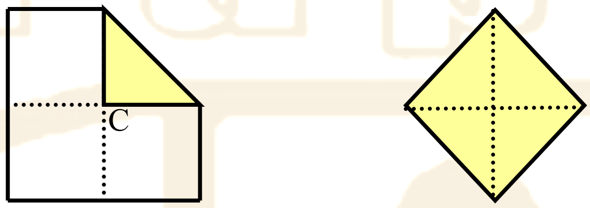
Solución Ficha 24:

1. Partimos de un papel cuadrado y queremos construir otro cuadrado cuya área sea la mitad del cuadrado de partida. Doblamos el cuadrado en cuatro cuadrados iguales.



Para ello bastará doblar el cuadrado por una línea paralela a uno de los lados y pasando por la mitad de los lados perpendiculares a ella. Marcaremos esa línea, desdoblaremos y repetiremos el proceso doblando por la otra mitad (doblez que nos dará una línea paralela a la anterior). Ambos dobleces tiene como punto de intersección el centro del cuadrado, que llamaremos C.

2. A continuación llevaremos cada uno de los vértices hasta el punto C.



La figura obtenida es un cuadrado de área la mitad del anterior.

Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Semejanza de figuras.
2. Noción de superficie como suma de superficies conocidas.

Nota: Esta construcción puede usarse para construir una pajarita. Por ello como tarea complementaria se les puede pedir a los alumnos dicha construcción.

RECTÁNGULO

Tópicos implicados: Paralelismo y transportar distancias.

Nivel Educativo: 1º ESO y 2º ESO

Formato papel: Folio A4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 25: RECTÁNGULO 1:2

1. Construye con el papel que te han dado un rectángulo de dimensiones 1:2.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

Instrucciones para el profesor

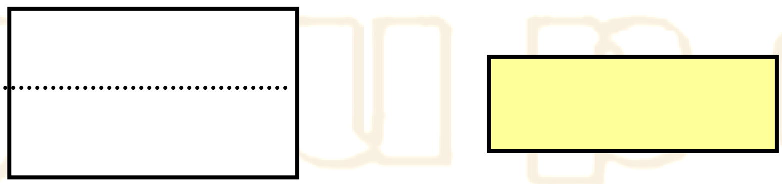
Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

a. Diagonal
b. Paralelismo
c. Traslación de segmentos o figuras
d. Proporcionalidad

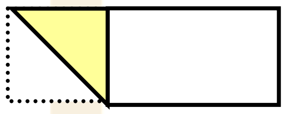
Solución Ficha 25:

1. Partimos de un folio formato A4 y queremos construir un rectángulo de dimensiones 1:2.

2. Como el largo del folio es menor que el doble del ancho, necesitamos construir otro rectángulo de manera que su largo sea doble o más que el ancho. Para ello doblaremos el folio por la mitad, de manera que los lados menores queden divididos por su punto medio y los lados mayores coincidan punto a punto (sean paralelos).



3. Será con este nuevo rectángulo con el que trabajaremos. A continuación vamos a construir un cuadrado de la misma forma que fue construido en la ficha anterior.
4. Una vez conseguido el cuadrado tendremos una situación parecida a la siguiente:



5. Si desdoblamos el papel tendremos un cuadrado unido a un rectángulo. Bastará con doblar este cuadrado sobre dicho rectángulo para obtener dos cuadrados iguales. Podemos cortar o doblar la parte del folio que sobra.

Ya tenemos el rectángulo que buscábamos.

Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Un rectángulo es un paralelogramo, es decir, tiene los lados paralelos dos a dos. Además tiene todos sus ángulos iguales a 90º (ángulos rectos).
2. Nos están diciendo que es un rectángulo 1:2. Esto significa que si el lado menor del rectángulo mide 1, el lado mayor debe medir el doble.
3. Toma el lado menor del folio como el lado del cuadrado. ¿Tienes suficiente con el largo para conseguir el doble del ancho?

4. Puede que no tengas suficiente con el folio para conseguir el lado doble. Prueba a utilizar la mitad del folio. Dóblalo haciendo coincidir los lados mayores, de manera que los lados menores queden divididos por la mitad.
5. Ahora deberías conseguir un cuadrado. Recuerda como lo hiciste en la ficha anterior.
6. Si ya tienes un cuadrado, puedes conseguir otro igual y a su lado. El resto del papel sobra, puedes cortarlo. Desdobla los dos cuadrados pegados por uno de los lados y tendrás el rectángulo 1:2.

Nota: Como tarea de profundización se puede plantear la construcción del mayor rectángulo de proporciones 1:2 a partir de un folio A4.

Tópicos implicados: Paralelismo y transportar distancias.

Nivel Educativo: 1º ESO y 2º ESO

Formato papel: Folio A4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 26: RECTÁNGULO 1:3

1. Construye con el papel que te han dado un rectángulo de dimensiones 1:3.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

3. ¿Se te ocurre alguna estrategia a seguir para conseguir un rectángulo 1:4? ¿Y un rectángulo 1:5?

Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

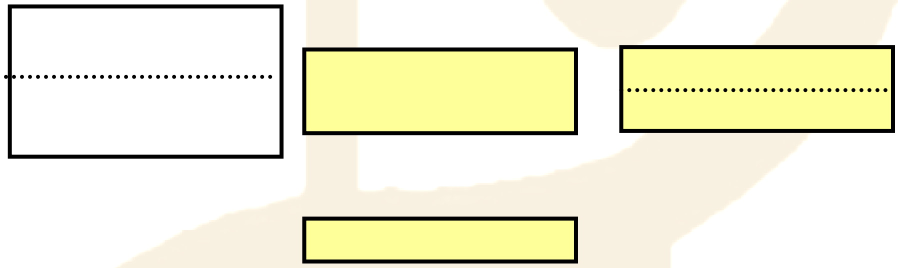
a. Diagonal
b. Paralelismo
c. Traslación de segmentos o figuras
d. Proporcionalidad

Solución Ficha 26:

1. Partimos de un folio formato A4 y queremos construir un rectángulo de dimensiones 1:2.

2. Ya sabemos construir un rectángulo 1:3. Podríamos pensar que con los mismos pasos dados en la ficha anterior tendríamos casi todo el proceso, pues bastaría volver a doblar sobre el papel restante para obtener un tercer cuadrado. Pero si observamos bien, el papel restante no tiene el suficiente tamaño para obtener el tercer cuadrado que necesitamos.

   Por este motivo necesitaremos una mayor largura respecto de la anchura. ¿Cómo conseguirla? Doblando el folio nuevamente por la mitad.



3. El proceso que sigue a continuación es exactamente el mismo que en la ficha anterior. Primero el cuadrado y a continuación dos cuadrados más semejantes al primero.

Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Pensamos en como conseguiste el rectángulo 1:2. Como no tenías un largo lo suficientemente grande para tu rectángulo, utilizaste sólo la mitad del folio. Con esa mitad construimos un rectángulo 1:2. ¿Podríamos conseguir otro cuadrado más igual a los dos que ya tienes para construir así el rectángulo 1:3?
2. Volvemos a doblar la mitad del folio nuevamente por la mitad y repetimos el proceso utilizado en la ficha anterior. ¿Tienes ya un rectángulo apropiado? Seguro que sí.

Tópicos implicados: Paralelismo, transportar distancias y teorema de Pitágoras.

Nivel Educativo: 2º ESO y 3º ESO

Formato papel: Folio de distinta proporción a 1: $\sqrt{2}$

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 27: RECTÁNGULO 1: $\sqrt{2}$

1. Construye con un folio un rectángulo de dimensiones 1: $\sqrt{2}$.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

Instrucciones para el profesor

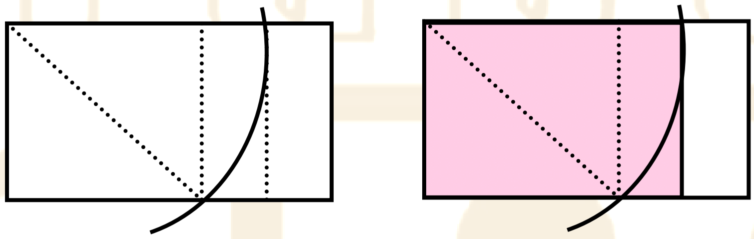
Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

a. Paralelismo
b. Traslación de distancias
c. Proporcionalidad
d. Teorema de Pitágoras

Solución Ficha 27:

1. Tenemos el folio y queremos construir un rectángulo de dimensiones 1: $\sqrt{2}$.

2. Vamos a suponer que el lado menor mide 1. Si construimos el cuadrado como ya vimos en fichas anteriores y doblamos el cuadrado por una de sus diagonales, sólo tenemos que recordar que en virtud del Teorema de Pitágoras, esta diagonal mide $\sqrt{2}$.
3. Sólo necesitamos trasladar esta medida a uno de los dados mayores del rectángulo. Una vez señalada, doblaremos perpendicularmente sobre la misma el papel, y cortaremos el papel sobrante.



Nos habrá quedado un rectángulo con las dimensiones buscadas.

Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Te recordamos otra vez que rectángulo es un paralelogramo, es decir, tiene los lados paralelos dos a dos. Además tiene todos sus ángulos iguales a 90º (ángulos rectos).
2. Nos están diciendo que es un rectángulo 1: $\sqrt{2}$. Esto significa que el lado menor del rectángulo mide 1 y el lado mayor debe medir $\sqrt{2}$. Supón que el lado menor del folio mide uno.
3. ¿Cuánto mide la diagonal del cuadrado de lado 1? ¿Podremos trasladar la medida de esta diagonal a otro lugar del papel?

Nota: Esta tarea no se puede realizar con folios del formato internacional DIN-A ya que estos cumplen la proporción de 1: $\sqrt{2}$ entre sus lados.

Tópicos implicados: Diagonal, paralelismo y teorema de Pitágoras.

Nivel Educativo: 2º ESO y 3º ESO

Formato papel: Folio A4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 28: RECTÁNGULO 1: $\sqrt{3}$

1. Construye con un folio un rectángulo de dimensiones 1: $\sqrt{3}$.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

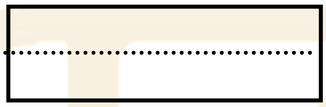
a. Diagonal
b. Paralelismo
c. Proporcionalidad
d. Teorema de Pitágoras

Solución Ficha 28:

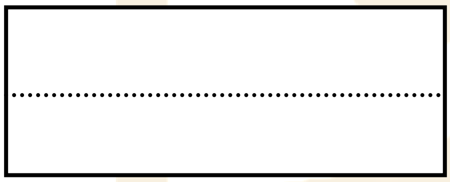
1. Tenemos un folio formato A4 y queremos construir un rectángulo de dimensiones 1: $\sqrt{3}$.

2. Doblamos el folio por la mitad, haciendo coincidir lados mayores.

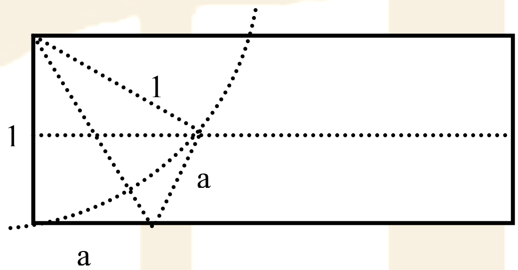
3. En el nuevo rectángulo consideramos como 1 la medida del lado menor.
4. Doblaremos al igual que en a. este nuevo rectángulo y desdoblamos, pues nos interesa tener señalada esa recta.



Vamos a ampliar este último dibujo para que se vea mejor.

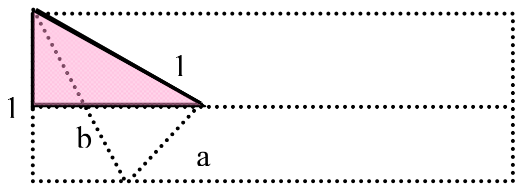


5. Haremos coincidir una de las esquinas del rectángulo con la marca central que hemos hecho hace un momento.



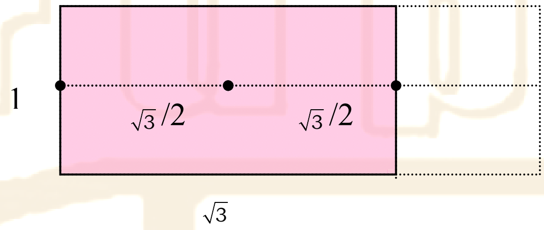
Podemos comprobar sin problemas que los ángulos del nuevo miden 30º (ángulo opuesto al lado a), 60º (ángulo opuesto a 1) y 90º (ángulo opuesto a la hipotenusa).

6. Si ahora consideramos el triángulo que hemos destacado en la figura siguiente con trazo continuo, lo que tenemos es lo siguiente.



Tenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 1, y sus ángulos miden 30º y 60º . Por tanto el lado b tiene que como medida el valor de seno de 60º, es decir $\sqrt{3}$ /2.

7. Si ahora duplicamos esta medida sobre la misma línea sobre la que se encuentra, conseguiremos el valor buscado, pues b + b = $\sqrt{3}$ y podremos construir el rectángulo pedido.



Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Te recordamos otra vez que rectángulo es un paralelogramo, es decir, tiene los lados paralelos dos a dos. Además tiene todos sus ángulos iguales a 90º (ángulos rectos).
2. Necesitamos la medida $\sqrt{3}$. Para conseguirla recuerda que sen(60º) = $\sqrt{3}$. ¿Serías capaz de construir un triángulo tal que uno de sus ángulos mida 60º?

Tópicos implicados: Proporción áurea.

Nivel Educativo: 3º ESO y 4º ESO

Formato papel: Folio A4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 29: RECTÁNGULO ÁUREO (1: ϕ)

1. Construye con un folio un rectángulo de dimensiones 1: ϕ.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

Instrucciones para el profesor

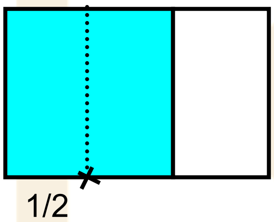
Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

   a. Número áureo
   b. Proporción áurea
   c. Traslación de distancias

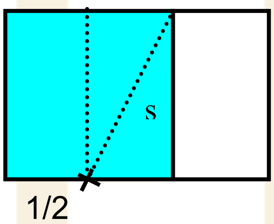
Solución Ficha 29:

1. Tenemos un folio formato A4 y queremos construir un rectángulo de dimensiones 1: ϕ.

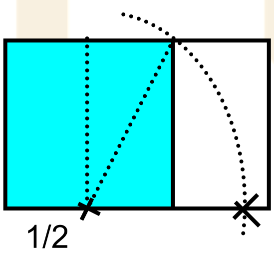
2. En primer lugar, recordaremos que dos segmentos a y b se encuentran en proporción áurea si a/b = (b – a)/a. Si tomamos a como unidad, la medida de b es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. A este número se le representa con la letra griega ϕ (fi) y se le llama número áureo.
3. Construimos un cuadrado como vimos en la ficha 21. Consideramos como 1 la medida del lado menor del folio, y por tanto la medida del lado del cuadrado. Nos situamos en el punto medio de uno de los lados del cuadrado (uno de los lados que coincida con el lado mayor del folio).



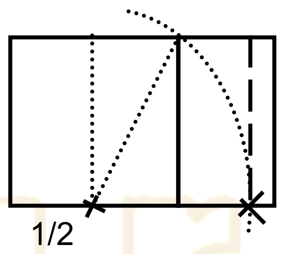
4. Doblaremos el papel para marcar la línea que une el punto medio señalado en el cuadrado con el vértice del cuadrado que se encuentra en le lado opuesto al punto y unido a la parte de folio restante. Llamaremos s a este segmento.

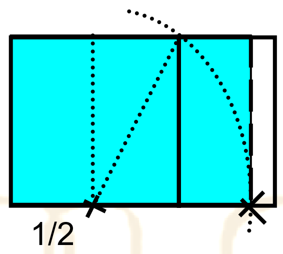


5. Ahora trasladamos el segmento s sobre el lado del folio donde marcamos el punto, precisamente a partir de él.



6. Ahora trazamos una recta perpendicular al lado mayor del folio y que pase por el último punto marcado.





Hemos obtenido así un rectángulo áureo.

Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Construimos un cuadrado como ya hiciste en fichas anteriores.
2. La mitad del lado del cuadrado sumada a la medida de la diagonal nos dan precisamente el número áureo, ϕ.

ROMBO

Tópicos implicados: Perpendicularidad, paralelismo y ángulo de 45º.

Nivel educativo: 1º ESO y 2º ESO

Formato papel: Papel Cuadrado

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 30: ROMBO A PARTIR DE UN CUADRADO

1. Construye un rombo a partir de un papel cuadrado

2.Explica cómo lo has hecho.

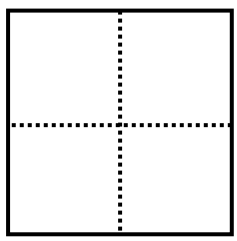
Instrucciones para el profesor

Objetivo: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

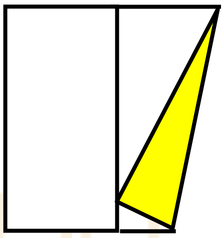
a. Definición y propiedades del rombo
b. La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular trazada en su punto medio
c. Transporte de distancias
d. Trisección del ángulo de 45 grados

Solución Ficha 30:

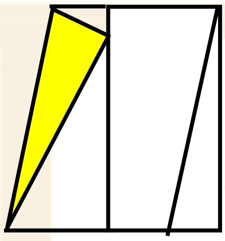
1. Doblamos el papel dos veces trazando las mediatrices de los lados del cuadrado.



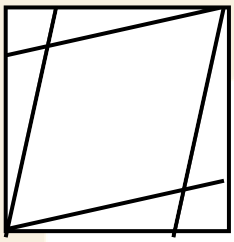
2. Ahora doblamos el papel llevando la esquina inferior derecha del cuadrado a la mediatriz de los lados horizontales del cuadrado, marcando un doblez que pase por el vértice.



3. De forma análoga hacemos un doblez llevando la esquina superior izquierda a la mediatriz de los lados horizontales.



4. A continuación hacemos dobleces análogos llevando dichas esquinas en este caso a la mediatriz de los lados verticales. Quedándose como resultado los 4 dobleces que indica la figura.



5. El rombo queda construido a partir de estos últimos dobleces como se puede observar en la figura anterior.

Nota: Si se marca la diagonal del cuadrado que une el vértice superior derecho con el inferior izquierdo se puede observar que se ha realizado la trisección de los ángulos de 45º que determina dicha diagonal.

Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos la definición de rombo y reflexionar sobre sus propiedades. Se puede construir el rombo como unión de dos triángulos equiláteros.
2. Recordamos la definición de mediatriz.

Tópicos implicados: Perpendicularidad, paralelismo y diagonal.

Nivel Educativo: 1º ESO y 2º ESO

Formato papel: Folio A4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 31: ROMBO A PARTIR DE UN RECTÁNGULO

1. Construye un rombo con el folio que te han dado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

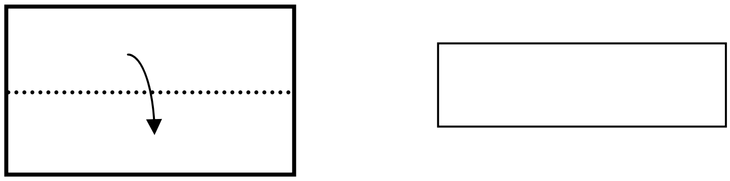
a. Paralelismo
b. Diagonal
c. Perpendicularidad

Solución Ficha 31:

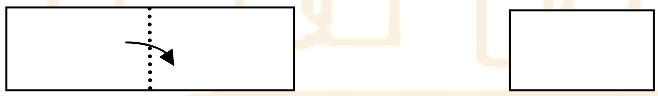
1. Tenemos un folio formato A4 y queremos construir un cuadrado.

Vamos a construir un rombo cuyas diagonales van a medir lo mismo que los lados del rectángulo.

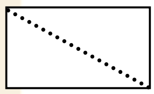
2. Doblamos el folio por la mitad, de manera que los lados mayores coincidan y los menores queden divididos por su punto medio.



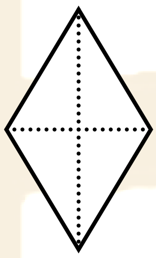
3. Volvemos a doblar el rectángulo resultante de la misma forma que antes.



4. Doblamos por la diagonal que no contiene al centro del folio y recortamos por dicha diagonal.



5. Si desdoblamos lo que nos queda de papel, veremos el rombo que queríamos construir.



Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos como es un rombo: paralelogramo (lados paralelos e iguales dos a dos y ángulos opuestos iguales dos a dos).
2. Recordamos la construcción de rectas paralelas y perpendiculares.
3. Recordamos la perpendicularidad de las diagonales de un rombo.

TRAPECIO

Tópicos implicados: Perpendicularidad y paralelismo.

Nivel Educativo: 1º ESO y 2º ESO

Formato papel: Folio A4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 32: TRAPECIO ISÓSCELES

1. Construye un trapecio isósceles con el folio que te han dado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

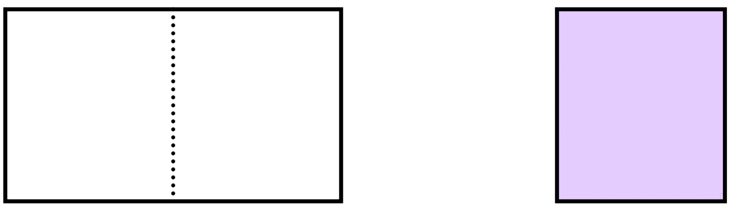
Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

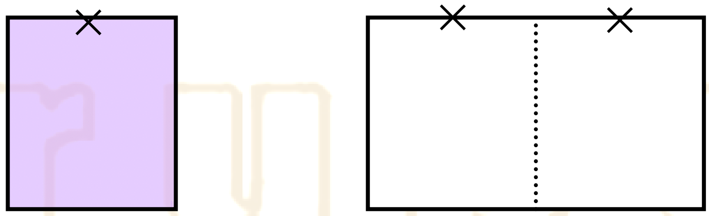
   a. Perpendicularidad
   b. Paralelismo

Solución Ficha 32:

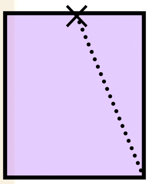
1. Doblaremos el folio por la mitad, haciendo coincidir los lados menores del folio punto a punto y doblando por la mitad los dos mayores.



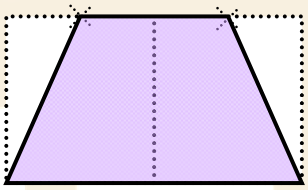
2. Sin desdoblar marcaremos un punto en uno de los lados menores del nuevo rectángulo de manera que se señale en las dos mitades dobladas. Si desdoblásemos podríamos observar los dos puntos marcados que son simétricos respecto de la línea central.



3. Sin desdoblar vamos a señalar la línea que va desde el punto marcado hasta uno de los vértices del rectángulo menor (que también sea vértice del rectángulo mayor) y que se encuentre en el lado opuesto de donde se encuentra el punto marcado. Recortaremos por esta línea.



4. Una vez que hayamos recortado, desdoblaremos el papel y tendremos el trapecio isósceles.



Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos que un trapecio isósceles es una figura con cuatro lados, dos paralelos y dos iguales. Los ángulos son iguales dos a dos.
2. Simetría de un trapecio isósceles.

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 33: TRAPECIO RECTÁNGULO

1. Construye un trapecio rectángulo con el folio que te han dado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

a. Perpendicularidad
b. Paralelismo

Solución Ficha 33:

Bastará con realizar un único doblez. Elegiremos un punto de uno de los lados (distinto de los vértices y preferiblemente del mayor para ver la figura con mayor claridad) y uno de los vértices del lado opuesto (el más cercano al punto señalado). Doblaremos por la línea que pasa por ambos puntos y recortaremos.

Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos que un trapecio rectángulo tiene dos lados paralelos y un lado perpendicular a ellos.
2. También tiene dos ángulos rectos.

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 34 : TRAPECIO ESCALENO

1. Construye un trapecio escaleno con el folio que te han dado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

a. Inexistencia de perpendicularidad
b. Desigualdad de lados

Solución Ficha 34:

Ahora realizaremos dos dobleces. Elegiremos dos puntos en uno de los lados mayores del folio y que no equidisten de los vértices consecutivos respectivos. Doblaremos desde cada uno de esos puntos hacia el vértice más cercano en el lado opuesto. Recortaremos por estas líneas.

Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos que un trapecio escaleno tiene dos lados paralelos y otros dos desiguales.

Nota: Otra posible tarea sería la construcción del resto de cuadriláteros y su clasificación por uno o varios criterios.

TAREA 10. PENTÁGONO Y HEXÁGONO

CONSTRUCCIÓN DE UN PENTÁGONO REGULAR

Tópicos implicados: Polígonos, transportar distancias.

Nivel Educativo: 3º ESO y 4º ESO

Formato Papel: Libre

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 35: Pentágono Regular

1. Construye un pentágono regular doblando un papel.

2. Explica cómo lo has realizado y por que has seguido estos pasos.

3. Construye un pentágono regular siguiendo los pasos que te indicará el profesor.

Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los siguientes elementos implicados en la construcción:

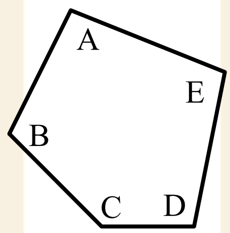
a. Características de un polígono regular (igualdad de lados y ángulos).
b. Mediatriz de un segmento.

c. Simetría axial (que se produce con cada mediatriz y puede comprobarse con elementos como vértices, lados y diagonales):
d. Propiedades especiales del pentágono regular:
   i. Ángulos interiores de un pentágono (108º).
   ii. Cada vértice está sobre la mediatriz del lado opuesto.
   iii. Diversas relaciones de simetría con respecto a esta mediatriz.
   iv. Proporción áurea entre diagonales y lados (véase nota final), semejanza con el pentágono construido mediante las diagonales (pentagrama pitagórico)…

Orientaciones Didácticas:

En primer lugar y según el nivel de los alumnos podría proponerse la construcción de un pentágono cualquiera. En función de la destreza en papiroflexia que se tenga, podría tratarse de construir un pentágono cualquiera en el que los "picos" de papel sobrantes no quedasen sueltos, mediante la construcción de lo que se llaman "bolsillos" (ver en la solución 3 un ejemplo de esta construcción).

Es importante aprovechar didácticamente las construcciones erróneas. Mediante preguntas adecuadas podrá percibirse si los errores están en la construcción o en el propio concepto de pentágono que el alumno tenga. Además, en un pentágono de papel pueden percibirse muchas de las



propiedades que se indicarán más adelante. En una construcción como la siguiente podría preguntarse si, mediante doblado de papel, pueden comprobarse las siguientes tareas:

- Igualdad de los ángulos y lados.
- Intersección de mediatrices y vértices opuestos.
- Simetrías respecto a la mediatriz.

Soluciones Ficha 35:

Nota: Se ofrecen 3 soluciones, cada una de ellas con un aprovechamiento didáctico distinto.

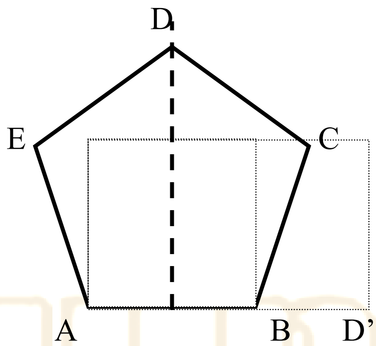
Solución 1. La construcción es sencilla si tenemos en cuenta los siguientes principios (que pueden usarse como pistas para los alumnos):

d. La relación entre lado y diagonal de un pentágono regular es Φ, esto es, el número áureo.
e. Puede construirse el rectángulo 1:Φ (ver tarea 26).
f. Cada vértice del pentágono está sobre la mediatriz del lado opuesto y de una de las diagonales (paralela, lógicamente, a este).
g. Es posible trasladar mediante el doblado de papel, segmentos de igual longitud.

Así, partimos de un segmento AB, en uno de los lados del papel, dejando suficiente espacio para la realización de los dobleces, uno de los lados del papel, construimos un segmento (o rectángulo) de proporciones áureas de nuestro rectángulo áureo. Doblada la mediatriz AB, encontramos el punto D llevando el lado AD’ (véase el gráfico) sobre ésta mediatriz. El vértice C lo construiremos teniendo en cuenta que se encuentra sobre la mediatriz de la diagonal BD y de forma similar puede construirse el vértice E. Los vértices que vamos hallando, podemos marcarlos con lápiz sobre el papel, para facilitar la tarea.

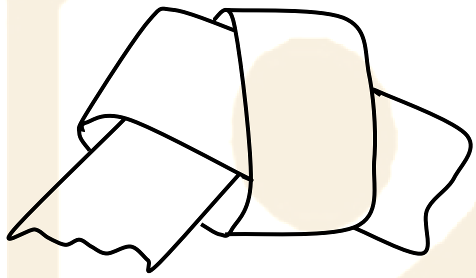
En realidad se trata de trasladar una construcción con regla y compás, basada en las relaciones áureas del pentágono, al doblado de papel, por lo que cualquier otro procedimiento de este tipo servirá del mismo modo.

Esta primera construcción es interesante porque facilita el estudio de las propiedades que citamos más arriba. A continuación veremos otras construcciones que quedan plegadas, si bien, quede claro que la relación no es exhaustiva, pues se cuentan más de 10 construcciones diferentes (de la Peña, 2001)



Solución 2: Anudar una tira de papel:

i. Partimos de una tira alargada, se anuda como muestra la figura:

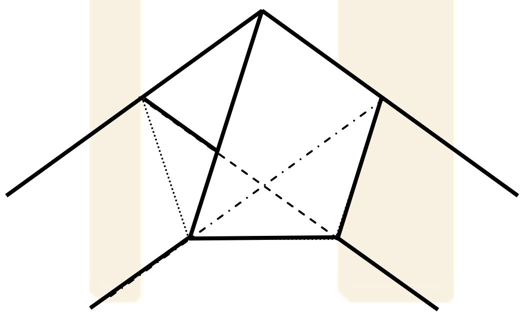


ii. Plegando con cuidado hasta que quede del siguiente modo:

iii. Obtenemos un pentágono regular. Puede consultarse la demostración en la siguiente página web:

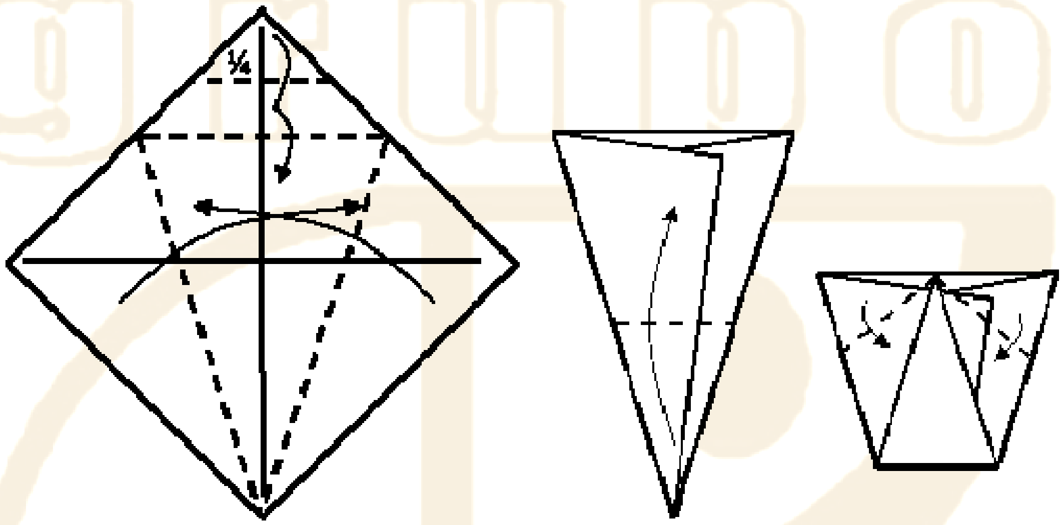
http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/GeometLab/latira.htm

La demostración está basada en la anchura constante de la tira y en la simetría de la construcción.



Solución 3: Para la siguiente solución se dan una serie de pasos detallados para el doblado del pentágono. El efecto final es más vistoso que en los dos anteriores. Los pasos son los siguientes:

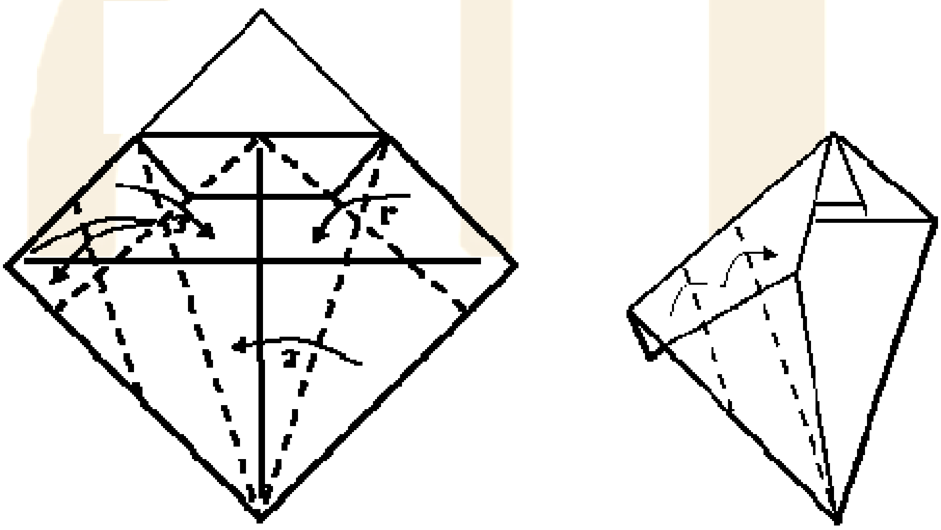
1. Con los dos últimos dobleces, ya tenemos construido el pentágono. A continuación vienen unos pasos cuyo fin es que el pentágono quede “cerrado”, por así decirlo.



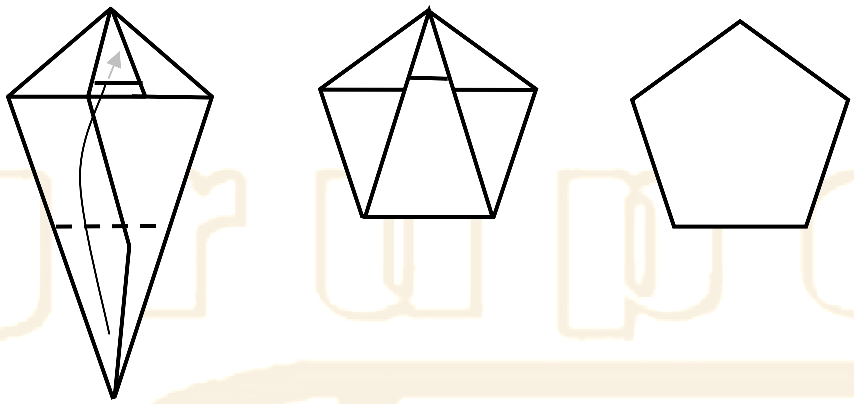
2. Por último, encajamos el saliente en el “bolsillito” y ya tenemos un consistente pentágono.

Pistas para ayudar a los alumnos

1. Los vértices del pentágono se encuentran sobre la mediatriz de cada lado opuesto.



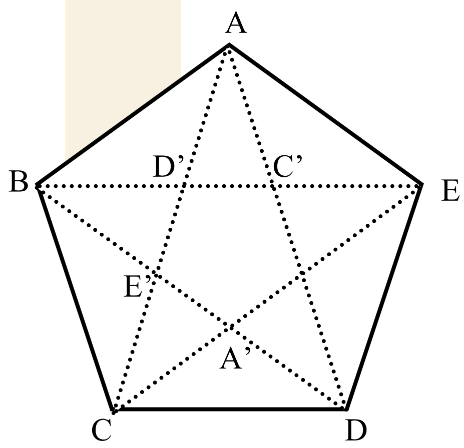
2. Las diagonales y el lado se encuentran en proporción áurea.



Nota: Esta última construcción no es exacta. Puede comprobarse, con trigonometría básica, que los ángulos interiores no son de 108º como corresponde a un pentágono regular (aunque se encuentran muy cerca de este valor). Sin embargo, pueden mostrarse muchas propiedades del pentágono a partir de ella.

Notas:
Decimos que dos segmentos a y b se encuentran en proporción áurea si, a/b = (b-a)/a. Véase ficha nº 29.

Si trazamos las diagonales del pentágono, éstas se cortarán en los puntos A'B'C'D'E', que forman otro pentágono regular.



Observando que el triángulo BCD', por ejemplo, es semejante al triángulo BCE isósceles, y teniendo en cuenta también los varios pares de triángulos congruentes que aparecen en la figura, resulta fácil ver que los puntos A'B'C'D' y E' sobre las diagonales las dividen de *una manera sorprendente. En cada caso, uno de estos puntos, divide a una diagonal en dos segmentos distintos y tales que la razón de la diagonal completa al mayor de los dos segmentos es la misma que la de este al segmento menor. Esta subdivisión de la diagonal es la conocida "sección áurea" de un segmento.*

Algunas cuestiones relativas a la razón áurea y al pentágono, con interesantes interactividades que pueden resultar orientativas para la construcción en papel, pueden observarse en la siguiente página web:
http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Geometria/La_razon_aurea/unidad_didactica.htm

HEXÁGONO REGULAR

Tópicos implicados: Triángulo Equilátero

Nivel Educativo: 1º ESO y 2º ESO

Formato Papel: Folio A-4

Propuesta para el alumno

FICHA Nº 36. HEXÁGONO REGULAR

1. Con un folio construir un hexágono regular.

2. Explica cómo lo has realizado y por que has seguido estos pasos.

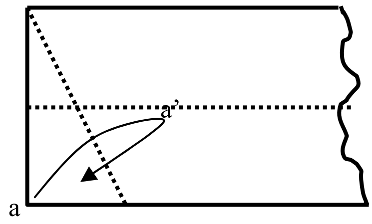
Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los elementos implicados en la construcción de un hexágono regular:

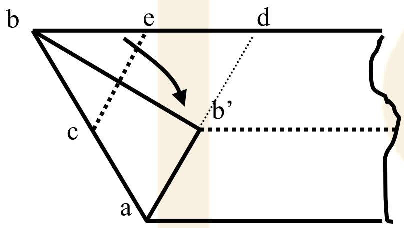
a. Triángulo Equilátero.
b. Hexágono regular está formado por seis triángulos equiláteros.
c. Comparación de Superficies
d. Ejes de simetría
e. Teorema de Thales

Solución Ficha 34:

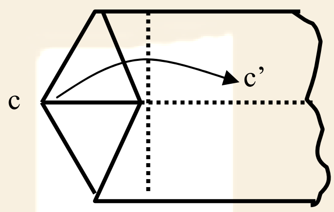
1. Cogemos un folio A4 y trazamos la mediatriz del segmento aa'. De esta manera obtenemos la mitad de un triángulo equilátero es decir un triángulo rectángulo de ángulos 30º-90º-60º.



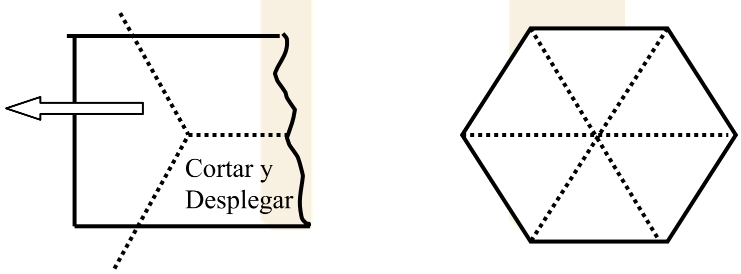
2. Después llevamos el vértice b a b'. De esta manera conseguimos el triángulo equilátero bce cuya repetición nos dará el hexágono. Sabemos que es triángulo equilátero por triángulos semejantes (bda es semejante a bce por teorema de Thales). Además al doblar por el punto medio de bb' conseguimos que bce sea igual a b'ce e igual a cb'a.



3. Después llevamos c en c', de esta manera por simetría construimos el resto de triángulos equiláteros que conformaran el hexágono.



4. Cortamos y desplegamos.



Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos qué un hexágono está formado por seis triángulos equiláteros.
2. Recordamos la construcción de un triángulo equilátero.
3. Semejanza de triángulos y teorema de Thales.

CUADRO RESUMEN

FICHAS	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO
1. CONSTRUCCIÓN DE PUNTOS	X	X		
2. POR DOS PUNTOS PASA UNA ÚNICA RECTA	X	X		
3. TRAZAR LA PERPENDICULAR A UNA RECTA	X	X		
4. CONSTRUCCIÓN DE RECTAS PARALELAS	X	X		
5. SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A UN PUNTO		X		
6. SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A UNA RECTA		X		
7. MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO		X	X	
8. BISECTRIZ DE UN ÁNGULO		X	X	
9. ÁNGULOS DE 90º Y 45º	X	X		
10. ÁNGULOS DE 60º Y 30º.	X	X		
11. TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO	X	X		
12. TRANSPORTADOR DE ÁNGULOS			X	X
13. DIVIDIR UN FOLIO EN PARTES IGUALES		X	X	
14. DEMOSTRACIÓN TEOREMA DE PITÁGORAS		X	X	
15. CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA		X		
16. TRIÁNGULO EQUILATERO		X		
17. SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO		X		
18. EL CIRCUNCENTRO DE UN TRIÁNGULO			X	X
19. EL BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO		X	X	
20. EL INCENTRO DE UN TRIÁNGULO		X	X	
21. CUADRADO	X			
22. CUADRADO A PARTIR DE UN CUADRADO	X			
23. CUADRADO SOBRE UN SEGMENTO	X	X		
24. CUADRADO DE ÁREA MITAD DE OTRO		X	X	
25. RECTÁNGULO 1:2	X	X		
26. RECTÁNGULO 1:3	X	X		
27. RECTÁNGULO 1: $\sqrt{2}$		X	X	
28. RECTÁNGULO 1: $\sqrt{3}$		X	X	
29. RECTÁNGULO AÚREO (1:Φ)			X	X
30. ROMBO A PARTIR DE UN CUADRADO	X	X		
31. ROMBO A PARTIR DE UN RECTÁNGULO	X	X		
32. TRAPECIO ISOSCELES	X	X		
33. TRAPECIO RECTÁNGULO	X	X		
34. TRAPECIO ESCALENO	X	X		
35. PENTÁGONO REGULAR			X	X
36. HEXÁGONO REGULAR	X	X		

Nota: La relación entre cursos y fichas es tan sólo orientativa del nivel más bajo en el cual se pueden aplicar las diferentes tareas.

EPÍLOGO

EPÍLOGO

Para concluir este trabajo queremos compartir unas reflexiones finales con el lector. El restringirnos a la Geometría Plana no implica que sea la única rama de la Geometría que pueda ser desarrollada mediante la papiroflexia. Como grupo de investigación en Didáctica de la Matemática, en la actualidad nos encontramos además trabajando en cuestiones relativas a la Geometría en el Espacio para que el profesor encuentre en la papiroflexia una herramienta útil para trabajar las matemáticas presentes en el currículo, no limitándose únicamente a la construcción de llamativas figuras.

Hemos considerado adecuado plantear estas tareas a alumnos de Enseñanza Secundaria, por ser este nivel educativo al que corresponden los conceptos y razonamientos implicados. Algunos de estos alumnos se encontrarán por primera vez con esos conceptos y el trabajo con papel les permitirá tener una idea intuitiva de los mismos. Sin embargo, las tareas planteadas pueden y deben ser trabajadas por estudiantes de una amplia gama de niveles educativos. Se dará la circunstancia de estudiantes que, conociendo los conceptos implicados, podrán centrarse en razonar y justificar los pasos que se siguen en el proceso de construcción.

En la mayoría de las tareas hemos expuesto una solución, aquélla que hemos considerado más clara y pensamos que requiere conocimientos matemáticos más básicos, pretendiendo que puedan ser de utilidad para el mayor número de estudiantes posible. Sin embargo, estas soluciones no son únicas y dejamos como “tarea pendiente” para el lector el encontrar otras soluciones alternativas, que pueden resultar tan didácticas como las que hemos presentado.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

CORIAT, M. (1997) *Materiales, recursos y actividades: un panorama.* En L. Rico (Ed.), La educación matemática en la Enseñanza Secundaria (pp. 155-177). Barcelona: Horsori.

DE LA PEÑA, J. (2001) *Matemáticas y Papiroflexia.* Madrid: Asociación Española de Papiroflexia

ENGEL, P. (1994) *Origami From Angelfish to Zen.* Dover

GRUPO PI (2002) Materiales Didácticos en la resolución de problemas. En J.M. Cardeñoso, E. Castro, A. J. Moreno, M. Peñas (Ed.) *Investigación en el aula de Matemáticas. Resolución de problemas.* Granada: SAEM Thales

GRUPO PI (2003a) *Geometría con papel*. Comunicación presentada a las XI Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, realizadas 2,3,4 y5 de julio en Canarias.

GRUPO PI (2003b) *Poliedros: lenguaje y representación espacial.* Comunicación presentada a las XI Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, realizadas 2,3,4 y5 de julio en Canarias.

GRUPO PI (2003c) *Algunas reflexiones sobre la resolución del problema del tablero de ajedrez.* Comunicación presentada a las XI Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, realizadas 2,3,4 y5 de julio en Canarias.

MORA, J.A. (1995). Los recursos didácticos en el aprendizaje de la geometría. UNO nº 3. 101-115.

ROYO, J. I. (2003) Matemáticas y papiroflexia SIGMA, nº 21

SEGOVIA, I. y RICO, L. (2001) *Unidades didácticas. Organizadores.* En E. Castro (Ed.), Didáctica de la matemática en la educación primaria (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Páginas Webs:

http://ddm.ugr.es/grupo_pi

http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/GeometLab/latira.htm

http://www.uaq.mx/matematicas/origami/taller1.html

http://web.merrimack.edu/hullt/geoconst.html

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Geometria/La_razon_aurea/unidad_didactica.htm

www.pajarita.org

www.cientec.or.cr/matematica/origami/transportador.html

(Fecha de consulta: 24-07-03)

ANEXOS

FICHA Nº 1: CONSTRUCCIÓN DE PUNTOS

1. Construye un punto doblando papel y pégalo en el recuadro.

2. Explica cómo lo has conseguido.

3. ¿Puedes hacerlo con cualquier tipo de dobleces (rectas)?

FICHA Nº 2: POR DOS PUNTOS PASA UNA ÚNICA RECTA

1. Construye la recta que pasa por los puntos dados A y B.

2. Señala el segmento AB.

3. Indica qué semirrectas puedes señalar en esta recta con esos dos puntos.

FICHA Nº 3: TRAZAR LA PERPENDICULAR A UNA RECTA

1. Construye dos rectas perpendiculares en un trozo de papel irregular.

2. Señala un punto en el papel, que no pertenezca a la recta y traza una recta perpendicular a la primera recta que pase por ese punto. Explica cómo lo has realizado.

FICHA Nº 4. CONSTRUCCIÓN DE RECTAS PARALELAS.

1. Construye en el folio dos rectas paralelas y explica como lo has hecho.

2. Señala un punto y a partir de una recta construye otra que sea paralela y pase por el punto marcado. Explica lo que has hecho.

FICHA Nº 5: SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A UN PUNTO

1. Calcula el simétrico de un punto respecto de otro punto. Explica cómo lo has hecho.

FICHA Nº 6: SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A UNA RECTA

1. Calcula el simétrico de un punto respecto de una recta. Explica como lo has hecho.

FICHA Nº 7: LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

1. Construye en un folio dos puntos

2. Encuentra la mediatriz del segmento que une a los dos puntos construidos en 1.

3. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 8: LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

1. Construye en un folio un ángulo cualquiera.

2. Explica cómo lo has realizado.

3. Encuentra la bisectriz del ángulo construido en 1.

4. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 9: ÁNGULOS DE 90º Y 45º.

1. Te damos un folio, ¿cuánto miden sus ángulos? ¿Por qué lo sabemos? ¿Cómo convencerías a otra persona que esos ángulos son de 90º?

2. Construye con un folio A4 un ángulo de 45º.

3. Explica cómo lo has realizado y por que has seguido estos pasos.

4. Construye con una hoja de papel irregular los siguientes ángulos: 90º y 45º.

5. Explica cómo lo has realizado y qué has utilizado de la actividad 2 para realizarlo.

FICHA Nº 10: ÁNGULOS de 60º y 30º

1. Te damos un folio A4, y por tanto todos los ángulos son de 90º. Construye un ángulo de 60º.

2. Explica cómo lo has realizado y por que has seguido estos pasos.

3. Construye ahora un ángulo de 30º.

4. Explica cómo lo has realizado y qué has utilizado de la actividad 1 para realizarlo.

FICHA Nº 11: TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO

1. Te damos una hoja cuadrada y por tanto todos los ángulos son de 90º. Construye un ángulo cualquiera.

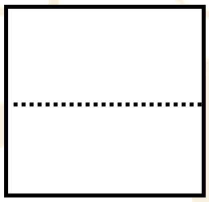
2. Explica cómo lo has realizado y por que has seguido estos pasos.

3. Divide ahora ese ángulo en tres ángulos iguales. ¿Puedes hacerlo con cualquier ángulo?

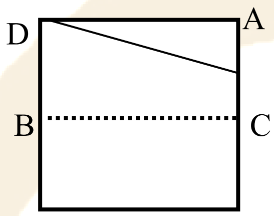
4. Explica cómo lo has realizado y qué has utilizado de las fichas anteriores para realizarlo.

FICHA Nº 12: TRANSPORTADOR DE ÁNGULOS[6]

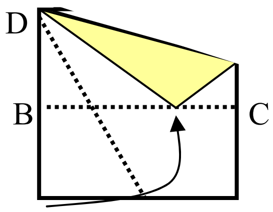
1. Sigue las siguientes instrucciones para construir un transportador de ángulos.
    a. Coge una hoja de papel cuadrada. Dobla el papel por la mitad y desdóblelo nuevamente. ¿Cuál es la razón entre el largo y el ancho de cada rectángulo que se forma y el cuadrado completo?



    b. Doble la esquina superior derecha para debajo de tal manera que el vértice A caiga sobre el segmento BC. Asegurese que de que el doblez pasa por el vértice D. ¿Qué clase de triángulo acabas de construir?

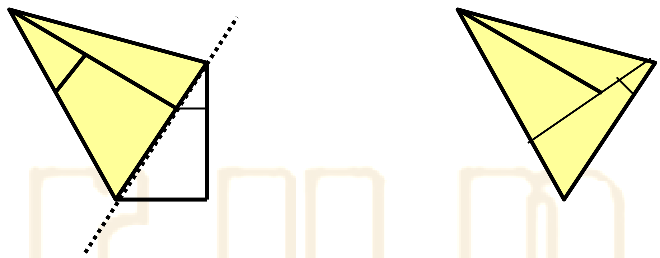


    c. Doble la esquina izquierda inferior hacia arriba hasta que se una con la esquina derecha del cuadrado. ¿Qué clase de triángulo has formado?



[6] La siguiente tarea ha sido extraída de la siguiente página web de la Fundación CIENTEC. La hemos incluido a pesar de no ser nuestra porque nos permite comprobar los ángulos de algunas construcciones posteriores.

d. Dobla la base del triángulo tal como se muestra en la figura.¿Qué tienen en común todos los triángulos del dibujo superior?



2. Desdobla tu herramienta de medición angular y encuentra la medida de cada uno de los ángulos formados por los dobleces. Escribe los ángulos sobre los triángulos correspondientes en tu herramienta y guárdalo para utilizarlo como referencia.

FICHA Nº 13: DIVISIÓN DE UN FOLIO EN PARTES IGUALES

1. Divide un folio en 2 partes iguales.
2. Divídelo ahora en 4 partes iguales.

3. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

4. ¿Sabrías dividirlo en 8 partes iguales? Razona tu respuesta.

5. ¿Puedes dividir ahora el folio en 7 partes del mismo tamaño?

6. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 14: DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

1. Con un folio A4 intenta realizar una demostración del Teorema de Pitágoras.

2. Explica cómo lo has realizado y por que has seguido estos pasos.

FICHA 15: CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA

1. Construye un triángulo.

2. ¿Qué tipo de triángulo es? ¿Cómo lo has construido?

3. Comprueba que el área de ese triángulo es $\frac{bxh}{2}$, donde b es la base del triángulo y h la altura.

4. Construye los otros tipos de triángulos que existen.

FICHA 16: TRIÁNGULO EQUILÁTERO

1. Construye con un folio un triángulo equilátero.

2. Explica cómo lo has hecho y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 17: SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

1.¿Cuánto suman las medidas de los ángulos de un triangulo? Compruébalo (o averígualo) utilizando un triángulo de papel.

Explica como lo has hecho.

FICHA Nº 18: EL CIRCUNCENTRO DE UN TRIÁNGULO

1. Construye un triángulo acutángulo.

2. Traza las mediatrices a cada uno de los lados del triángulo.

3. ¿Qué pasa con las mediatrices? ¿Dónde se cortan con respecto al triángulo?.

4. A este punto de corte se le denomina circuncentro. Comprueba que este punto es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

5. Realiza los pasos del 1 al 4 para un triángulo rectángulo y un obtusángulo. ¿Qué ocurre ahora con el punto de corte?

FICHA Nº 19: EL BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO

1. Construye un triángulo acutángulo.

2. Halla el baricentro (o centro de gravedad) del triángulo.

3. Explica como lo has realizado y porque has seguido esos pasos.

4. Realiza los pasos del 1 al 4 para un triángulo rectángulo y un obtusángulo. ¿Por qué ahora el baricentro queda siempre dentro del triángulo?

FICHA Nº 20: EL INCENTRO DE UN TRIÁNGULO

1. Construye un triángulo acutángulo.

2. Encuentra las bisectrices de cada uno de los ángulos del triángulo.

3. El punto de corte se le denomina incentro, comprueba que en este punto podemos dibujar una circunferencia interior a el triángulo y que es tangente a los tres lados del triángulo.

FICHA Nº 21: CUADRADO

1. Construye con el papel que te han dado un cuadrado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 22: CUADRADO A PARTIR DE UN CUADRADO

1. Construye un nuevo cuadrado a partir del que te han dado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 23: CUADRADO SOBRE UN SEGMENTO

1. Construye un cuadrado utilizando como lado el segmento que aparece en el folio que te han dado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 24: CUADRADO DE ÁREA MITAD DE OTRO

1. Construye un cuadrado de área la mitad del que te han dado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 25: RECTÁNGULO 1:2

1. Construye con el papel que te han dado un rectángulo de dimensiones 1:2.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 26: RECTÁNGULO 1:3

1. Construye con el papel que te han dado un rectángulo de dimensiones 1:3.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

3. ¿Se te ocurre alguna estrategia a seguir para conseguir un rectángulo 1:4? ¿Y un rectángulo 1:5?

FICHA Nº 27: RECTÁNGULO 1: $\sqrt{2}$

1. Construye con un folio un rectángulo de dimensiones 1: $\sqrt{2}$.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 28: RECTÁNGULO 1: $\sqrt{\mathbf{3}}$

1. Construye con un folio un rectángulo de dimensiones 1: $\sqrt{\mathbf{3}}$.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 29: RECTÁNGULO ÁUREO (1: ϕ)

1. Construye con un folio un rectángulo de dimensiones 1: ϕ.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 30: ROMBO A PARTIR DE UN CUADRADO

1. Construye un rombo a partir de un papel cuadrado

2.Explica como lo has hecho.

FICHA Nº 31: ROMBO A PARTIR DE UN RECTÁNGULO

1. Construye un rombo con el folio que te han dado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 32: TRAPECIO ISÓSCELES

1. Construye un trapecio isósceles con el folio que te han dado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 33: TRAPECIO RECTÁNGULO

1. Construye un trapecio rectángulo con el folio que te han dado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 34 : TRAPECIO ESCALENO

1. Construye un trapecio escaleno con el folio que te han dado.

2. Explica cómo lo has realizado y por qué has seguido esos pasos.

FICHA Nº 35: Pentágono Regular

1. Construye un pentágono regular doblando un papel.

2. Explica cómo lo has realizado y por que has seguido estos pasos.

3. Construye un pentágono regular siguiendo los pasos que te indicará el profesor.

FICHA Nº 36. HEXÁGONO REGULAR

1. Con un folio construir un hexágono regular.

2. Explica cómo lo has realizado y por que has seguido estos pasos.

grupo