UNA RELACIÓN MATRICIAL ENTRE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS Y LOS COEFICIENTES DE $S_m(n-1)$

Hurtado Benavides, Miguel Ángel
mhurtado2009@hotmail.com
Gimnasio La Khumbre (Colombia)

RESUMEN

Los números combinatorios y las fórmulas para $S_m(n-1)$ son objetos utilizados entre otras cosas, como técnicas de conteo, por lo tanto, la conexión entre estas dos herramientas es significativa. En este comunicado se expone una relación matricial entre estos dos objetos, la cual se describe como sigue: la matriz triangular que tiene como entradas los números que forman el triángulo de Pascal, después de retirar los unos, es inversa a la matriz triangular que tienen como entradas los coeficientes de las potencias de n mayores a 1 de las fórmulas para $S_m(n-1)$. Este resultado se demuestra a partir del sistema de ecuaciones que definen los números de Bernoulli, y un nuevo método, mediante el cálculo, para obtener las fórmulas de $S_m(n-1)$.

PALABRAS CLAVE

Números combinatorios, Matriz de Pascal, Números de Bernoulli, $S_m(n-1)$

INTRODUCCIÓN

Sarmiento y Fernández (2014) exponen que las técnicas de conteo son reglas que permiten contar de manera abreviada la cantidad de configuraciones de elementos (bajo ciertas condiciones) de un conjunto dado. Dos de estas técnicas son:

- Los números de la forma:

$$C_n^m = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Con *m* y *n* enteros positivos, con los cuales se forma el triángulo de Pascal y se les denomina, números combinatorios.

- La suma de la forma:

$$S_m(n-1) = 0^m + 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (n-1)^m$$

Con *m* entero positivo, es llamada la suma de las m-ésimas potencias de los primeros *n* enteros positivos.

En Hurtado (2015) se encuentra un nuevo método para obtener las fórmulas de estas sumas, el cual, en resumidas palabras consiste en:

PROCEDIMIENTO, MEDIANTE EL CÁLCULO, PARA OBTENER LAS FÓRMULAS DE $S_m(n-1)$

La fórmula para la suma $S_m(n-1)$ tiene la forma:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{i}^{\mathrm{m}} = \mathrm{k}_{m+1}\mathrm{n}^{\mathrm{m}+1} + +1\mathrm{k}_4\mathrm{n}^4 + \mathrm{k}_3\mathrm{n}^3 + \mathrm{k}_2\mathrm{n}^2 + \mathrm{k}_1\mathrm{n}$$

Donde k_j con $j = 1,2,3, \dots, (m+1)$ son números racionales.

Entonces, para obtener las fórmulas de $\mathrm{S}_{\mathrm{m}+1}(\mathrm{n}-1)$, al lado de la sumatoria se integra con respecto a i la potencia i^m donde la constante c de integración es 0, y al lado de la fórmula, se integra con respecto a *n* las potencias n^k con $k = 1, 2, 3, \dots, (m+1)$ donde la constante de integración es $b_k = -\frac{n}{k+1}$. Por ejemplo, las primeras fórmulas están dadas así:
Sea la fórmula trivial

$$\sum_{i=0}^{n-1} 1 = n$$

Integrando se obtiene la fórmula para $\mathrm{S}_1(\mathrm{n}-1)$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{i} = \frac{\mathrm{n}^2}{2} - \frac{\mathrm{n}}{2}$$

Multiplicando por 2 e integrando, se obtiene:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{i}^2 = \frac{\mathrm{n}^3}{3} - \frac{\mathrm{n}^2}{2} - \left(\frac{n}{3} - \frac{n}{2}\right)$$

Reduciendo términos semejantes se llega a la fórmula para $\mathrm{S}_2(\mathrm{n}-1)$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{i}^2 = \frac{\mathrm{n}^3}{3} - \frac{\mathrm{n}^2}{2} + \frac{\mathrm{n}}{6}$$

Multiplicando por 3 e integrando, se obtiene:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{i}^3 = \frac{\mathrm{n}^4}{4} - \frac{\mathrm{n}^3}{2} + \frac{\mathrm{n}^2}{4} - \left(\frac{n}{4} - \frac{n}{2} + \frac{n}{4}\right)$$

Reduciendo términos semejantes se obtiene la fórmula para $\mathrm{S}_3(\mathrm{n}-1)$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{i}^3 = \frac{\mathrm{n}^4}{4} - \frac{\mathrm{n}^3}{2} + \frac{\mathrm{n}^2}{4}$$

$$\vdots$$

Por la naturaleza de este procedimiento, obsérvese que los coeficientes del término *n* de cada fórmula, está dado por la suma de los coeficientes de las potencias de *n* mayores a 1, es decir,

$$\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}-1} \mathrm{i}^{\mathrm{m}} = \mathrm{k}_{\mathrm{m}+1}\mathrm{n}^{\mathrm{m}+1} + \dots + \mathrm{k}_4\mathrm{n}^4 + \mathrm{k}_3\mathrm{n}^3 + \mathrm{k}_2\mathrm{n}^2 - (\mathrm{k}_{\mathrm{m}+1} + \dots + \mathrm{k}_4 + \mathrm{k}_3 + \mathrm{k}_2)\mathrm{n}$$

Los números combinatorios y $S_m(n-1)$ están relacionados no sólo como técnicas de conteo, sino también de forma matricial, sustentado en lo anterior, el objetivo de esta comunicación es exponer dicha relación.

MARCO DE REFERENCIA

En este escrito se utiliza la matriz tipo Pascal, la cual tiene en sus entradas precisamente números del triángulo de Pascal. Según Aceto y Trigiante (2001) la Matriz de Pascal ha sido conocida desde la antigüedad en los textos matemáticos chinos que datan de 1303; sin embargo, se ha estudiado cuidadosamente sólo recientemente en: Probabilidad, Análisis Numérico, Combinatoria y se relaciona con otras matrices asociadas con grandes nombres como Vandermonde, Frobenius y Stirling.

En particular en Ma y Yang (2010) se encuentra una conexión matricial entre $S_m(n)$ y los números del triángulo de Pascal; y en Ernst (2008) se utiliza la matriz triangular de Pascal, retirando los unos, para obtener los números de Bernoulli mediante la regla de Cramer.

Cabe aclarar que la conexión expuesta por Ma y Yang (2010) es diferente a la que se expone en este escrito. Y a pesar de que Ernst (2008) maneja la misma matriz de Pascal que se utiliza en este documento, no realiza la inversa de esta. Sin embargo, las exposiciones de estos autores son la antesala de la propuesta presentada aquí.

Otro objeto que se menciona en este escrito son los números de Bernoulli, de los cuales en Fernández (2008) se encuentra una definición de estos mediante sistema de ecuaciones lineales.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

DEFINICIÓN

Los números de Bernoulli (donde el m-ésimo número de Bernoulli se denota B_m) se obtienen mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
-1 &= 2B_1 \\
-1 &= 3B_1 + 3B_2 \\
-1 &= 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 \\
&\vdots \\
-1 &= \binom{m+1}{1}B_1 + \binom{m+1}{2}B_2 + \binom{m+1}{3}B_3 + \cdots + \binom{m+1}{m}B_m
\end{aligned}
$$

$con\ m \geq 1, B_0 = 1$

Por comodidad, el anterior sistema de ecuaciones se puede representar de forma matricial así: $P_{m_0}B = -1$ con $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}, -1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, P_{m_0}$ es la matriz triangular cuyas entradas son los números que forman el triángulo de Pascal retirando los unos.

Desde el Álgebra Lineal la solución del anterior sistema es $P_{m_0}^{-1} \cdot -1 = \mathrm{B}$.

En Hurtado (2013) se propone y se demuestra que la matriz triangular $P_{m_0}^{-1}$ tiene como entradas los coeficientes de las potencias de *n* mayores a 1 de las fórmulas para $\mathrm{S_m(n-1)}$, y que el coeficiente de *n* está dado por la suma de los coeficientes de la fila *m* de la misma matriz.

DESARROLLO

Es fácil obtener las primeras filas de la matriz $P_{m_0}^{-1}$, y por lo tanto la igualdad $P_{m_0}^{-1} \cdot -1 = \mathrm{B}$ tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ \frac{(-1)^{1+j}|M_{1j}|}{(m+1)!} & \frac{(-1)^{2+m}|M_{2j}|}{(m+1)!} & \frac{(-1)^{3+m}|M_{3j}|}{(m+1)!} & \cdots & \frac{|M_{jj}|}{(m+1)!} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

De donde, igualando los elementos correspondientes de las matrices se tiene que:

$$B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}, B_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$$

Y para la fila *j* se tiene:

$$-B_{\mathrm{j}} = \frac{|\mathrm{M_{jj}}|}{(\mathrm{m}+1)!} + \cdots + \frac{(-1)^{3+\mathrm{j}}|\mathrm{M_{3j}}|}{(\mathrm{m}+1)!} + \frac{(-1)^{2+\mathrm{j}}|\mathrm{M_{2j}}|}{(\mathrm{m}+1)!} + \frac{(-1)^{1+\mathrm{j}}|\mathrm{M_{1j}}|}{(\mathrm{m}+1)!}$$

Donde $(-1)^{\mathrm{i+j}}|\mathrm{M_{ij}}|$ con $\mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{m}$ es el cofactor de la fila *i* y la columna *j* de la matriz P_{m_0}. Obsérvese que las entradas de las tres primeras filas son precisamente los coeficientes de las potencias de *n* mayores a 1 de las fórmulas para $\mathrm{S_1(n-1)}, \mathrm{S_2(n-1)}\ y\ \mathrm{S_3(n-1)}$ correspondientemente.

En Fernández (2008) se demuestra que el coeficiente del último término de la fórmula para $\mathrm{S_m(n-1)}$ es el m-ésimo número de Bernoulli, es decir:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{i}^{\mathrm{m}} = \mathrm{k}_{m+1}\mathrm{n}^{\mathrm{m}+1} + +1\mathrm{k}_4\mathrm{n}^4 + \mathrm{k}_3\mathrm{n}^3 + \mathrm{k}_2\mathrm{n}^2 + \mathrm{B}_{\mathrm{m}}\mathrm{n}\ (1)$$

De todo lo anterior se deduce el siguiente teorema, que es el objetivo de este comunicado.

TEOREMA DE LA RELACIÓN ENTRE P_{m_0} y $P_{m_0}^{-1}$

La matriz triangular que tiene como entradas los números del triángulo de Pascal excepto los unos, es inversa a la matriz triangular que tiene como entradas los coeficientes de las potencias de n mayores que uno de las fórmulas para $\mathrm{S_m}(\mathrm{n}-1)$, esto es:

$$P_{m_0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 6 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m+1}{1} & \binom{m+1}{2} & \binom{m+1}{3} & \cdots & \binom{m+1}{m} \end{pmatrix} \quad P_{m_0}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_2 & K_3 & K_4 & \cdots & K_{m+1} \end{pmatrix}$$

Demostración: Sea la matriz triangular M cuyas entradas son los coeficientes de las potencias mayores a 1 de las fórmulas para $\mathrm{S_m}(\mathrm{n}-1)$:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_2 & K_3 & K_4 & \cdots & K_{m+1} \end{pmatrix}$$

Por el método para obtener las fórmulas de $\mathrm{S_m}(\mathrm{n}-1)$ (expuesto en la introducción), y por la fórmula (1) se tiene que la suma de las entradas de la fila *m* de la matriz *M*, es el m-ésimo número de Bernoulli, es decir:

$$-(\mathrm{k}_{\mathrm{m}+1} + \cdots + \mathrm{k}_4 + \mathrm{k}_3 + \mathrm{k}_2) = \mathrm{B}_{\mathrm{m}}$$

De donde se obtiene el arreglo matricial: $M \cdot -1 = \mathrm{B}$

Y por el sistema de ecuaciones que definen los mismos números, este arreglo se puede ver como sigue:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_2 & K_3 & K_4 & \cdots & K_{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2B_1 \\ 3B_1 + 3B_2 \\ 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 \\ \vdots \\ \binom{m+1}{1}B_1 + \binom{m+1}{2}B_2 + \binom{m+1}{3}B_3 + \cdots + \binom{m+1}{m}B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}$$

Lo cual se puede escribir de la forma $MP_{m_0}\mathrm{B} = \mathrm{B}$, de donde se debe cumplir que $MP_{m_0} = I$, y como la inversa de una matriz es única, entonces $P_{m_0}^{-1} = M$.

ALGUNAS APLICACIONES DE LA RELACIÓN ENTRE P_{m_0} y $P_{m_0}^{-1}$

Ya se ha visto en este documento que mediante la matriz triangular P_{m_0}, la cual contiene en sus entradas números combinatorios, se obtiene la matriz $P_{m_0}^{-1}$, y que esta a su vez, al sumar las entradas de la fila m, da como resultado el m-ésimo número de Bernoulli, con lo que se tiene un método cerrado para obtener las fórmulas de $\mathrm{S_m}(\mathrm{n}-1)$

Según MEN (2006), entre los procesos matemáticos está la ejercitación de procedimientos, ya que es una herramienta eficaz para adquirir destrezas en la ejecución de algunas tareas matemáticas. Por lo anterior resulta conveniente utilizar el método matricial para obtener las sumas S_m (n-1), lo que resulta ser una alternativa para solucionar algunas situaciones de conteo, como:

1. Situación: ¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez?

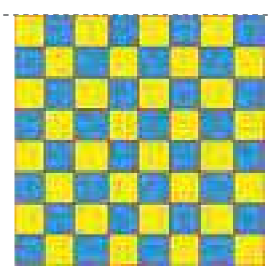

Figura 1. Tablero de ajedrez
Fuente: Elaboración propia con Isofácil

2. Situación: ¿Cuántos cubos de lado 1 unidad, hay en un cubo de arista 3 cubos?

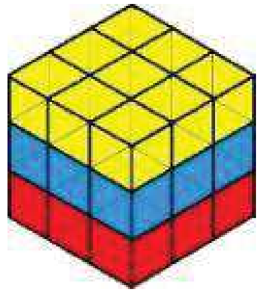

Figura 2. Cubo de 27 cubos de lado 1.
Fuente: Elaboración propia con Isofácil

3. Situación: ¿Cuántos cubos (de igual tamaño) se requieren para construir una pirámide de n niveles si cada nivel tiene 1, 4, 9,…, n^2 cubos?

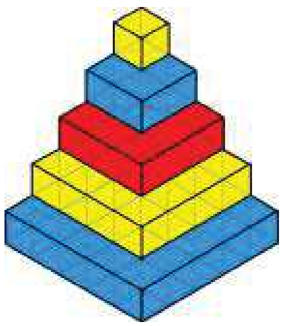

Figura 3. Pirámide de 5 niveles cuadrados.
Fuente: Elaboración propia con Isofácil

4. Situación: ¿Cuántos cubos (de igual tamaño) se requieren para construir un gnomon tridimensional de *n* niveles, donde cada nivel tiene un color diferente?

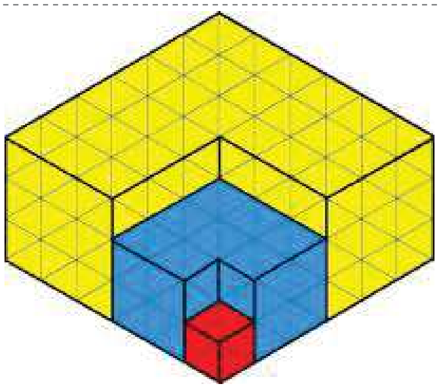

Figura 4. Gnomon tridimensional.
Fuente: Elaboración propia con Isofácil

Conclusiones

En esta comunicación se evidenció una relación entre los números combinatorios y los coeficientes de $S_m(n-1)$ a partir del sistema de ecuaciones lineales que definen los números de Bernoulli, un nuevo método mediante el cálculo para obtener las fórmulas de $S_m(n-1)$ y elementos básicos del álgebra lineal, con lo que resulta un método cerrado para obtener las fórmulas de $S_m(n-1)$, lo cual es una alternativa para solucionar algunas situaciones de conteo.

Referencias

Aceto, L. & Trigiante, D. (2001). The Matrices of Pascal and Others Greats. *The American Mathematical Monthly, 108*(3), 232-245.

Ernst, T. (2008). *q-Pascal and q-Bernoulli matrices, an umbral approach.* (SE-751 06). Recuperado del sitio de internet del Department of Mathematics, Uppsala University http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.148.9785&rep=rep1&type=pdf

Fernández, D. (2008). *Números de Bernoulli: Un estudio sobre su importancia, consecuencias y algunas aplicaciones en la Teoría de Números.* (Tesis de pregrado) Escuela Superior de Física y Matemáticas. Mexico D. F.

Hurtado, M. A. (2013). *Observaciones sobre la suma de las m-ésimas potencias de los primeros n esteros positivos y algunos otros resultados relacionados*. (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Hurtado, M. A. (2015). *Una representación geométrica de* S_n^m. En Perry, P. (Ed.), *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*. (pp. 199-200). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Ma, C.-Y., & Yang, S.-L. (2010). Pascal Type Matrices and Bernoulli Numbers. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, *58*(3), 249-254.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia.

Sarmiento, B. & Fernández, F. (2014). Combinatoria en la Escuela. En Andrade, L. (Ed.), *Memorias del **I** Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 140-146). Bogotá, Colombia: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.