

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD PARA RESOLVER PROBLEMAS

Sanabria Brenes, Giovanni
gsanabria@itcr.ac.cr

Instituto Tecnológico de Costa Rica – Universidad de Costa Rica (Costa Rica)

Álvarez Alfonso, Ingrith
ialvarez@pedagogica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional (Colombia)

RESUMEN

El presente taller pretende hacer evidente cómo los participantes hacen uso de sus conocimientos sobre Estadística y Probabilidad para proponer soluciones a determinadas situaciones problema. Más allá de los resultados, las soluciones, se espera que las estrategias y la solución total o parcial de las situaciones generen discusión sobre la aplicación de los conceptos estocásticos involucrados. Además se espera que los participantes hagan uso de esta experiencia para generar y proponer situaciones de esta naturaleza en las aulas de clase de la Educación Secundaria, promoviendo una cultura estadística.

PALABRAS CLAVE

Probabilidad, Estadística, Situaciones problema, Heurísticas

INTRODUCCIÓN

Actualmente no se discute el lugar privilegiado que tiene la resolución problemas en la enseñanza de la matemática. Polya (1965) introduce la necesidad de educar nuestra intuición con el fin de desarrollar heurísticas para resolver problemas. Schoenfeld (1985) realiza investigaciones que lo llevan a determinar que las heurísticas planteadas por Polya no son suficientes para tener éxito en la resolución de problemas, por lo que propone agregar tres dimensiones más: recursos (conocimientos previos), control (habilidad para monitorear y evaluar el proceso de resolución del problema) y el sistema de creencias (creencias sobre lo que es conocer y hacer matemática). Por ello, el taller pretende que los participantes:

- Apliquen sus conocimientos en la solución de problemas de tal forma que se logre evidenciar y tomar conciencia de cuáles son los supuestos con los que son enfrentados.
- Analicen situaciones en términos de los conceptos necesarios para la solución de las mismas y en caso de ser necesario amplíen su espectro conceptual en pro de contar con herramientas para su abordaje.

- Formulen a largo plazo, aproximaciones a situaciones a-didácticas para promover la enseñanza de la estadística y la probabilidad en la educación secundaria.

MARCO DE REFERENCIA

De manera cercana a la propuesta de enseñanza a través de la solución de problemas, la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986), señala que el aprendizaje se evidencia cuando en un medio a-didáctico, el estudiante es capaz de aplicar su conocimiento para resolver problemas (situación a-didáctica). Por ello, el profesor debe diseñar situaciones cuya solución se aproxime al conocimiento que se quiere enseñar o formalizar, lo que conlleva a formular situaciones a-didácticas con fines didácticos, para que el estudiante a través de sus conocimientos intente resolverlas de tal forma que la propuesta de solución o soluciones permitan construir un conocimiento (ligado al problema resuelto) que debe ser retomado por el docente quien ha de generar estrategias para relacionarlo con el saber formal pretendido, un acercamiento al saber sabio.

Lo anterior es aplicable a la enseñanza-aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística, ámbito en donde sobresalen, entre otras, propuestas de los investigadores de la Universidad de Granada (España), quienes se han referido a la enseñanza por proyectos (Batanero, 2001) mediante la cual se busca que el estudiante al enfrentarse a situaciones problemas, realice un proceso investigativo simulando la labor del estadístico (identificación y comprensión del problema, formulación de un plan, recolección, organización y análisis de los datos -aplicación de herramientas estocásticas-) en pro de dar respuesta a la situación.

Esta propuesta de enseñanza orienta la metodología que ha de seguir el taller, pues se formulan situaciones problemas las cuales los participantes deben abordar y desde sus conocimientos proponer estrategias de solución, implementarlas y compartir con el grupo la solución y el camino seguido para llegar a ella, de tal forma que se puedan contrastar las heurísticas y a partir de ello propiciar un acercamiento a la formulación (o re-formulación) del conocimiento disciplinar requerido para abordar el problema, es decir, se espera un acercamiento al conocimiento formal a partir del conocimiento intuitivo utilizado.

Por otro lado, en los últimos años la estocástica ha pasado a ser parte esencial de la formación de los futuros ciudadanos. De acuerdo con Zapata (2011), una persona culta en Estadística es aquella que tiene las habilidades necesarias para entender, organizar y evaluar la información que la sociedad le brinda.

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

A lo largo de las dos sesiones se han de proponer y desarrollar seis situaciones problemas, algunas de ellas serán tratadas inicialmente de manera individual para luego compartir con los demás asistentes las estrategias y los resultados, finalizando con la intervención del ponente para realizar un acercamiento al conocimiento formal. Otra estrategia de interacción es el trabajo en pequeños grupos donde han de discutir para determinar estrategias que les han de llevar a una solución lo más próxima a la realidad. Así, se ha de pasar por situaciones al parecer “tradicionales” como el conteo de las palabras de un libro,

y otras fuera de lo “común” como el hecho de ver una fracción de una película comercial que ha evidenciar el uso del conocimiento probabilístico en contextos reales.

PROBLEMA 1

¿Cuántas palabras tiene el libro Comprendiendo Las Probabilidades (Sanabria, 2012)?

Cuando se desea resolver un problema modelando por Estadística o Probabilidad un primer paso es definir de forma precisa las variables que involucra el estudio, por lo que para enfrentar este problema, posiblemente el participante debe preguntarse qué entiende por “palabra”, y una de las primeras acciones a seguir será definir “palabra”. Entre las posibles estrategias de solución, a continuación se expone la presentada por un grupo de estudiantes, durante uno de los procesos de experimentación de la propuesta.

Estimar el número promedio de palabras por página. Para ello, se toman unas cuantas páginas al azar del libro y se cuenta el número de palabras que tienen. Sumando el número de palabras por página y dividiendo el total por el número de páginas muestradas, se obtiene \bar{x} (aproximación del número promedio de palabras por página). Una vez hallado \bar{x} se procede:

- A nivel intuitivo: Cada página tiene aproximadamente \bar{x} palabras y hay 522 páginas; entonces hay aproximadamente $522 * \bar{x}$ palabras.
- A nivel formal.
 - ✓ Estimación puntual. Se tiene que \bar{x} es una estimación puntual del parámetro número promedio de palabras por página. Note que:

$$\mu = \frac{\text{Total de palabras}}{522} \Rightarrow \text{Total de palabras} = 522\mu \approx 522\bar{x}$$

- ✓ Estimación por intervalo. A partir de \bar{x} se puede hallar un intervalo de confianza del 90%, por ejemplo, para μ . Si el IC es [a,b] note que es muy probable que:

$$a < \mu = \frac{\text{Total de palabras}}{522} < b \Rightarrow 522a < \text{Total de palabras} < 522b$$

Es necesario retomar un aspecto inicial ¿Cómo tomar unas cuantas páginas al azar del libro?

- A nivel intuitivo. Para elegir una página al azar: se cierra el libro, luego se cierran los ojos y se abre el libro y los ojos. La primera página vista es la elegida.
- A nivel formal. Note que la forma de elegir la página en el paso anterior no es tan aleatoria. Es más, posiblemente privilegie las páginas del centro. Para elegir una página al azar de manera formal, se puede recurrir a Excel y escribiendo en Excel “=ALEATORIO.ENTRE(1;522)” nos dice una página a elegir.

PROBLEMA 2 (UNA VARIANTE AL PROBLEMA INICIAL)

Si la palabra “probabilidad” aparece 999 veces, entonces ¿cuántas palabras tiene el libro?

Una propuesta de solución a este problema y los demás problemas a proponer se pueden ver en el anexo de esta ponencia.

CONCLUSIONES

Las actividades planteadas además de ser interesantes, entretenidas y con un toque de diversión, buscan revelar el potencial de la Estadística y Probabilidad en la resolución de

problemas, algunos de ellos de la vida cotidiana. Una vez experimentadas estas actividades con diversas poblaciones, entre ellas con estudiantes para profesor en el II Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de datos [II-EDEPA], se logró identificar que para resolver situaciones donde está presente la incertidumbre, el azar y la variabilidad, se deben considerar los siguientes elementos:

- Los supuestos. El hecho de usar probabilidad implica por lo menos un supuesto, el de que el azar existe. Hay otros que se asumen tales como: suponer una distribución uniforme de una variable, suponer que un proceso –físico– dado genera escogencias aleatorias (e.g. abrir un libro con los ojos cerrados). Es importante tener conciencia de los supuestos que se asumen y ver cuáles son realmente necesarios en el análisis estadístico de una situación.
- Análisis previos. Al utilizar probabilidad es necesario delimitar la experiencia aleatoria, describir el espacio muestral y los eventos involucrados. Si se utiliza Estadística, antes de recolectar los datos es necesario definir: la población en estudio, la unidad estadística, las variables y su unidad de medida, los parámetros, entre otros elementos.
- El modelo puede perfeccionarse. Como se observó en la actividad 1, un modelo puede perfeccionarse eliminando supuestos, refinando los datos y utilizando distintos enfoques teóricos para el análisis de los mismos.

Así, se evidencia que la enseñanza a través de la solución de problemas es viable, interesante y ha de generar aprendizaje en contexto, y ante todo se apoyan argumentos acerca de que la Estadística y la Probabilidad sin contextos no tienen sentido, pues estaríamos remitiéndonos a la exclusiva manipulación de los datos.

REFERENCIAS

- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Traducción de Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Revista Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-111.
- Ekeland, I (1992). *Al Azar*. Barcelona: Editorial Gedisa.
- Sanabria, G. (2012). *Comprendiendo las Probabilidades*. Costa Rica, Editorial Tecnológica de Costa Rica.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (Trad. J. Zagazagoitia). México: Trillas. (Original en inglés, 1965).
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.
- Zapata, L. (2011). ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística? *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 1(33), 234-247.

ANEXO 1: PROBLEMAS Y PROPUESTAS DE SOLUCIÓN

Problema 2. (Una variante al problema inicial). Si la palabra “probabilidad” aparece 999 veces entonces ¿cuántas palabras tiene el libro?

(Con probabilidad). Considere la situación azarosa: Elegir una palabra al azar de la bolsa. Considérese ahora el evento A: la palabra elegida es “probabilidad”. Note que;

$$P(A) = \frac{999}{\text{Total de palabras}} \Rightarrow \text{Total de palabras} = \frac{999}{P(A)}$$

Para hallar cuántas palabras hay aproximadamente en el libro basta con hallar una aproximación de $P(A)$, la cual se determina con la ley de Los Grandes Números. Así podemos tomar una muestra grande de M palabras y ver cuántas de esas palabras (N) son “probabilidad”. Así N/M es una aproximación de $P(A)$. Para elegir la muestra M de palabras, se puede suponer que la palabra “probabilidad” se distribuye uniformemente en el libro (este supuesto es válido, vea el índice del libro), tomar unas páginas al azar y considerar todas las palabras de esas páginas como la muestra.

Otra opción es con Excel, además de elegir una página podemos elegir al azar una palabra de esa página, pero el proceso sería más lento.

Problema 3. Considere las escenas de la Película Focus de Will Smith entre el minuto 29 y el minuto 42. Note que la joven debe tratar de elegir el jugador en el campo de terreno que sea el elegido por el asiático. Será esta una situación:

- A: aleatoria con baja probabilidad de ocurrir.
- B: aleatoria con alta probabilidad de ocurrir.
- C: determinista

Esta actividad consiste en cuestionarnos sobre la existencia del azar, ¿será esto un invento humano? como menciona Ekeland (1992):

¿Existe realmente el azar o somos víctimas de una ilusión? Tal vez se trate de una noción esencialmente matemática, de una idealización de la realidad, así como la recta infinita y sin espesor del geómetra es una idealización de la línea trazada en el cuaderno de un escolar... Pero ciertas variables se nos ocultan, y es esta ignorancia lo que crea la ilusión del azar; somos como un observador colocado bajo una mesa de vidrio transparente sobre la cual se desarrolla una partida de naipes; el observador sólo verá el dorso de las cartas y no podrá comprender la evolución del juego.

Problema 4. (La rebelión de los fantasmas) Los caza-fantasmas han elaborado un aparato que puede destruir un fantasma al instante. El 31 de octubre hay un congreso de Fantasmas en New York y suponga que asisten una infinidad de fantasmas distintos a esta actividad. Los caza-fantasmas llegan al evento, encienden su máquina y se van; sin embargo, todos los fantasmas se esconden. Faltando un minuto para la media noche, salen 5 fantasmas, y el aparato inmediatamente destruye un fantasma. Los fantasmas se enojan, y faltando $\frac{1}{2}$



minuto para la media noche, salen 5 fantasmas más, y el aparato inmediatamente destruye un fantasma del total que ha salido. Esto enoja más a los fantasmas, y faltando $\frac{1}{4}$ de minuto para la media noche, salen 5 fantasmas más, y el aparato inmediatamente destruye uno más del total. El proceso continúa así: faltando $\frac{1}{8}$ de minuto, $\frac{1}{16}$ minuto, un $\frac{1}{32}$ de minuto, ... hasta llegar a la media noche.

- Si la máquina no es aleatoria en su forma de elegir el fantasma que va a destruir (es determinista). ¿Existirá una forma de elegir el fantasma a destruir en cada momento, para que a la media noche se tenga un número infinito de fantasmas?
- Si la máquina no es aleatoria en su forma de elegir el fantasma que va a destruir (es determinista). ¿Existirá una forma de elegir el fantasma a destruir en cada momento, para que a la media noche no quede ni un solo fantasma?
- Si la máquina es aleatoria en su forma de elegir el fantasma. ¿Cuántos fantasmas cree que quedan sin destruir a la media noche?

Problema 5. (Concurso de televisión Las Mascotas). Esta actividad consiste en simular un concurso de televisión. Uno de los actores de este trabajo será el presentador y este tendrá 3 colaboradores elegidos entre los asistentes al evento. El problema consiste en que los participantes (concurstantes) adivinen ¿Cuáles son las mascotas de los colaboradores? Para ello, el presentador elige 3 concursantes para que estos hagan una pregunta general a los colaboradores. La información dada por las respuestas de los presentadores (información muestral) será analizada por los concursantes con el fin de dar respuesta a la interrogante: ¿Cuáles son las mascotas de los colaboradores?

Con esta actividad se pretende dejar una moraleja a los participantes: “Estadística no es solo recolectar datos, hay todo un proceso previo necesario”.

Problema 6. (Lo divertido de asustar). En una noche de este mes, cuatro fantasmas de Bogotá salen a asustar; en su trabajo se encuentran con dos amigos fantasmas provenientes de Cartagena. Por lo emocionante de su labor, los sorprende el amanecer y se meten a las cuatro cuevas de los fantasmas de Bogotá, ocupándolas de manera aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que al distribuirse en las cuevas ninguna quede vacía?