UN RETO PARA ENSEÑAR LAS CADENAS DE MARKOV EN UNDÉCIMO GRADO

Ballesteros, Silvia Juliana
julianaballesterosg@hotmail.com
Universidad Industrial de Santander (Colombia)

Tavera, Luis Eduardo
luis.eduardo.tavera@hotmail.com
Universidad Industrial de Santander (Colombia)

RESUMEN

En el estudio de las cadenas de Markov, la probabilidad condicional es un objeto matemático que se desarrolla bajo el argumento práctico del análisis de fenómenos cotidianos sujeto a una relación de dependencia entre observaciones. Así, los objetivos de este conjunto de actividades son: ilustrar e interpretar la relación de dependencia anteriormente referida así como la relación entre conceptos de probabilidad y matemática que subyacen a su aplicación; ofrecer al estudiante de 11° grado otras formas de representar los sucesos del medio desde el enfoque del análisis de datos y probabilidad; y finalmente, resaltar y establecer las conexiones existentes entre las representaciones propuestas durante las sesiones del taller.

PALABRAS CLAVE

Cadenas de Markov, Probabilidad condicional, Modelamiento de fenómenos, Representación.

INTRODUCCIÓN

El taller se centra en la visualización de las Cadenas de Markov desde dos enfoques fundamentales: El lente epistemológico desde el cual se introduce y desarrolla un análisis básico de las Cadenas de Markov y su modelamiento mediante el álgebra matricial; y de otro lado el punto de vista pedagógico, por medio del cual se intenta mostrar desde el enfoque de resolución de problemas, la conexión existente entre la probabilidad y el álgebra, así como la utilidad de esta conexión a la hora de analizar e interpretar datos.

Para el desarrollo del primer enfoque, se propone al estudiante una serie de situaciones en las que tendrá la oportunidad de analizar un subconjunto de matrices que le permitirán, junto a una notación acordada y unas observaciones preliminares, construir, junto al docente y sus compañeros, las estructuras que le llevarán a utilizar dichas matrices para interpretar situaciones, del medio desde el razonamiento acerca de probabilidades y las propiedades del álgebra matricial.

En cuanto al segundo enfoque, se proponen espacios de comunicación de resultados que serán constantes durante las sesiones, los cuales permitirán paulatinamente, en la interacción estudiantes-docente, establecer notaciones, realizar consideraciones y preguntas, y conjeturar luego de razonar acerca de lo realizado durante cada parte del taller.

El objetivo general es proponer un estudio de probabilidades condicionales completo, usando varios sistemas de representación y sus conexiones para comprender significativamente conjuntos de eventos cotidianos que se pueden modelar matemáticamente a través de Cadenas de Markov.

MARCO DE REFERENCIA

CADENAS DE MARKOV

En el marco del Análisis de Datos y Probabilidad, los procesos estocásticos son un conjunto de sucesos u observaciones que se caracterizan por definir variables aleatorias acerca de un mismo fenómeno, y que a su vez pueden o no estar relacionadas, relación que generalmente varía en función del tiempo. Adicionalmente, cuando sobre este conjunto de sucesos se puede definir una probabilidad condicional, que indique las posibilidades (definida por un número entre 0 y 1) de ver cierta observación dada la observación anterior a esta, se denominará una Cadena de Markov, donde la última cualidad es definida como la Propiedad de Markov así: "Para una sucesión de estados $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se tiene que $P(X_{n+1} = s_{n+1} | X_1 = s_1, X_2 = s_2, \ldots, X_n = s_n) = p_{ij} \in [0,1]$" Universidad de Granada (2011). A cada uno de estos p_{ij} exhibidos por la Propiedad de Markov se les denomina *Probabilidades de Transición*.

Orientado bajo las cualidades y los objetos matemáticos que se han caracterizado sobre los procesos estocásticos, el análisis de estos fenómenos de acuerdo a las condiciones implícitas en la Propiedad de Markov, se construye desde una matriz cuadrada constituida por todas las probabilidades condicionales que se pueden describir en el fenómeno en estudio así: Dada una cadena de Markov a la que a cada estado de cada fase del proceso se le atribuye una probabilidad de transición estacionaria, una matriz de transición se define como:

$$\text{Si } p_{ij} = \overbrace{P(X_j|X_i)}^{Estado\ inicial} \Rightarrow \boldsymbol{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{p_{11}} & \cdots & \boldsymbol{p_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{p_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{p_{nn}} \end{pmatrix}}_{Estado\ final}$$

Se debe anotar que cada componente en la Matriz de Transición **P**, es una probabilidad que describe las posibilidades de observar un resultado (estado final) dado el resultado anterior (estado inicial) según lo expuesto por Hijuelos (2003).

Una vez que un fenómeno del medio es descrito por una Cadena de Markov, bajo la notación propuesta para la propiedad anterior, es posible para el interesado analizar la complejidad de este conjunto de sucesos desde los términos de las propiedades de matrices. Entre las propiedades, según Hijuelos (2003) se tiene que para una Cadena de Markov finita, es decir, una cadena con un conjunto finito de etapas, con un vector de probabilidades iniciales $\vec{\boldsymbol{v}}$ (aquel que describe el estado actual del fenómeno en estudio) y una matriz de transición $\boldsymbol{P}$**,** definidos por las probabilidades asociadas a los estados posibles de cada etapa de la cadena, el vector de probabilidad $\vec{\boldsymbol{w}}$ que define los estados de la siguiente etapa de la Cadena de Markov está dado por:

$$\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{P}$$

Considere los siguientes interrogantes:

En una Cadena de Markov con vector de probabilidades iniciales y una matriz de transición, plenamente conocidos, ¿será posible predecir los estados en los que se encontrarán las fases futuras más allá de la siguiente fase?, ¿hasta qué punto podría continuarse analizando la cadena con una matriz de transición?

Dada una Cadena de Markov con distintos estados en una cierta fase (fase actual) y matriz de transición $\boldsymbol{P}$ definida, una matriz de transición en k-pasos se define como:

$$(*)\ \boldsymbol{P^k} := \left\{ p_{ij}{}^{(k)} | p_{ij}{}^{(k)} = P(X_{i+k} | X_i \right\}$$

Donde $\boldsymbol{P^k}$ es la k-ésima potencia de $\boldsymbol{P}$, el vector probabilidad $\boldsymbol{\alpha}^{\rightarrow}$ que describe el estado de la Cadena de Markov pasadas k fases u observaciones, se define como:

$$\boldsymbol{\alpha}^{\rightarrow} = \boldsymbol{v}^{\rightarrow}\ \boldsymbol{P^k}$$

Donde $\boldsymbol{v}^{\rightarrow}$ es el vector de probabilidades iniciales (estado actual) y $\boldsymbol{P^k}$ es la matriz de transición que representa el estado de la Cadena de Markov luego de k fases o etapas.

GRAFO DIRIGIDO

Según Gerber (1990), un grafo dirigido o dígrafo consiste en un conjunto finito no vacío de puntos y un conjuntos de lados (o ramas) dirigidas entre parejas específicas de puntos. Con cada dígrafo se puede asociar una matriz, llamada matriz de adyacencia o de vértices para determinar cuántos caminos existen de un punto a otro.

LA PROBABILIDAD CONDICIONAL Y LA ESCOLARIDAD

> El Análisis de datos y la Estadística permiten a profesores y alumnos establecer conexiones importantes entre ideas y procedimientos sobre Números, Álgebra, Medida y Geometría. Trabajar con el Análisis de datos y con la Probabilidad ofrece a los estudiantes una forma natural de conectar las matemáticas con otras asignaturas y con las experiencias de la vida cotidiana (The National Council of Teachers of Mathematics, 2003, 51,54).

Uno de los ejes centrales que se describe en el conjunto de actividades propuestas es la probabilidad condicional, objeto matemático que ocupa un lugar de alta relevancia a la hora de estudiar las Cadenas Markov, lo que permite en consecuencia, preocuparse por los procesos propios de su estudio, así como de su aprendizaje.

De este modo, teniendo en cuenta que este taller tiene una intención pedagógica dirigida a reflexionar acerca de las probabilidades condicionales y su aplicación práctica en el análisis que se puede hacer de las Cadenas de Markov desde el análisis de datos y la probabilidad, se consideran los lineamientos planteados en "Principios y Estándares para la educación Matemática" (NCTM, 2003) que invitan a los docentes de secundaria a involucrar en los procesos de enseñanza-aprendizaje de sus estudiantes el estudio de las probabilidades condicionales durante el último año de la formación en básica secundaria, así:

> En Secundaria, deberían calcular probabilidades de sucesos compuestos y entender los sucesos condicionados e independientes. Los estudiantes deberían poder avanzar desde situaciones en las que la probabilidad de un suceso se puede determinar fácilmente, a situaciones en las que la toma de muestras y las simulaciones les ayudan a cuantificar la probabilidad de un resultado incierto (NCTM, 2003, p. 54).

Así, se pone de manifiesto que los estudiantes han construido bases para establecer predicciones de fenómenos del medio y estarán preparados para conectar sus inferencias con la estructuración propuesta para un nuevo conjunto de sucesos, sucesos que involucran la probabilidad condicional, una temática propuesta para estudiantes de 11° grado. Por tanto, es pertinente el estudio de las Cadenas de Markov en este período de escolaridad, ya que allí se incentivan las habilidades de inferencia y se introduce la condicionalidad como un factor crucial a la hora de analizar datos reales.

Para lograr los objetivos propuestos, el taller se desarrollará alrededor de actividades en las que el estudiante tendrá la oportunidad de trabajar e interpretar situaciones en dos tipos de espacios: uno individual y otro de debate grupal estudiante-docente en el que se busca comunicar los resultados y dudas al final de cada situación abordada. Cada uno de estos espacios será constante durante la realización del taller, pues se busca que los participantes se integren en un acuerdo por connotar y comprender las herramientas propuestas, generando a su vez, escenarios para hacer consultas y proponer conjeturas.

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

En primera medida, desde una introducción hacia el álgebra matricial básica (operaciones entre matrices, objetos que se definen en una matriz, notación, etc.) se espera verificar y/o proporcionar al estudiante las herramientas necesarias para interpretar las Cadenas de Markov desde su representación en el sistema algebraico.

EJEMPLO

1). Observe las siguientes matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\,.\boldsymbol{B}$:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.8 & 0.7 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$;$\boldsymbol{A}\,.\boldsymbol{B}$ =¿?

1.a). ¿Qué puedes notar acerca de las columnas de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$?
1.b). ¿Qué podrías concluir de las componentes de la matriz $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{B}$?
1.c). ¿Cómo podrías relacionar lo visto de estas matrices con la probabilidad?

A través de lo que se concluya en estas actividades se irán introduciendo los objetos matemáticos necesarios para describir las relaciones y conexiones propuestas para abordar las Cadenas de Markov y así, la probabilidad condicional en fenómenos del medio (matriz estocástica, Cadena de Markov, entre otros).

En la segunda parte, bajo la premisa de continuar las actividades con los objetos introducidos y el análisis de datos, se propone la solución de una situación matemática en la que se busca involucrar estos objetos y asimismo introducir su uso en el análisis de la situación, interpretando las representaciones del fenómeno y conjeturando algunos resultados a partir de las representaciones y conclusiones a las que haya podido llegar cada estudiante. Aquí también se pretende enfatizar la importancia del contexto, por lo que se propone un debate constante a cerca del alcance de las conjeturas y sus consecuencias.

EJEMPLO
En la Prueba Saber 11 del año 2015 se encontró una pregunta de matemáticas que estaba dividida en 6 etapas, donde el acierto en la segunda etapa de la pregunta dependía del acierto en la primera, el acierto en la tercera dependía de la segunda y así sucesivamente hasta la sexta etapa que dependía de la quinta. Si la probabilidad de que acierte en la segunda etapa de la pregunta dado que no acertó en la primera es de 0,7 y la probabilidad de que no acierte en la segunda etapa dado que no acertó en la primera etapa es de 0,9. ¿Cuál es la probabilidad de que no acierten en la segunda etapa de la pregunta?, si en esta versión de la prueba participaron 2000 estudiantes de Bucaramanga, donde el 80% logró acertar en la primera etapa. Recuerde que el acierto en una etapa de la pregunta depende de la etapa inmediatamente anterior.

Por último, se dará un espacio para estudiar la aplicación de las Cadenas de Markov, como una herramienta para el análisis de predicción de sucesos, consecuencia del estudio de la probabilidad desde el álgebra matricial y la representación mediante grafos. Aquí se pretende analizar las probabilidades futuras que se pueden verificar de la situación propuesta en el apartado anterior, además de establecer conclusiones generales de las actividades, los conocimientos y conexiones adquiridas, así como los procesos de razonamiento que se han propuesto para analizar un fenómeno desde su modelación en el análisis de datos y la probabilidad.

EJEMPLO
5.a). Represente mediante un grafo los datos expuestos en el problema.
5.b). Si la población total de votantes es de 15.000 personas, de las cuales el 35% votó por el candidato A en las últimas elecciones. ¿Cuáles serán los posibles resultados en la siguiente elección?

5.c). Si los candidatos son los mismos en las elecciones futuras, ¿qué sucederá con el porcentaje de los votantes al cabo de una cuarta jornada electoral?

CONCLUSIONES

Sobre el estudio de eventos y su modelación, se concluye que en el análisis empírico de fenómenos del entorno el ser humano se encuentra siempre en un escenario en el que experimenta, razona e interpreta, esto, desde los distintos procesos de modelación que se han llevado con éxito gracias a las matemáticas, que ha permitido visualizar el orden natural de los sucesos a partir de herramientas que permiten esclarecer la complejidad existente a nuestro alrededor.

En el estudio de predicciones y probabilidad se concluye que las Cadenas de Markov resultan ser una buena herramienta que permite modelar, representar e interpretar muchos de los fenómenos que ocurren a nuestro alrededor, ya que permite reflexionar sobre los límites de un estudio de acuerdo al contexto y las intenciones de este.

Se ha visto en las Cadenas de Markov un excelente recurso para estudiar probabilidades condicionales, puesto que permite interpretar algunas propiedades desde el álgebra matricial y desde el estudio propio de la probabilidad, así mismo es un tema enriquecedor para que un docente pueda trabajar en el aula, desde las múltiples conexiones que se pueden construir alrededor del objeto de estudio.

REFERENCIAS

Gerber, H. (1990). *Álgebra Lineal*. Traducción de Eduardo Ojeda Peña. Cadenas de Markov (pp. 395-403), Grafo Dirigido (pp. 95-100). México: México D.F.

Hijuelos, L. (2003). *Fundamentos del Álgebra Lineal: Matrices y Aplicaciones. Aplicaciones: Cadenas de Markov* (pp.223-240). Colombia: Bucaramanga.

NCTM (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Traducción: Manuel Fernández Reyes, de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas. *Estándares para la etapa 9-12: Análisis de Datos y Probabilidad* (pp.328-339). España: Granada.

Universidad de Granada (2011). *Cadenas de Markov*. http://www.ugr.es/~bioestad/_private/cpfund10.pdf

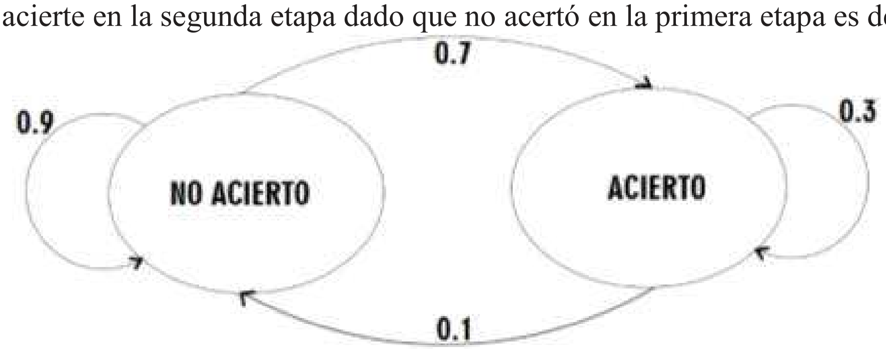
ANEXO 1: ACTIVIDAD: PROBABILIDAD Y CADENAS DE MARKOV

Parte I: Análisis de matrices, propiedades y conjeturas

1). Observe las siguientes matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.8 & 0.7 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$=¿?
1.a). ¿Qué puedes notar acerca de las columnas de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$?
1.b). ¿Qué podrías concluir de las componentes de la matriz $\boldsymbol{A}.\ \boldsymbol{B}$?
1.c). ¿Cómo podrías relacionar lo visto de estas matrices con la probabilidad?

Parte II: Primeras aplicaciones conceptuales, resolución de una situación

2). En la Prueba Saber 11 del año 2015, se encontró una pregunta de matemáticas que estaba dividida en 6 etapas, donde el acierto en la segunda etapa de la pregunta dependía del acierto en la primera, el acierto en la tercera dependía de la segunda y así sucesivamente hasta la sexta etapa que dependía de la quinta. Si la probabilidad de que acierte en la segunda etapa de la pregunta dado que no acertó en la primera es de 0,7 y la probabilidad de que no acierte en la segunda etapa dado que no acertó en la primera etapa es de 0,9:



2.a). ¿Cuál es la probabilidad de que no acierte en la segunda etapa de la pregunta si acertó en la primera etapa?
2.b). ¿Cuál es la probabilidad de acertar en la segunda etapa dado que no acertó en la primera etapa de la pregunta?
2.c). Teniendo en cuenta las observaciones vistas en el punto 1). ¿Cómo podrías representar estos datos en una matriz? Se verá que el conjunto de matrices que permiten representar estos datos son conocidas como matrices de transición.
2.d). Si en esta versión de la prueba participaron 2000 estudiantes de Bucaramanga, donde el 80% logró acertar en la primera etapa, ¿cuál es la probabilidad de que no acierten en la segunda etapa de la pregunta? Recuerde que el acierto en una etapa de la pregunta depende de la etapa inmediatamente anterior.

Parte III: Probabilidad en Cadenas de Markov. Deducción de probabilidades para eventos futuros
3). Reflexionando a cerca del apartado 2) ¿podría ejecutarse alguna interpretación que permita prever las probabilidades de éxito en las demás etapas de la pregunta?

4). En general, cuando hablamos de una cadena de Markov, ¿existen formas de interpretar el comportamiento de sucesos presentes para anticipar los futuros?

5).En un cierto país existen dos candidatos políticos: los candidatos A y B. La probabilidad de que una persona que vota en una cierta elección por el candidato A, vote por el B en la siguiente elección, es del 30 %. La probabilidad de que una persona que vote por el candidato B en dicha última elección vote luego por el A en la siguiente, es del 40%.

5.a). Represente mediante un grafo los datos expuestos en el problema.

5.b). Si la población total de votantes es de 15.000 personas, de las cuales el 35% votó por el candidato A en las últimas elecciones. ¿Cuáles serán los posibles resultados en la siguiente elección?

5.c). Si los candidatos son los mismos en las elecciones futuras, ¿qué sucederá con el porcentaje de los votantes al cabo de una cuarta jornada electoral?

6). Supongamos que el clima de una determinada región solo puede ser soleado ($\boldsymbol{s}_1$) o nublado ($\boldsymbol{s}_2$) y que las condiciones del clima en mañanas sucesivas forman una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias.

La matriz de transición está dada por:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.7} & \mathbf{0.3} \\ \mathbf{0.6} & \mathbf{0.4} \end{pmatrix}$$

6.1). Si un día concreto está nublado, ¿cuál es la probabilidad de que esté nublado el día siguiente?

6.2). Si un miércoles está nublado, ¿cuál es la probabilidad de que el viernes siguiente haga sol?

6.3). Supongamos que la probabilidad de que el miércoles haga sol es 0.2 y la probabilidad de que esté nublado es 0.8. Calcular:

i). Probabilidad de que esté nublado el jueves.

ii). Probabilidad de que esté nublado el viernes.