Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica

Gilberto Obando Zapata[6]
Norma L. Vásquez Lasprilla[7]

Introducción

Tal como lo expresa el Ministerio de Educación Nacional en su documento sobre los Lineamientos Curriculares en el área de matemáticas[8], el desarrollo del Pensamiento Numérico es el nuevo énfasis sobre el cual debe realizarse el estudio de los Sistemas Numéricos. Así, desde el estudio profundo de los Sistemas Numéricos, se pueden desarrollar habilidades para comprender los números, usarlos en métodos cualitativos o cuantitativos, realizar estimaciones y aproximaciones, y en general, para poder utilizarlos como herramientas de comunicación, procesamiento e interpretación de la información en contexto, con el fin de fijar posturas críticas frente a ella, y así participar activamente en la toma de decisiones relevantes para su vida personal o en comunidad.

> …el pensamiento numérico se refiere a la comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones…(McIntosh, 1992).

- Desde una perspectiva más amplia, Resnick, 1989 (citada por Judith Sowder, 1992), propone que el pensamiento numérico debe ser considerado como una forma de pensamiento superior y que por tanto debe presentar características como:
- No algorítmico, esto es, el camino de la acción no está totalmente especificado de antemano.
- Tiende a ser complejo: el camino total no es visible (mentalmente hablando) desde ningún lugar en particular.
- Abre un campo de soluciones múltiples, cada una con costos y beneficios, antes que una única solución.
- Involucra juzgar e interpretar.
- Involucra la aplicación de múltiples criterios, los cuales algunas veces entran en conflicto con otros.
- Involucra la incertidumbre: no siempre que iniciamos una tarea, conocemos el camino para su solución.
- Involucra autorregulación de los procesos de pensamiento, …
- Involucra imposición del significado, encontrando estructura en el aparente desorden.
- El pensamiento es esfuerzo total. Existe un considerable trabajo mental en el tipo de elaboraciones y juicios que se requieren.

---

[6] Profesor Facultad de Educación, Universidad de Antioquia. Estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación, Universidad del Valle. e-mail 1: gobando@une.net.co e-mail 2: gobando@ayura.udea.edu.co.
[7] Profesora Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle. Estudiante de la maestría en Educación, Universidad de Antioquia E-mail: nlvasquez@ayura.udea.edu.co
[8] Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Bogotá, p 131.

- La anterior cita muestra como el desarrollo del pensamiento numérico es un proceso cuya construcción implica largos periodos de tiempo, ya que involucra no solo aspectos conceptuales de las matemáticas, sino también el desarrollo mismo de la cognición humana.

En los Lineamientos Curriculares se proponen ideas similares a propósito de los énfasis sobre los cuales se debe estructurar el currículo de matemáticas en el sistema educativo colombiano:

> El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos, y se manifiesta de diversas maneras de acuerdo con el desarrollo del pensamiento matemático. En particular, es fundamental la manera como los estudiantes escogen, desarrollan y usan métodos de cálculo, incluyendo cálculo escrito, cálculo mental, calculadoras y estimación, pues el pensamiento numérico juega un papel muy importante en el uso de cada uno de estos métodos. La invención de un algoritmo y su aplicación hace énfasis en aspectos del pensamiento numérico tales como la descomposición y la recomposición, y la comprensión de las propiedades numéricas. Cuando se usa un algoritmo ya sea utilizando papel y lápiz o calculadora, el pensamiento numérico es importante cuando se reflexiona sobre las respuestas.
>
> Otras situaciones que involucran el desarrollo del pensamiento numérico hacen referencia a la comprensión del significado de los números, a sus diferentes interpretaciones y representaciones, a la utilización de su poder descriptivo, al reconocimiento del valor (tamaño) absoluto y relativo de los números, a la apreciación del efecto de las distintas operaciones, al desarrollo de puntos de referencia para considerar números. En general, estos puntos de referencia son valores que se derivan del contexto y evolucionan a través de la experiencia escolar y extraescolar de los estudiantes. Otro indicador valioso del pensamiento numérico es la utilización de las operaciones y de los números en la formulación y resolución de problemas y la comprensión entre el contexto del problema y el cálculo necesario, lo que da pistas para determinar si la solución debe ser exacta o aproximada y también si los resultados a la luz de los datos del problema son o no razonables.
>
> El contexto mediante el cual se acercan los estudiantes a las matemáticas es un aspecto determinante para el desarrollo del pensamiento. Por tanto, para la adquisición del sentido numérico es necesario proporcionar situaciones ricas y significativas para los alumnos. Claramente, el pensamiento numérico es a veces determinado por el contexto en el cual las matemáticas evolucionan. Por ejemplo, mientras un estudiante en la escuela no se incomoda porque 514 sea la suma de 28 + 36, el mismo estudiante en una tienda puede exigir que se le revise la cuenta si tiene que pagar $ 5140 por dos artículos cuyos precios son $ 260 y $ 380. Para otro estudiante resulta más fácil decir que en ½ libra de queso hay más queso que en ¼ de libra, que determinar cual es mayor entre ¼ y ½.
>
> La manera como se trabajen los números en la escuela contribuye o no a la adquisición del pensamiento numérico. Los estudiantes que son muy hábiles para efectuar cálculos con algoritmos de lápiz y papel (este es el indicador mediante el cual se mide con frecuencia el éxito en matemáticas) pueden estar o no, desarrollando este pensamiento.
>
> Cuando un estudiante de 6° grado dice que $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{8}{10}$ o un estudiante de 2° grado afirma que $40-36=16$, están intentando aplicar un algoritmo que han aprendido pero no están manifestando pensamiento numérico.
>
> MEN, 1998, p 43 y 44

Surge entonces una gran pregunta para la escuela: ¿Cómo organizar la estructura curricular del área de matemáticas con el fin de lograr el desarrollo de un pensamiento matemático en los estudiantes, coherente con los planteamientos propuestos en los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Matemáticas, y en general, con los planteamientos actuales de la Didáctica de las matemáticas en el ámbito nacional e internacional? Por supuesto, un intento de respuesta ni es simple ni inmediato.

El desarrollo del pensamiento numérico de los niños empieza antes de su ingreso a la escuela, cuando hacia los dos o tres años, a través de la interacción con otros adultos (fundamentalmente sus padres) desarrollan no solo las habilidades y competencias relativas al lenguaje materno, sino que, gracias a esas interacciones, también desarrollan una serie de intuiciones sobre lo numérico, las cuales se muestran en competencias relativas al conteo[9], percepción del cardinal de pequeñas colecciones[10], incluso, la posibilidad de composiciones y descomposiciones de las mismas.

Si bien no puede decirse que estas actuaciones constituyan un conocimiento amplio del número ni en el sentido matemático (aun no pueden reconocerse las propiedades matemáticas básicas del sistema de los números naturales ni psicológico (la complejidad lógica de estos conocimientos es aun incipiente), si puede afirmarse que estas primeras intuiciones numéricas son la base para el posterior desarrollo de los aspectos psicológicos y matemáticos del mismo.

Desde el punto de vista psicológico, se deben estructurar las operaciones lógicas de clases de seriación y de inclusión, que son las que permiten, siguiendo a Piaget, la construcción de la noción de cardinalidad, y orden estable, y por consiguiente, del número como una clase lógica.

Esta construcción de los aspectos cognitivos del número es un asunto del desarrollo normal de la persona, y el papel de la escuela en este proceso es importante, pero no enseñando las actividades piagetianas de seriación, clasificación, ordenación, conservación, etc., sino a partir de promover situaciones en las cuales el papel de la interacción social del niño con otros niños y adultos sea factor fundamental para el desarrollo de éstas, en tanto que le posibiliten el proceso de adquisición de las competencias lingüísticas, pragmáticas, y conceptuales necesarias para su desarrollo. En otras palabras, el aprendizaje del número no es solo un problema de desarrollo cognitivo, sino que el contexto sociocultural en el que el niño despliega su actividad es determinante en los logros que puede alcanzar.

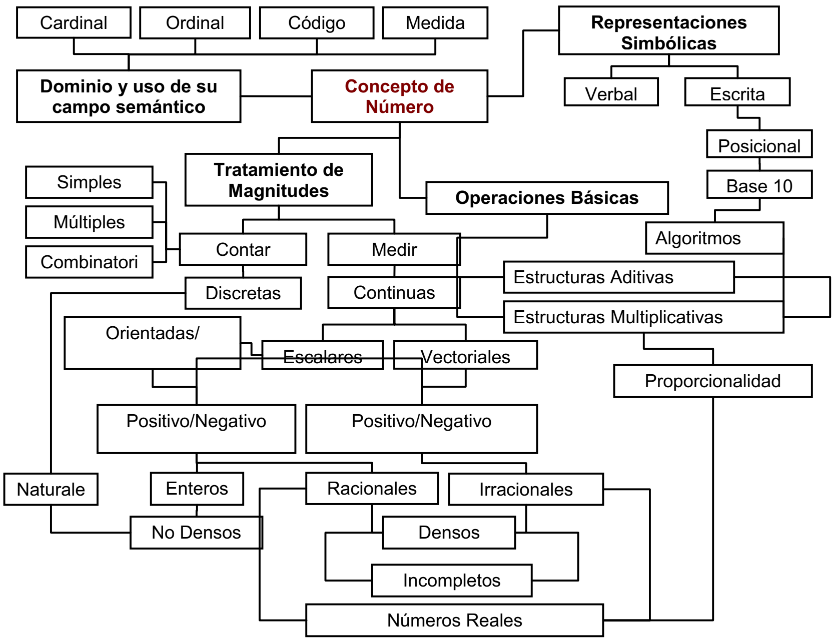
Así pues, aceptando que la escuela juega un papel importante en el desarrollo del pensamiento numérico, y que este es un proceso de larga duración, se pueden proponer los siguientes aspectos sobre los cuales centrar los esfuerzos en el contexto escolar:

- Conocimiento de los múltiples usos de los números.
- El conteo y las estrategias para operar a través del conteo.
- La comprensión de las relaciones y las operaciones.
- Comprensión del sistema de numeración decimal.
- Sentido de número y estimación.
- Trascender los números naturales.

El siguiente esquema presenta relaciones básicas entre los principales conceptos relacionados con el pensamiento numérico

[9] Por contar se entiende no el recitar la secuencia de palabras número, sino al establecimiento de la correspondencia entre éstas y los objetos de la colección que se desea contar. Aunque es de anotar que en esas edades se cometen muchos errores al establecer esta correspondencia, y que el conteo, más que dar cuenta de la cantidad de objetos de una colección (cardinal), lo que hace es asignar etiquetas a los objetos contados (el tres no significa tres objetos, sino más bien el tercer objeto contado).

[10] Desde edades muy tempranas los niños reconocen perceptualmente colecciones de hasta tres o cuatro objetos sin necesidad de recurrir a su conteo. Dicho proceso se conoce como subitizing.



1. CONOCIMIENTO DE LOS MÚLTIPLES USOS DE LOS NÚMEROS

Los números en la vida cotidiana pueden ser usados de muchas maneras: como secuencia verbal, para cuantificar, para medir, para expresar un orden, para etiquetar, para marcar una locación, o simplemente como una tecla para pulsar (en el caso de las calculadoras), (MEN, 1998; Decorte, Verschafel, 1996).

Los Números como secuencia verbal

Esta es quizás una de las primeras identificaciones que el niño hace con respecto al número. Desde una edad muy temprana, cuando se inicia el desarrollo del lenguaje, los niños comprenden que existen palabras para referirse a las cosas o las acciones, y otras palabras especiales con las cuales referirse al contar[11]. No quiere decir esto que los niños en esos momentos iniciales sepan contar, sino que identifican la existencia de palabras para referirse a esa acción es especial.

Esta iniciación al uso de las palabras números cumple una funcionalidad muy importante en el aprendizaje del conteo: de un lado, permite que los niños aprendan las palabras número, y de otro, con la corrección del adulto, interiorizan el orden en que ellas deben ser aprendidas. Si bien pronunciar las palabras número no es contar en el sentido estricto de la palabra, conocer las palabras y su orden es uno de los aspectos claves en su aprendizaje.

Además, cuando este aprendizaje se hace unido a las acciones mismas de contar, y no solo a partir de acción de repetir las palabras número como si se tratara de una canción o un retahíla de palabras, éstas palabras número se aprenden en contexto y con significado, lo que hace más fácil los aprendizajes posteriores con respecto al número.

[11] Así, hacia los dos años, los niños usan algunas palabras, como por ejemplo: uno tres cinco, etc., para referirse a acciones que indiquen contar, y cuando se les pide contar, no usan otras palabras como, gato, perro, etc., que son comunes en su vocabulario.

Los números para etiquetar

Los números como etiquetas tienen varios sentidos: de un lado puede identificar cierto uso que da el niño a las palabras número cuando está en proceso de aprender a contar, pero de otro, puede referirse al uso que al número como código de identificación de personas, objetos, funciones etc.

Cuando el niño inicia el aprendizaje del conteo, una etapa inicial del proceso está referida al uso de las palabras número como etiquetas. Esto es, para el niño, cada palabra número enunciada, no representa la cantidad de objetos contados hasta el momento, sino el último objeto señalado[12]. Es decir, la palabra número no expresa cantidad sino formas de nombrar los objetos. Esto se va superando en la medida que los niños interiorizan la noción de cantidad, y sobre todo, en la medida que reconocen y memorizan de manera perceptual las cantidades o colecciones de muestra. Por ejemplo, reconocen donde hay dos o tres objetos sin necesidad de contar[13].

El otro sentido, ya no depende de la comprensión del niño, sino de los usos culturales del número. Los números de las cédulas, de los teléfonos, de las camisetas de los jugadores de fútbol, etc., no comportan el significado de número en el sentido estricto de la palabra. Son tan solo etiquetas para identificar algo: una persona (la cédula), una cuenta (el teléfono) y una función (el juego del fútbol).

Como puede verse en los ejemplos señalados, con dichos números no tiene sentido las operaciones clásicas de sumar o restar, aunque si indican una clasificación. Esto es, los números como etiquetas cumplen la función de clasificar objetos, y dependiendo del contexto en que sean usados, esta clasificación es más detallada o no. Por ejemplo, en el caso de los códigos de barra que identifican los productos que se venden en una tienda, almacén o supermercado, las barras representan una secuencia de números[14] los cuales se utilizan representar características del producto: fabricante, tipo de producto, nacionalidad, etc.

Los números para contar

Como se verá más adelante, contar es una acción fundamental en el desarrollo del pensamiento numérico, sobre todo, al inicio de las conceptualizaciones más elementales con respecto al número. Pero no siempre que se repite una secuencia de palabras número se está usando el número en su sentido de contar. Los números se usan para contar, cuando el resultado final de la acción expresa la cantidad (cardinalidad) de una colección de objetos.

En tal sentido, establecer correctamente la correspondencia uno a uno de las palabras número con los objetos de la colección que se quiere contar no es suficiente para que el número exprese cantidad, aunque si es condición necesaria. Esta significación se logra, cuando en la acción de establecer la correspondencia biunívoca, cada nueva palabra número usada expresa la totalidad de objetos contados hasta el momento, y no tan solo como una etiqueta que representa el último objeto contado.

Los números para medir

En el mismo sentido del ítem anterior, no siempre se tiene la necesidad de cuantificar cantidades

[12] Esto se evidencia en acciones como las siguientes: después de contar cuatro objetos se le pregunta al niño que muestre donde hay tres, y generalmente señala el tercer objeto contado. Esto demuestra que la palabra tres aun no significa cantidad, sino una forma de uno de los objetos contados.

[13] Este reconocimiento de las cantidades iniciales pues dos objetos siempre están en línea, mientras que tres siempre están en triángulo. De ahí que la visualización juega un papel importante. Además, culturalmente, se induce al niño en la representación de estas cantidades en sus dedos, sobre todo a partir de solicitarle que represente su edad en los dedos de las manos, en los juegos, al contar uno, dos, tres,... (y salte), etc.

[14] Representar los números por barras es un asunto de tecnología, pues de es forma se facilita su lectura electrónica.

discretas. Muy a menudo, se debe cuantificar magnitudes continuas. En tales casos, el número expresa una cantidad, pero ahora como resultado de una medición. En estos casos, por lo general ya no se trata de número enteros, sino de números racionales, o incluso de números irracionales.

Los números como resultado de una medida constituyen una de las fuentes de sentido y significado más importantes para el desarrollo del pensamiento numérico. Es precisamente la necesidad de expresar la medida de magnitudes de diferente naturaleza la que se constituye como fuente fenomenológica para la construcción conceptual de los diferentes sistemas numéricos.

Los números para ordenar

Unido a lo anterior está el sentido de los números como criterio organizador de una secuencia. Se trata un sentido del número en que no es solo cantidad, sino que a través de la noción de cantidad se establece la organización de una secuencia de eventos, acciones, etc. En este sentido el significado del número en juego no es el de cantidad, sino el de orden. En este caso, la noción de cantidad es el referente básico para definir el orden de aquello que se quiere organizar.
Todo lo anterior muestra la necesidad del desarrollo de una propuesta curricular con una amplia riqueza de situaciones a través de las cuales los alumnos puedan tomar conciencia de esta multiplicidad de sentidos y significados de los números.

2. EL CONTEO Y EL APRENDIZAJE DEL NÚMERO NATURAL

Por lo general, cuando se piensa en el aprendizaje del número natural, se piensa básicamente en los primeros aprendizajes que el niño realiza en el preescolar y/o primero primaria. Nada más lejos de la realidad que tal planteamiento. Tal aprendizaje está presente, por lo menos, a lo largo de toda la educación básica. Esta afirmación tan fuerte debe ser sustentada con cuidado.
Durante mucho tiempo las actividades de enseñanza del número centraron la atención en las tareas piagetianas sobre conservación, seriación y clasificación. Hoy en día se ha demostrado que estas actividades no mejoran la comprensión numérica de los niños (De Corte y Verschafel, 1996), y que por el contrario, centrar el trabajo sobre el conteo y las estrategias del conteo a través de la solución de problemas sencillos, trae grandes desarrollos en los procesos de conceptualización de los alumnos.

En consonancia con los planteamientos piagetianos, en nuestro sistema educativo es muy común la estrategia de enseñar el concepto de número natural a partir la noción de cardinal, el cual se supone es el resultado de la abstracción del trabajo con colecciones[15]. Una vez "aprendidos los números", así a secas, se pasa al estudio de las operaciones, el cual se restringe básicamente al aprendizaje de los algoritmos para calcular los resultados, y no de las operaciones en si mismas. Finalmente se trabaja la solución de problemas, donde se aplican los conceptos estudiados anteriormente. Esta perspectiva de trabajo desarticulado, no permite el desarrollo del pensamiento numérico tal como se propone en los Lineamientos Curriculares.

Saber el número "cinco" es mucho más que reconocer una colección de cinco unidades, o reconocer el numeral "5". Es reconocer que 5 es 3+2, 4+1, 10÷2, etc., es reconocer que... 3<4<5<6<7..., es poderlo utilizar con sentido para comunicar situaciones en las que él aparece, o poder resolver situaciones problema en las que el cinco este involucrado; y mucho más.

Por el contrario, una perspectiva de trabajo que tome como punto fundamental para el aprendizaje del concepto de número natural las situaciones problema en las que estos intervienen, y a través de estas,

[15] Así, son comunes las actividades en las que se muestran las colecciones de uno, dos, tres, cuatro,..., elementos, generalmente en forma gráfica y sin contexto alguno que les den sentido y significado, separadas en el tiempo (cada una de ellas en una clase diferente), seguidas posteriormente de actividades centradas en el reconocimiento de la representación simbólica de cada uno de los números representados en dichas colecciones.

conceptualizar las relaciones, las operaciones y las propiedades que los caracterizan como sistema numérico, se hace bastante promisoria. Nótese que se está planteando un aprendizaje del número a través de su uso, y no aprender el número desde sus aspectos formales, para luego utilizarlo. Para lograr tal meta, la acción de contar es un factor determinante.

La interacción social y los primeros aprendizajes numéricos

Desde que los niños, hacia los dos o tres años, inician su inmersión en la lengua materna a través de las interacciones con los adultos, desarrollan no solo las habilidades y competencias relativas al lenguaje materno, sino que, gracias a esas interacciones con el adulto, también desarrollan una serie de intuiciones sobre lo numérico, que se muestran en competencias relativas al conteo, percepción del cardinal de pequeñas colecciones, e incluso, la posibilidad de composiciones y descomposiciones de las mismas. Si bien no puede decirse que estas actuaciones constituyan un conocimiento amplio del número ni en el sentido matemático (aun no pueden reconocerse las propiedades matemáticas básicas del sistema de los números naturales) ni psicológico (la complejidad lógica de estos conocimientos es aun incipiente), si puede afirmarse que estas primeras intuiciones numéricas son la base para el posterior desarrollo de los aspectos psicológicos y matemáticos del mismo.

Quizás por presumir ante familiares y amigos, quizás motivados por la idea de que las matemáticas hacen a las personas inteligentes, o simplemente motivados por una necesidad social, los padres inducen a los niños al aprendizaje de la secuencia de las palabras número. Estas acciones hacen que paulatinamente, el niño hacia los tres o cuatro años, pueda recitar las palabras número, y en el orden apropiado, por lo menos hasta el diez. Erróneamente, la mayoría de los adultos asumen que esta recitación es una evidencia de que el niño sabe contar. En realidad, el conteo implica otro tipo de capacidades que superan ampliamente este nivel de la recitación de las palabras número.

Pero cuando esta intencionalidad del adulto se contextualiza desde las actividades cotidianas del niño, fundamentalmente desde sus juegos, de tal manera que el aprendizaje de la secuencia de las palabras número se realice sobre la base de actividades reales de conteo, entonces se logra ya no solo recitar las palabras número, sino realmente contar en un rango alrededor de la decena, reconocer perceptualmente la cardinalidad de colecciones de hasta tres o cuatro elementos, o incluso, realizar composiciones y descomposiciones en los rangos numéricos dentro de los cuales se reconoce la cardinalidad perceptual.

Realizar el anterior trabajo tiene dos condiciones básicas: de un lado, aprovechar las actividades de juego espontáneas de los niños para inducirlos en actividades de conteo, y de otro, que estas actividades de conteo generen la necesidad de comunicar cantidades y de comunicarse a través de las mismas. Es decir, no se trata de forzar actividades de conteo, sino de aprovechar aquellas en las que el contar se pueda desarrollar de forma casi natural, pero que a la vez, este conteo esté mediado por la necesidad de comunicarle a otros la cantidad contada.

Por ejemplo, en un juego con cubos, carros, o muñecas, el adulto puede inducir a los niños a la necesidad de contar a través de un cuestionamiento sencillo: ¿cuántos cubos, carros, muñecas tenemos? En este momento se puede acompañar el acto de contar de los niños, ayudándolos en los momentos en los que presentan dificultades para dar feliz término a su acto. Otra situación típica que se presta para generar aprendizajes numéricos es el relativo a la edad: al niño(a) continuamente se le cuestiona por su edad, y él rápidamente aprende a mostrar en sus dedos cuantos años tiene, y cuando lo hace mal, el adulto le corrige mostrándole como debe ser.

Como se afirmó antes, estos aprendizajes numéricos de los niños hacia tres o cuatro años de edad aun distan mucho de constituir formalmente el concepto de número, pues, siguiendo a Piaget, no hay en estos actos de conteo evidencia de cardinalidad, orden estable, y por consiguiente, el número no existe como clase. La ausencia de cardinalidad se puede evidenciar en situaciones tan simples como en el acto de mostrar tres dedos de una mano para representar una cantidad (como por ejemplo su edad): siempre son los mismos tres dedos, y no aceptan que otros tres dedos, o incluso que dos dedos de una mano y uno de la otra sean el mismo tres, En otras palabras, el tres no es la cantidad, sino los tres dedos que se usan para su representación" y de ahí la negativa para aceptar que otra configuración de dedos también represente el mismo tres. Igual evidencia se puede ver con las palabras número que se utilizan para contar: cuando el niño dice "uno, dos y tres", estas palabras no representan cantidades de objetos, sino más bien etiquetas para referirse a dichos objetos, y por tanto, el "uno", o el "dos", o el "tres" se refieren al primero, al segundo o al tercer objeto contado respectivamente, y no a las cantidades uno, dos o tres.

La ausencia de orden se evidencia de un lado en la imposibilidad del niño de ver la inclusión de un número en el otro, por ejemplo, de ver que el tres contiene al dos, y de otro, que a pesar de realizar el conteo en orden correcto, el orden en que se realiza dicho conteo se refiere no a la relación de ser mayor o menor, sino a la manera como fueron aprendidas la palabras número.

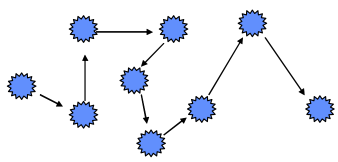
Todo esto desemboca en la ausencia de un concepto de número como clase, ya que, por ejemplo, el dos es diferente según el contexto donde es utilizado: dos carros no es lo mismo que dos muñecas, pues el dos se refiere a cosas y no a la cantidad. Es decir, existe un número para cada colección, y el número de una es diferente del número de la otra.

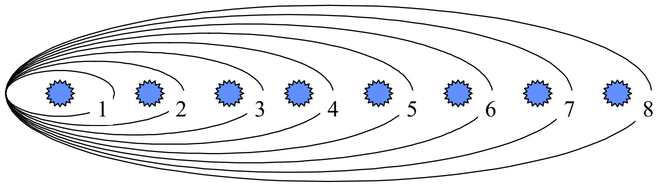
Pero a pesar de las distancias tan grandes que separan estas ideas iniciales de los niños de los conceptos formales aceptados en la escuela, no se puede pretender dejar este desarrollo conceptual a la mera voluntad del destino, pues si bien es cierto que un aprendizaje del concepto de número natural debe darse sobre la base del desarrollo de unas estructuras cognitivas, también lo es, que el papel de la interacción social del niño es fundamental en el desarrollo de éstas, en tanto que le posibilita un proceso de adquisición de las competencias lingüísticas, pragmáticas y conceptuales necesarias.

En otras palabras, el aprendizaje del número no es solo un problema de desarrollo cognitivo, sino que el contexto sociocultural en el que el niño despliega su actividad es determinante en los logros que puede alcanzar.

El conteo y las estrategias para operar a través del conteo

Contar es una acción básica para el desarrollo del concepto de número natural, pero sobre todo, si esta acción está mediada por la necesidad de comunicar o interactuar con otros: a través de un juego para determinar los marcadores de cada jugador, para comunicar a otros cuanto se tiene de algo, para comparar cantidades, etc..





Dos caractrerísticas básicas del conteo:En primera instancia, un orden en la secuencia para no contar dos veces el mismo objeto, o no dejar ningún objeto sin contar (figura superior), y en segunda instancia, el carácter inclusivo de cada item de conteo: 8 contiene los demás números (figura inferior).

El conteo es un esquema mental cuya construcción inicia en la etapa sensoriomotora y que se va desarrollando paulatinamente hasta alcanzar niveles abstractos. Cada una de las etapas por las que atraviesa este proceso determina momentos específicos en el desarrollo conceptual del número. La construcción de este esquema implica en el niño la comprensión del concepto de colección como una totalidad compuesta susceptible de ser comparada. Pero no por el hecho de que el niño perciba la colección como pluralidad está en capacidad de contarla. Debe ante todo percibir cada elemento de la colección como un ítem que puede ser contado, delimitar claramente los elementos de la colección, y establecer una correspondencia uno a uno entre la secuencia de las palabras número y los objetos de la colección que debe ser contada (esto es, no contar dos veces un elemento o dejar alguno sin contar).

Así pues, contar es un proceso mediante el cual se ponen en correspondencia biunívoca los números naturales con los elementos de una colección, y como ya se dijo, recitar las palabras número, sin ninguna referencia a correspondencia con ítems de una colección no es contar. Cuando el niño inicia los primeros aprendizajes de este proceso se ve enfrentado a múltiples problemas, que van desde no conocer los nombres de los números o no conocer el orden correcto de ellos, hasta los relativos con el establecimiento del cardinal de la colección contada. Solo a través de enfrentar múltiples situaciones de conteo, el niño puede desarrollar los esquemas suficientes y necesarios para solucionar estos problemas.

De otra parte, así como a través de las diferentes situaciones de conteo a las que el niño se enfrente le permiten adquirir una comprensión del número, estas mismas situaciones, en la medida que exigen la comunicación con otros (sobre todo si esta se realiza con lápiz y papel), también generan la necesidad de aprender a escribir los numerales[16]. Al igual que con el conteo, este no es un aprendizaje de fácil tránsito, que parte de las representaciones espontáneas de los niños (iconográficas muchas veces) hasta finalmente llegar a la escritura socialmente compartida. Se trata pues no de imponer a la fuerza una escritura simbólica, sino de permitir que en la medida que aumente la comprensión conceptual del número, también mejore la forma como éste se representa por escrito, y viceversa, que en la medida que se disponga de formas más potentes de representación simbólica, entonces se tengan mejores herramientas para su comprensión.

Finalmente, el conteo es una herramienta importante para iniciar el aprendizaje de las operaciones básicas, sobre todo las correspondientes a la estructura aditiva. La composición de dos o más a cantidades (partes) para formar una única cantidad (todo), o su correspondiente operación inversa, descomponer una cantidad dada (todo), en una o más cantidades no necesariamente iguales (partes), son una importante fuente de sentido y significado para la suma y la resta respectivamente. El conteo proporciona estrategias para el tratamiento de situaciones que involucren tanto la composición como la descomposición aditiva.

La composición y descomposición aditiva se constituyen en uno de los procesos fundamentales a través de los cuales el alumno logra la estructuración conceptual del número. Como tal no son operaciones matemáticas, sino procesos a través de los cuales se estructura un entramado conceptual base, tanto para el concepto de número, como para las operaciones aditivas (suma y sustracción).

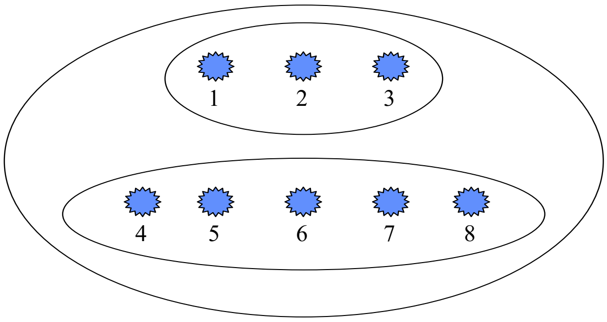
La descomposición, como su nombre lo indica, consiste en la repartición de una cantidad determinada en dos o más cantidades menores que ella (éstas no necesariamente tienen que ser iguales). Así por ejemplo, la cantidad 5 puede ser descompuesta en 1 y 5; 2 y 3; 3 y 2 y 4 y 1. La composición es el proceso inverso, esto es, a partir de dos o más cantidades dadas, encontrar la cantidad total. Ambos procesos

[16] Símbolos gráficos con los que representamos los números de forma escrita, que para nuestro caso, es a través de Sistema de Numeración Decimal.

están unidos al esquema básico aditivo: la relación parte-parte-todo. Así, en un primer momento de la actividad intelectual del alumno, la composición y la descomposición aditiva están ligadas al conteo, y a través de éste, se genera una serie de estrategias que evolucionan en la medida que se desarrolle el concepto de número y de las operaciones suma y resta.

Técnicas de conteo: La composición

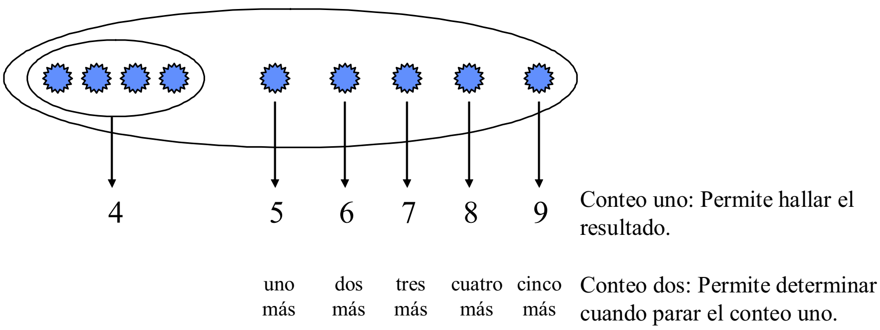
Como se indicó antes el proceso de la composición se da unido a la evolución de los esquemas de conteo. Esto es, las distintas estrategias a través de las cuales el niño soluciona las tareas de composición están determinadas por el nivel de abstracción que él haya alcanzado en los esquemas de conteo. Así se pueden distinguir las siguientes estrategias básicas de conteo en este tipo de actividades:



Conteo uno a uno: en esta estrategia el niño, ante la exigencia de totalizar dos cantidades dadas, cuenta uno a uno los elementos de ambas colecciones, determinando que la última palabra número pronunciada es el resultado de la totalización pedida. Podría decirse que el niño que realiza este tipo de estrategia está en una etapa en la que no logra representarse una cantidad como un todo a partir del cual se puede reiniciar un nuevo conteo. Por esta razón para hallar el total debe contar uno a uno ambas cantidades.

Completar a partir de una de las cantidades dadas: en esta estrategia el niño toma como base una de las cantidades dadas y realiza un conteo completando la segunda cantidad a partir de la primera. Este conteo completando exige al niño el realizar un doble conteo: uno que le permitirá determinar el resultado final y el otro, que le dice cuando parar el primer conteo. Así por ejemplo, para determinar

cuánto se completa al juntar dos colecciones de 4 y 5 caramelos el niño puede completar un conteo de cinco unidades a partir de 4, diciendo por ejemplo 5, 6, 7, 8, 9, en cuyo caso 5 significa uno más, 6 dos más, 7 tres más, 8 cuatro más y 9 cinco más, y por lo tanto 9 es el resultado.



Como puede notarse en el gráfico, el niño parará de contar cuando haya completado cinco ítems en el conteo 2. Ahora bien, según como se realice el segundo conteo se pueden tener diferentes niveles de abstracción, que van desde la necesidad de tener los cinco objetos para contarlos (conteo perceptual), pasando por la posibilidad de representarlos figuralmente, hasta que pueda ser llevado en la mente como ítems de conteo abstracto.

Totalización sin realizar el conteo: en este caso el niño logra realizar la totalización sin necesidad de recurrir al conteo. Esto quiere decir que el niño ya ha interiorizado dicha descomposición como un hecho numérico, al cual puede recurrir cada vez que lo necesite.

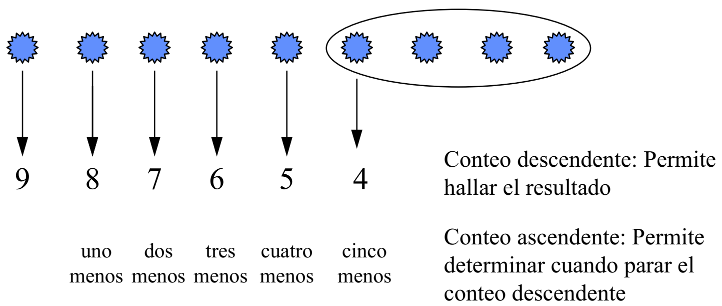
Es de destacar que las anteriores estrategias no representan una estructuración jerárquica y creciente en el proceso de abstracción de la composición, sino que el niño, en función del contexto de la tarea, y del rango numérico de la misma, desarrollará una u otra. Esto es, se pueden encontrar niños que frente

a una tarea procedan de una determinada forma, y en otra tarea lo hagan desarrollando estrategias de otro orden.

Técnicas de conteo: La descomposición

En la medida que el niño avanza en el trabajo de la composición, se le deben proponer actividades tendientes a la descomposición, la cual es su operación inversa. Por tal razón si la composición genera la suma, esta generará la resta.

La descomposición se da en actividades en las cuales a partir de una cantidad dada se deben hallar dos o más cantidades (no necesariamente iguales) tales que al juntarlas completen la cantidad dada. La descomposición se basa en la composición, y en la medida que el alumno construye estrategias para la composición de dos cantidades, también podrá desarrollar estrategias para la realización de la descomposición.



Para que desde la descomposición se pueda generar la resta, se debe proponer actividades en las cuales el niño dada una cantidad y una de las partes deba hallar el otro, o actividades de sustraer una cantidad de otra. Las estrategias que el niño desarrolla para solucionar estas tareas son similares a las descritas anteriormente para la composición, en tanto que pueden ser de tipo perceptual, cuando el niño necesita de realizar la actividad física, de realizar la sustracción o el completar. En el caso de que el niño se pueda representar las cantidades a operar, puede ser que la tarea sea solucionada a partir de completar, en cuyo caso se trata de una composición, o puede ser que se realice la sustracción a través de un conteo descendente que determina el resultado final y un conteo ascendente interno que determina cuándo parar el conteo descendente. Por último, puede ser que el niño realice la operación sin necesidad de recurrir al conteo.

La descomposición es una herramienta muy útil cuando el niño se ve enfrentado a realizar la suma de dos o más cantidades. Por ejemplo para sumar 4 y 3 puede descomponer el 4 en 3 y 1, por lo que su suma se transforma en 3 + 3 + 1, la cual es más fácil de realizar. Igualmente sucede si se trata de cantidades de rangos más altos. En estos casos la herramienta economiza cálculos.

Técnicas de conteo: los conteos de unidades múltiples

Otro tipo de conteos de suma importancia, son aquellos en los que la unidad de conteo no es la unidad (1): se trata de los conteos de dos en dos, de tres en tres, etc. Estos conteos permiten desarrollar estrategias más eficientes para resolver situaciones aditivas (sumas o restas) que involucren números grandes, y sobre todo, porque sirven de base para iniciar aprendizajes relacionados con situaciones multiplicativas (multiplicaciones o divisiones).

De especial importancia son los conteos de cinco en cinco y de diez en diez. Estos conteos, son claves para una buena comprensión del Sistema de Numeración Decimal, y para desarrollar estrategias de cálculo mental eficientes.

En estos casos, cuando el conteo se puede hacer ya no solo de uno en uno, sino de dos en dos, tres en tres, etc., y además, de forma ascendente y descendente, entonces, se dispone de una herramienta importante para iniciar la comprensión de la multiplicación y la división.

3. COMPRENSIÓN DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

El Sistema de Numeración Decimal es ante todo un sistema simbólico para la representación escrita de los números. Pero contrario a lo que pueden pensar muchas personas, su aprendizaje no es cuestión sólo de memoria, sino que requiere de la estructuración de una serie de reglas lógicas y relaciones, que constituyen el entramado conceptual de éste. Por esta razón, es muy común encontrarse con que las personas utilizan el Sistema de Numeración Decimal de manera mecánica pero no comprenden por qué funciona. Esta situación se hace más evidente en los algoritmos convencionales, en los cuales, la lógica que los sustenta descansa fundamentalmente en el Sistema de Numeración Decimal.

El Sistema de Numeración Decimal (SND), es un sistema posicional, multiplicativo y de base 10.

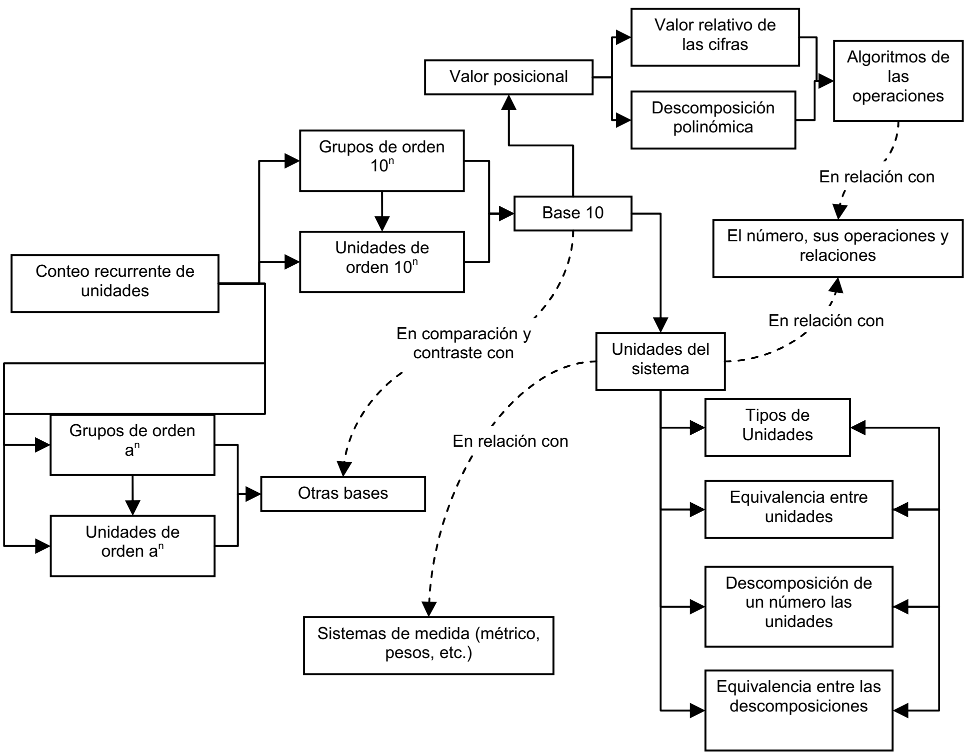
Que sea posicional, significa que las cifras que se escriben en el numeral, tienen un valor según el lugar ocupado en el mismo. Así, por ejemplo, en el número 4745, el cuatro de la izquierda no tiene el mismo valor que el cuatro de la derecha. El primero significa $4x10^3$, esto es, 4 veces 1000, lo cual es equivalente a 4000, mientras que el otro cuatro significa $4x10^1$, es decir 4 veces 10, lo cual es equivalente a 40.

El ser multiplicativo queda expresado en el hecho de que el valor relativo de una determinada cifra es calculado a partir de la multiplicación de la cifra por alguno de los factores 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, etc., según el lugar ocupado por la cifra. De esta manera, el valor total expresado en el numeral, queda determinado por la suma de los valores relativos de cada una de las cifras que lo componen.

En cuanto al carácter decimal, se tiene que su base es 10 y por ende maneja 10 símbolos para expresar cantidades. Además, realiza agrupaciones de 10 y en consecuencia, se constituye de las unidades de orden 10^0 denotadas como unidades, las unidades de orden 10^1 denotadas como decenas, etc. Estas agrupaciones se establecen en orden creciente e inclusivo: cada una de ellas se conforma de unidades de las del orden inmediatamente anterior. De esta forma se establece una regla de equivalencia que las relaciona entre si: toda unidad es 10 veces la unidad de orden inmediatamente anterior y la décima parte de la unidad inmediatamente superior. Este proceso de equivalencia es de gran importancia en el desarrollo del cálculo mental ya que permite la composición o descomposición de un número en las diferentes unidades del sistema. No debe confundirse dicho proceso con la identificación del valor de posición de una cifra.

Por ejemplo, una cosa es que en el número 150, en el lugar de las cifras de las decenas halla un cinco, y otra cosa es ver que ese número tiene en total 15 decenas (y no cinco como comúnmente responden los alumnos). Los dos aprendizajes son necesarios, es decir, los alumnos tienen que comprender el valor de posición de las cifras, pero también deben comprender las equivalencias de la cantidad expresada en las distintas unidades del sistema. Esta comprensión permite generar múltiples estrategias de cálculos no convencionales, los cuales como se ha insistido ampliamente, son muy importantes para desarrolla en pensamiento matemático, y como se mostrará, mas adelante, es una comprensión clave para la comprensión de los algoritmos convencionales.

Adicionalmente, el Sistema de Numeración Decimal, está en estrecha relación con dos aspectos del aprendizaje de los números muy importantes: Los algoritmos de las operaciones básicas, y el aprendizaje de las palabras número.



Los algoritmos para las operaciones básicas y el SND

El aprendizaje de las operaciones básicas se fundamenta en las propiedades básicas del Sistema de Numeración Decimal: las composiciones, las descomposiciones y las equivalencias en las unidades del sistema, y el valor de posición. Por ejemplo, si un alumno que nació en 1993 debe calcular su edad en el año 2001, entonces debe restar de 2001, 1993, la cual se sabe es bien difícil de realizar a partir del algoritmo convencional. Pero si los alumnos están acostumbrados a pensar en términos del Sistema de Numeración Decimal, entonces pueden ver, el 2001 como 2000+1 (o también, 2×1000+1) y el 1993 como 1000+900+90+3 (o también, 1×1000+9×100+9×10+3×1). Esta lectura del número le permite, por ejemplo, escribir,

2000 + 1

menos,

1000+900+90+3,

y por tanto realizar la resta de izquierda a derecha, incluso mentalmente, por ejemplo, a través de una secuencia de operaciones como la siguiente: 2000-1000=1000; 1000-900=100; 100-90=10; 10-3=7 y 7+1=8. Nótese que es un procedimiento no convencional, pero que manifiesta una muy buena comprensión de los números. Este tipo de procedimientos, a todas luces son preferibles a la aplicación mecánica de algoritmos, en los cuales un alumno puede obtener como respuesta 1002, y no inmutarse por el resultado.

Un aspecto central sería entonces cómo llevar al alumno desde esas descomposiciones particulares en las unidades del sistema, y de los algoritmos particulares que se han inventado sobre dichas descomposiciones, a la comprensión y significación de las reglas de los algoritmos convencionales. Fundamentalmente los algoritmos expresan una economía de pensamiento. Por eso sintetizan una gran variedad de conceptos, y en eso radica su importancia. Lo importante es que su aprendizaje se base sobre lo que el alumno ya sabe hacer, y no como una imposición que haga desechar la comprensión ganada.

Las palabras número y el SND

El aprendizaje de las palabras número está estrecha relación con el Sistema de Numeración Decimal en tanto que éstas, si bien tienen cierta regularidad con respecto a la lógica de la escritura de lo numerales en el sistema, en algunos momentos rompen con la misma. Por ejemplo, para los números entre 0 y 9, cada nuevo número se obtiene al agregar una unidad al número inmediatamente anterior. Para cada uno de estos números hay un determinado símbolo, y por supuesto una palabra número distinta. A partir del 10 se inicia la repetición de los diez símbolos iniciales, pero los nombres son palabras nuevas. Para los números 11, 12, 13, 14 y 15 aunque son diez y uno, diez y dos, etc., sus nombres son palabras nuevas que no corresponde a la lógica de su construcción. Desde el 16 hasta el 19, los nombres de los números y la manera como se estructuran en el Sistema de Numeración Decimal son idénticas: diez y seis, diez y siete, etc. En el 20 se rompe nuevamente la regularidad entre las palabras número y el Sistema de Numeración Decimal, la cual se recupera entre el 21 y el 29. A partir de allí se rompe la secuencia sólo en las decenas completas. Este hecho del rompimiento de ambas estructuras es factor de dificultad en el proceso de aprendizaje de la numeración.
Teniendo en cuenta esta estructura y sus correspondientes relaciones, el Sistema de Numeración Decimal, brinda ventajas en cuanto a:

- La economía de símbolos utilizados en la representación de cantidades por grandes que estas sean.
- La capacidad de escribir numerales de forma clara y sin lugar a duda de confundir tal expresión con otra.
- La facilidad para realizar cálculos escritos pues se establecen reagrupaciones en los órdenes que se requieran.
- La estructura del sistema de numeración es la base de otros sistemas como el sistema métrico decimal.
- Es universal pues es referente en casi todas las culturas.

En síntesis, las unidades del sistema son potencias de 10. Se relacionan entre si a partir de la regla ser diez veces... o la décima parte de .... El valor de cada cifra en el numeral queda determinado por su posición en el mismo. Su comprensión es necesaria para el desarrollo del cálculo mental y de los algoritmos (convencionales o no) de las operaciones básicas. Su aprendizaje está en estrecha relación con el aprendizaje de las palabras número, tanto por las simetrías entre ambos sistemas, como por las rupturas de uno a otro.

4. LA COMPRENSIÓN DE LAS RELACIONES Y LAS OPERACIONES

Las relaciones de equivalencia y de orden

La relación de equivalencia

En el trabajo escolar, el signo igual se presenta al menos con dos significados: como operador y como relación de equivalencia. Uno de ellos, el segundo, es desatendido en la mayoría de propuestas de aula. El signo igual es entendido como un operador cuando éste expresa el resultado de realizar una determinada operación, por ejemplo en 5 + 3 = 8. Aquí el símbolo "igual" significa 8 es el resultado de sumar 5 y 3. O dicho de otra forma, el signo igual expresa que enseguida de él se debe escribir el resultado de expresar la operación, el cual, por supuesto, debe ser otro número. El otro sentido, igualmente importante, es la igualdad como relación de equivalencia (es decir en el sentido matemático de relación de equivalencia). En este caso, el signo igual expresa que las expresiones a cada lado de la igualdad son la una equivalente a la otra, y por tanto, pueden ser sustituidas una a la otra cuando sea necesario. Este sentido, necesario para el trabajo algebraico, debe ser iniciado desde los primeros años

de la escolaridad, y de esta forma tener bases sólidas para su comprensión en el contexto del desarrollo del pensamiento variación.

La igualdad como relación de equivalencia tiene las siguientes propiedades:

Reflexiva:	A = A
Simétrica:	SI A = B entonces B = A
Transitiva:	Si A = B y B = C entonces A = C

Además, con las operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división) cumple la llamada propiedad de uniformidad:

Ley uniforme: Si A = B entonces A*C = B*C

Pero surge una pregunta, ¿cómo lograr una estructura de trabajo en el aula que favorezca la comprensión de ambos sentidos de la igualdad?. Una opción es, en primer lugar, las actividades propuestas deben favorecer la reflexión sobre sus diferentes propiedades, y en segundo lugar, a través de la relación que establece la propiedad uniforme con las diferentes operaciones, favorecer el trabajo con las composiciones y descomposiciones aditivas y multiplicativas.

Así por ejemplo, a través de un juego como el parqués, se puede analizar las diferentes posibilidades de obtener 6 utilizando los dos dados.

Se obtiene por tanto una secuencia como la siguiente:

5+1; 4+2; 3+3; 4+2 y 5+1

a partir de los cuales se puede llegar a establecer que 5+1 es equivalente con 4+2 no tanto por el hecho de que ambas sumas tienen el mismo resultado, sino fundamentalmente, porque uno de los sumandos (el 5) ha disminuido en una unidad, y el otro, (el 1) ha aumentado esa misma unidad. Así pues, para que se pueda reflexionar sobre el significado del signo igual como relación de equivalencia se deben proponer actividades en las que el control de la misma, es decir, el establecimiento de la equivalencia no descanse únicamente en la solución de la operación indicada, sino que se deben propiciar reflexiones sobre las regularidades subyacentes en los procesos de variación numérica.

Adicionalmente, a partir del análisis de las regularidades numéricas presentes en los procesos de variación, se pueden conceptualizar las propiedades de la igualdad como relación de equivalencia, fundamentalmente la propiedad transitiva, la cual es la menos intuitiva de las tres.

El sentido y significado del signo igual trabajado desde esta perspectiva, presenta relaciones importantes con respecto al pensamiento numérico y el variacional. Con respecto al pensamiento numérico se tiene la relación entre las operaciones y la relación de equivalencia, una ampliación del sentido del concepto de número y una ampliación del significado mismo de las operaciones[17].

Con respecto al pensamiento variacional se tiene el inicio de un proceso de conceptualización de la relación de equivalencia, el reconocimiento de invariantes a través del estudio de procesos de variación, y por esta vía, se inicia el proceso de conceptualizar la noción de variable.

La relación de orden

Aunque en la escuela se hable de dos relaciones de orden: las relaciones "mayor que" (>) y "menor que" (<), en el sentido estricto de la palabra basta trabajar una de ellas. De hecho, desde el punto de vista formal solo se define la relación "mayor que" (). Así, sería mucho más conveniente iniciar el trabajo con la relación "mayor que", y luego, mostrar, que el otro símbolo, (<), es una manera distinta de expresar la misma relación entre los números, sólo que en esta ocasión, el menor se escribe de primero. A pesar de decir que A > B, tiene un sentido equivalente a decir B < A, para los alumnos esta equivalencia en los sentidos de ambas expresiones no es transparente. La distinción "mayor que", "menor que", es más pedagógica que matemática, y puede ser la fuente de las dificultades de los alumnos, no para determinar cuando un número es mayor o menor que otro, sino para la utilización de los dos símbolos. En este sentido, un trabajo de manera simultánea en ambas relaciones puede aumentar las confusiones, y en contraste, una fuerte significación de la una, y sobre esa base, estudiar la otra puede ayudar a su reconocer sus diferencias y similitudes. La relación de orden, así como la relación de equivalencia, tiene sus propiedades matemáticas[18]:

Anti-reflexiva: A no es mayor que A

Anti-simétrica: Sean A y B dos números cualesquiera, si A > B y B > A, entonces A = B

Tricotómica: Sean A y B dos números cualesquiera, entonces solo una de las tres situaciones se puede presentar: A > B, ó A < B, ó A = B

Transitiva: Si A > B y B > C entonces A > C

---

17 En sentido, y siguiendo el concepto de sistema propuesto por el Dr. Carlos Eduardo Vasco en la renovación curricular, se establece que los números, las relaciones y las operaciones tienen vínculos muy estrechos en tanto de las operaciones permiten la construcción de nuevos objetos en el sistemas (esto es, números) y las relaciones permiten la construcción de proposiciones sobre los objetos y sus operaciones. De esta manera se logra ampliar el concepto de número, trascendiendo la idea clásica de que un número es una colección de objetos, y se muestra que un número esta en relación con las operaciones que se pueden realizar con ellos (cinco no solo es una colección de 5 objetos, sino 4+1, 3+2, etc.). Igualmente las propiedades de la relación de equivalencia se verán como afirmaciones sobre los números, los cuales tienen carácter de generalidad (son válidas para cualquier número), es decir, las propiedades son proposiciones.

18 La comprensión de estas propiedades, sobre todo la anti-simétrica, es bastante difícil para los alumnos. Esto sobre todo porque los alumnos, al pensar en dos números, de hecho al ser dos, son diferentes, y por tanto, uno es mayor que el otro, y por supuesto, no hay ninguna posibilidad que de manera simultánea ese mismo número también sea menor que el otro, luego entonces, ¿cómo pueden llegar a ser iguales?. Esta es una comprensión que sólo puede darse desde la formalidad de la teoría. Por tanto, habría necesidad de pensar estrategias, o incluso alternativas de formulación de estas propiedades de tal forma que se hagan más intuitivas para los alumnos. Por ejemplo, el Dr. Vasco, propone formulaciones como las siguientes para las propiedades anti-simétricas y tricotómica:

Anti-simétrica: Si uno escoge un número al azar y lo llama A, y hace lo mismo pero al número que salga lo llama B y además los dos números son distintos, entonces si B es mayor que A, B nunca es mayor que A.

Tricotómica: Si uno escoge un número al azar y lo llama A, y hace lo mismo pero al número que salga lo llama B, entonces siempre sucede una de tres cosas: o B es igual a A, o B es mayor que A, o B es B es menor que A.

Particularmente, una formulación tal de la propiedad anti-simétrica, si bien es más intuitiva, debilita su significado.

Ahora bien, la relación de orden, en un primer momento de su conceptualización está unida al orden de la secuencia de palabras número, así por ejemplo, 5 es mayor que 3 porque 5 está después de 3 en la secuencia (aquí el orden de la secuencia no es pensado tanto el sentido de la secuencia verbal, sino, en el sentido de la organización espacial de los números a través de una recta numérica). Para que la relación esté constituida como tal, se debe llegar a establecer que un número es mayor que otro porque hay una determinada cantidad de unidades de diferencia entre el mayor y el menor. En este proceso de cuantificación de la diferencia, las operaciones "uno más" y "uno menos"; "dos más" y "dos menos"; etc., son fundamentales.

Vale la pena anotar que en el preescolar, se trabaja con la operación "el siguiente de", o "el anterior a", pero ambas relaciones quedan unidas, a la secuencia verbal de las palabras número, lo cual trae una

fuente adicional de dificultades: 5 es mayor que 3 no porque se pronuncie después del 3 en la secuencia verbal, pues si la secuencia se pronuncia en orden descendente, se llegaría a la conclusión contraria. 5 es mayor que 3 porque espacialmente queda después del tres, pero sobre todo, porque tiene dos unidades más que el 3. Si este trabajo se hace unido a los operadores "uno mas" o "uno menos", entonces se prepara de manera clara el camino para la conceptualización de las relaciones de orden en el sentido anterior, y de las composiciones descomposiciones básicas.
La comprensión de las operaciones[19]

Tradicionalmente al aprendizaje de las cuatro operaciones básicas se destina una buena parte de los cuatro primeros años de la educación básica. Pero además, este aprendizaje prácticamente está reducido al aprendizaje de los algoritmos convencionales y a la aplicación de estos algoritmos a la solución de problemas típicos, clasificados según la operación que se esté estudiando en el momento.

El trabajo así realizado no permite a los alumnos desarrollar habilidades y destrezas en el cálculo mental, en la comprensión y la solución de problemas, en la comprensión misma del sentido y significado de las operaciones.

Por ejemplo, los alumnos ante un la solución de problema generalmente le preguntan al maestro(a) '¿la operación que hay que hacer es una suma o una resta?'. Una vez que el alumno obtiene la respuesta resuelve correctamente el problema. Este tipo de situaciones pone en evidencia que los alumnos no comprenden el sentido y significado de las operaciones sumar y restar, quizás tan solo saben los algoritmos convencionales para calcular los resultados. Es mas, situándose en una posición extrema se

podría decir que estos alumnos, no saben las operaciones sumar o restar, tan solo saben un método para calcular los resultados de hacer estas operaciones: los algoritmos convencionales.

Operar y calcular

Como se esbozó antes, el trabajo escolar se centra en la enseñanza de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas. Constance Kamii, en su libro, Reinventando la aritmética III, postula que este énfasis en la enseñanza de los algoritmos, perjudica, antes que beneficiar, el desarrollo del pensamiento matemático de los niños. Esto en tanto que la utilización de los algoritmos convencionales desde los primeros años de la educación básica inhibe que los niños inventen sus propias formas de realizar los cálculos relativos a las operaciones que deba realizar, y por tanto, genera una excesiva confianza en los resultados que obtiene a través de ellos, y así al obtener resultados erróneos no tiene ninguna herramienta adicional para estimar la viabilidad de su resultado, que la aprobación de su profesor. Esto claramente atenta contra la autonomía intelectual de los alumnos.

[19] Esta sección sirvió como base para el documento Generalización y Conceptualización: El Caso de las Estructuras Aditivas. Publicado en Cuadernos Pedagógicos. Nro. 16. P 75-90. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. 2001.

De otra parte, como se describió antes, la comprensión de las reglas del funcionamiento de los algoritmos básicos se fundamenta sobre la comprensión de las reglas de sistema de numeración decimal, las cuales, para los niños antes de cuarto o quinto grado, están lejos de sus posibilidades de comprensión. Quizás sea esta la razón por la cual los maestros se ven en la necesidad de emplear tanto tiempo y esfuerzo para enseñar unos procesos algorítmicos, que el estudiante, en el mejor de los casos, termina mecanizando sin ninguna comprensión, y que finalmente termina confundiendo y olvidando con suma facilidad.

Se hace pues, necesaria la distinción entre la operación y el cálculo. La operación comporta ante todo el aspecto conceptual ligado a la comprensión del sentido y significado matemático y práctico de las operaciones; mientras que por su parte el cálculo está ligado a las distintas maneras que pueden existir para encontrar un resultado, entre las cuales se pueden destacar: los algoritmos convencionales y los no convencionales, el cálculo mental, la utilización de una calculadora, de un ábaco, etc.

Así, el trabajo en la escuela debe iniciar por el estudio de las operaciones (no de los algoritmos), apoyado sobre formas de cálculo no convencionales (tales como las inventadas por los propios alumnos, o a través de ábacos, calculadoras, etc.), para desde estas estrategias particulares, fundamentar el aprendizaje de los algoritmos convencionales, sobre la base de una buena comprensión de los números, las operaciones y el sistema de numeración decimal. Así, loas algoritmos estarán en la escuela no como la única manera de calcular, sino como una forma entre otras, eficiente en uno casos (por ejemplo, para hacer cálculos con números muy grandes) innecesarios en otros (por ejemplo, cuando se trabaja con números pequeños, o con números seguidos de ceros, tales como 3500+2000)[20].

En el documento del MEN sobre los lineamientos curriculares en matemáticas (1988), se expresa lo siguiente a propósito de la comprensión de las operaciones:

> Los aspectos básicos que según varios investigadores (por ejemplo, NTCM, 1989; Dickson, 1991; Rico, 1987; McIntosh, 1992) se pueden tener en cuenta para construir el significado de las operaciones y que pueden dar pautas para orientar el aprendizaje de cada operación tiene que ver con:
>
> Reconocer el significado de la operación en situaciones concretas, de las cuales emergen;
>
> Reconocer los modelos más usuales y prácticos de las operaciones;
>
> Comprender las propiedades matemáticas de las operaciones;
>
> Reconocer el efecto de cada operación y las relaciones entre operaciones.
>
> En el proceso de aprendizaje de cada operación hay que partir de las distintas acciones y transformaciones que se realizan en los diferentes contextos numéricos y diferenciar aquellos que tienen rasgos comunes, que luego permitan ser consideradas bajo un mismo concepto operatorio. Por ejemplo, las acciones más comunes que dan lugar a conceptos de adición y sustracción son agregar y desagregar, reunir y separar, acciones que trabajan simultáneamente con la idea de número.
>
> Al destacar los aspectos cuantitativos de las acciones en donde el niño describe las causas, etapas y efectos de una determinada acción, en una segunda etapa está abstrayendo las diferentes relaciones y transformaciones que ocurren en los contextos numéricos haciendo uso de diversos esquemas o ilustraciones con los cuales se está dando un paso hacia la expresión de las operaciones a través de modelos.
>
> MEN, 1998

[20] La NCTM, en sus Standares 2000, plantean que no tiene sentido utilizar los algoritmos convencionales, por ejemplo el de la suma, para sumar cantidades tales como 8+5, o 50+20. En estos casos se debe promover estrategias de cálculo, como el cálculo mental. Pero esto no es posible de lograr, si lo primero que se le enseña al niño sobre la suma, es el algoritmo convencional.

Sentido de número y estimación

A través del cálculo mental desde esta perspectiva, se pueden explorar las distintas propiedades de las operaciones, el sentido y significado de las reglas bajo las cuales operan los cálculos abreviados, por ejemplo, las reglas para multiplicar por 10, 100, 1000, etc., también desde el cálculo mental se puede estimular formas particulares de hacer los cálculos.

Además, es importante resaltar que el cálculo mental no solo se desarrolla cuando se opera en la mente. También se hace cálculo mental con la ayuda instrumentos como el lápiz y el papel, o la calculadora. En este sentido más general, el cálculo mental hace referencia a todas aquellas situaciones en las que los alumnos tengan que hacer uso de los recursos del intelecto para solucionar una determinada situación problema y en la que pueden utilizar múltiples estrategias, procedimientos y herramientas.

Con los aprendizajes básicos de los primeros años de escolaridad no termina el desarrollo del sentido numérico. Este se hará más profundo en la medida que se disponga de nuevas herramientas matemáticas para pensar y representarse más significativamente los números.

Por ejemplo, los niños muy pronto aprenden que los números naturales son infinitos, lo cual significa una multitud de cosas para ellos: que son muchos, que no tienen fin, que siempre habrá uno más grande que otro cualquiera dado, etc. ¿pero, todas estas ideas expresan el mismo sentido de número? Claramente no. Cada idea expresa un nivel de pensamiento distinto. Más aun, cuando los alumnos puedan pensar las implicaciones matemáticas[21] que tiene el hecho de que los distintos conjuntos numéricos sean infinitos, tendrán una nueva perspectiva para pensar el número. Obviamente estas conceptualizaciones relacionadas con la infinitud de los distintos conjuntos numéricos no pueden ser pensadas con éxito por los alumnos de los primeros años de la educación básica.

Con respecto a la estimación vale la resaltar que es un aspecto muy poco tratado en nuestro currículo. Prueba de ello son los bajos resultados obtenidos en la evaluación TIMSS en este aspecto. La estimación implica un pensamiento flexible y un buen conocimiento de los números, sus operaciones, sus propiedades, y sus relaciones. Sowder, 1992, plantea que existen tres procesos claves que caracterizan los buenos estimadores:

> La reformulación: es el proceso de alterar datos numéricos para producir un forma más manejable mentalmente pero dejando la estructura del problema intacta.
>
> La traslación: se cambia la estructura matemática del problema a otra mentalmente más manejable.
>
> La compensación: se realizan ajusten que reflejan las variaciones numéricas resultado de la reformulación o traslación realizada.
>
> los buenos estimadores son individuos que tienen la habilidad de usar los tres procesos, tienen un buen conocimiento de hechos básicos numéricos, valor de posición, y las propiedades aritméticas; son hábiles en el cálculo mental; son conscientes y tolerantes del error; y pueden usar una gran variedad de estrategias y cambian fácilmente de estrategias. Sowder, 1992

La estimación se constituye entonces en una herramienta de cálculo potente, sobre todo en aquellas situaciones en las que no se necesita un resultado exacto. La estimación también nos permite determinar lo razonable de un cálculo determinado.

---

[21] Por ejemplo poder comprender que hay tantos números naturales como números pares, es decir que el conjunto de todos los números naturales tiene la misma cantidad de elementos que el conjunto de todos los números pares. O que existen tantos números naturales como enteros.

Trascender los números naturales

El aprendizaje del concepto de número no se agota con los aspectos relativos al concepto del número natural, y por ende se extiende, al menos, a lo largo de toda la educación básica. En el currículo se pueden identificar, segmentos dedicados al estudio de los diferentes sistemas numéricos, los cuales se encuentran separados en el tiempo de acuerdo a niveles crecientes de complejidad lógica formal. Pero a pesar de este trabajo diferenciado, los niveles de conceptualización que se alcanzan son muy pobres, lo cual pone en evidencia que realmente los alumnos no logran trascender un nivel de pensamiento matemático más allá de los números naturales[22].

Trascender los números naturales debe entenderse en el sentido de la necesidad de proveer a los estudiantes de un conjunto amplio y complejo de situaciones a través de los cuales pueda realizar las comprensiones conceptuales relativas a los otros sistemas numéricos, fundamentalmente los enteros, los racionales y los reales. Si bien es cierto que el estudio formal de algunos de estos sistemas solo puede darse hacia los últimos años de la educación básica, o incluso, en la educación media, también lo es que existen múltiples contextos y situaciones a través de las cuales los estudiante pueden desarrollar intuiciones primarias sobre los enteros y los racionales, incluso desde el preescolar. De esta manera se el aprendizaje del número natural está acompañado de un trabajo que muestra la existencia de otros sistemas numéricos preparándose así el camino para su estudio formal en momentos posteriores.

Pero además, el trabajo formal en otros sistemas numéricos diferentes a los números naturales debe ser desarrollado a partir de situaciones que permitan la construcción de los múltiples sentidos y significados de cada uno de ellos. Así por ejemplo, el estudio de los números racionales debe permitir la construcción de los sentidos y significados relativos a medida, fracciones, razones, proporciones, porcentajes, campo de cocientes. De igual forma, el estudio de los números enteros debe darse a partir de situaciones que involucren las medidas relativas, y el cambio de medidas, contextos dentro de los cuales se dan las bases fenomenológicas de éstos.

De esta manera se logra que el estudio de los aspectos formales de cada uno de los sistemas numéricos, incluidos los naturales, esté sustentado sobre una base fenomenológica fuente de sentido y significado para cada uno de ellos.

Bibliografía

ALVAREZ G, Jairo; TORRES, Ligia; GUACANEME Edgar. Tercer estudio internacional de matemáticas y ciencias. Análisis y resultados Prueba de matemáticas. Santafé de Bogota. 1997

DECORTE, Lieven; VERSCHAFEL, Eric. Number and Arithmetic. International Handbook of Mathematics Education, 1996, p .

DICKSON, L.; BROWN, M. y GIBSON, O., El aprendizaje de las matemáticas, Barcelona, Editorial Labor, S.A., 1991.

DUVAL, Raimond. semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes, 1995.Traducción al español de Myran Vega Restrepo. 1999.

GARCÍA, Gloria, SERRANO, Celly. La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva cultural. Cuadernos de matemática educativa. Asociación Colombiana de Matemática educativa.1999.

GREER, Brain. Multiplication and División as Models of Situation. p 276-295.

KAMII, Constance. Reinventando la Aritmética III. Implicaciones de la Teoría de Piaget. Traducción de Genís Sánchez Beltrán. Edición Visor. 1994.

[22] Prueba de ello, se evidencia en que los estudiantes al final de la educación básica no tienen una comprensión de los sentidos y significados de los números racionales o reales, o incluso de los números negativos.

LEHS, Richard; POST, Thomas; BEHR, Merlyn. *Proportional Reasonig*. In Number concepts and operations in the middle grades. James Hierbert and Merlyn Behr (eds.). National Council of Teacher of Mathematics. Virginia (USA): Lawrence Erlbaum associates. 1988. Pgs. 93-117.
MCINTOSH, A.; REYS, B. J. y REYS, R. E., A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. For the Learning of Mathematics 12, 3 (November 1992), FLM Publishing Association, White Rock, British Columbia, Canadá, 1992. Citado en: NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática, Edición en castellano: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES", Sevilla, 1989.
MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Santafé de Bogotá, 1998, p 131.
MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Nuevas tecnologías y currículuo de matemáticas. Santafé de Bogotá, 1999, p 81.
NCTM. Estandares Curriculares y de Evaluación. Traducción al español de José María Álvarez F. y Jesús Casado Rodríguez. Sociedad Andulza de Educación Matemática THALES. 1989.
NCTM. Standars 2000.
PIAGET. Jean. Introduccion a la Espistemología Genética. Editorial Paidos, p 313, 1975.
SOWDER, Judith. *Estimation and Number Sence*. En Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Edited by Douglas A. Grouws. National Council Teacher of Mathematics. 1992.
VASCO U, Carlos E. *Sobre Pedagogía y Didáctica.* En Pedagogía Discurso y Poder. Mario Díaz y José A Muñoz (Editores). CORPRODIC, Santafé de Bogotá.1990. p 105 – 122.
VASCO U., Carlos E.. *La educación matemática: una disciplina en formación*. En Matemática Enseñanza Universitaria. Vol III. Nro 2. 1994. Pgs. 59-76.
VERGNAUD, Gerard. El Niño, las Matemáticas y la Realidad. Editorial Trillas. Mexico. P 275, 1991.
VERGNAUD, Gerard. *La teoría de los campos conceptuales*. En Lecturas de didáctica de las matemáticas, escuela francesa. Compilación de Ernesto Sánchez y Gonzalo Zubieta. 1993. Traducido de: La theorie des Champs Conceptuales. Recherches en didactiques des mathematiques. Vol 10. Nros 2 y 3. 1990. Pgs. 133-170.
VERGNAUD, Gerard. Le Moniteur de Mathematique: Fichier pedagogique. Editons Nathan.Paris 1993.
VERGNAUD, Gerard. Multiplicative Structures. In Acquisitions of mathematics concepts and processes. Richard Lesh and Marsha Landau (eds.). New York: Academic Press. 1983. Pgs. 127-194.
VERGNAUD, Gerard. *Multiplicative Structures*. In Number concepts and operations in the middle grades. James Hierbert and Merlyn Behr (eds.). National Council of Teacher of Mathematics. Virginia (USA): Lawrence Erlbaum associates. 1988. Pgs. 141-146.
WEARNE, Diana; HIERBERT James. Constructing and Using Meaning for Mathematical Symbol: The Case of Decimal Fraction (mímeo).