NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 95, julio de 2017, páginas 107-121

Constatación empírica y uso de propiedades para la validación de conjeturas utilizando GeoGebra

Magali Freyre
Ana María Mántica

Resumen

Se presenta el análisis de una actividad cuyo propósito es que estudiantes de 14 y 15 años enuncien las propiedades de las diagonales del rectángulo utilizando GeoGebra. Se observan documentos regulatorios, el protocolo del software, grabaciones de audio y video, las conclusiones obtenidas y el intercambio producido. Se estudian las conjeturas de las propiedades y los procesos de validación de dos grupos. Los alumnos hacen constataciones empíricas, efectuando mediciones con la herramienta *Distancia o longitud*, en un caso para comprobar lo anticipado y en otro para establecer la conjetura. No recurren a propiedades geométricas para inferir y validar el resultado. Si bien el software admite una modificación continua del dibujo de la pantalla generando otros dibujos asociados a la misma figura, no sienten la necesidad de utilizar el arrastre.

Palabras clave GeoGebra – Rectángulo - Propiedades – Conjeturas - Validación

Title **Empirical verification and use of properties for the validation of conjectures using GeoGebra**

Abstract

It is provided the analysis of an activity that is solved by students of 14 and 15 years old. The activity aims to mention the properties of the diagonals or the rectangle using GeoGebra. Curriculum designs, construction protocol software files, audio and video records, conclusions obtained and the exchange of ideas produced, are considered for the analysis. It is considered the study of conjectures about properties and processes of validation of two groups of students. They do empirical proofs using *Distance or length* tool. They perform measurements for two objectives, to check ideas already expected and to make conjectures. Students don´t use geometric properties to infer and validate the result. Even though the software allows them to make continuous changes in the drawing that appears on the screen, they don´t deem necessary to use this dragging capability.

Keywords GeoGebra – Rectangle - Properties – Conjectures - Validation

1. Introducción

Se presenta una actividad realizada por un grupo de estudiantes con edades de 14 y 15 años de segundo año de escuela secundaria de la ciudad de Santa Fe (Argentina), a partir de una consigna que pretende que se enuncien las propiedades de las diagonales del rectángulo utilizando GeoGebra. Se expone el análisis previo y el de su implementación. En este último se analizan particularmente las conjeturas acerca de las propiedades y los procesos de validación llevados a cabo por los alumnos, teniendo en cuenta el recurso empleado para su producción.

Los estudiantes trabajaron previamente con el software GeoGebra, realizando construcciones de paralelogramos y rectángulos. También verificando las propiedades del paralelogramo por lo que conocen las herramientas básicas de la *Apariencia Geometría* y el modo de determinar otras en función de las pestañas y de la ayuda que brinda el software. Es importante el uso regular de software, esto permite a los alumnos desarrollar conocimientos matemáticos e informáticos (vinculados al uso del software) y articularlos.

2. Marco de referencia

Exponemos brevemente los principales referentes considerados para el análisis que se presenta en este artículo.

De Villiers (2003) presenta para definir un conjunto de conceptos geométricos, en general y en particular los cuadriláteros, dos tipos de clasificaciones: jerárquicas y particionales. Las jerárquicas son aquellas en las que los conceptos más particulares son subconjuntos de los más generales. Las particionales, en cambio, refieren a aquellas en las que los subconjuntos de conceptos son disjuntos entre sí. Las clasificaciones jerárquicas se basan en definiciones más económicas lo que posibilita una simplificación del sistema deductivo. Si se define un concepto A como subconjunto de otro concepto B, por la clasificación jerárquica no es necesario volver a demostrar las propiedades del concepto B para A. También permiten que se desarrolle una perspectiva global que es útil dado que posibilita una mejor comprensión de la relación entre los conceptos, en cuanto la intersección de algunos conceptos generales, produce las propiedades de algunos conceptos particulares. Las dificultades que manifiestan los alumnos relacionadas con las clasificaciones jerárquicas tienen que ver con su carácter lingüístico y funcional. Lingüístico porque implica una interpretación correcta del lenguaje usado en esta clasificación; y funcional ya que implica una comprensión acerca de qué aspectos hacen que este tipo de clasificaciones resulte más útil que las particionales en algunos casos. Algunas dificultades están relacionadas con el significado de la palabra “es” en oraciones como “un cuadrado es un rectángulo”. Se entiende “es” como “es lo mismo que” o “es equivalente a”. Podría explicitarse: “un cuadrado es un rectángulo especial” lo que podría ser más claro para los estudiantes. Teniendo en cuenta estas dificultades, es conveniente proponer actividades en las que los alumnos se involucren eligiendo la clasificación que crean conveniente, probando todas las propiedades que sean necesarias, para así arribar a la conveniencia de las clasificaciones jerárquicas. El trabajo con software de geometría dinámica (SGD) contribuye a que los alumnos vean y acepten la posibilidad de realizar inclusiones jerárquicas modificando las construcciones y encontrando casos particulares.

Respecto al trabajo con este tipo de recursos, Arcavi y Hadas (2000) afirman que el desempeño en los ambientes dinámicos favorece la visualización, aspecto fundamental en el aprendizaje de los conceptos geométricos. Trabajar con SGD brinda a los estudiantes la posibilidad de construir figuras, visualizarlas y transformar las construcciones. Sostienen que el carácter dinámico de estos software contribuye a desarrollar en los estudiantes el hábito de transformar un ejemplo particular y de este modo estudiar sus variaciones, obtener pistas de lo que se mantiene constante y por tanto puede facilitar justificaciones intuitivas de conjeturas matemáticas que pueden ser base para la realización de pruebas cada vez más formales. A través de la experimentación los alumnos pueden comparar, cambiar y modificar las figuras. Esta facilidad de obtener muchos ejemplos favorece la producción de conjeturas y generalizaciones. La retroalimentación es realizada por el software mismo. Cuando se generan desigualdades entre las expectativas de una cierta acción y los resultados de esa acción, se produce una sorpresa que convoca al alumno a reanalizar su conocimiento, aspecto fundamental para el logro de aprendizajes significativos. El hecho de que la retroalimentación provenga directamente del ambiente computacional la hace más efectiva que la que podría realizar el profesor, no solo porque carece de juicios de valor sino porque posibilita la reflexión, la verificación y revisión de predicciones, motivando la necesidad de una demostración. Las actividades que se propongan en el aula y la forma de implementarlas deben considerar que se provoquen conflictos e inconsistencias que motiven encontrar maneras de resolverlos. “El reto es encontrar situaciones en las cuales el resultado de la actividad sea inesperado o contra-intuitivo, de tal forma que la sorpresa (o el desconcierto) generado cree una clara diferencia con las predicciones explícitamente enunciadas" (p.26).

Con respecto a la utilización de SGD en la clase de matemática, Laborde (1997) sostiene que amplía el campo de experimentación brindado por el trabajo con lápiz y papel. Mientras este último está limitado a la imprecisión del trazado y otras razones materiales, el software ofrece distintos tipos de representación gráfica integrando conocimientos geométricos.

> En un contexto de lápiz y papel, el alumno puede dar la vuelta al papel y ver el dibujo en diferentes posiciones, pero no puede hacer variar los elementos variables más que trazando otro dibujo, es decir, emprendiendo otra acción basada en sus conocimientos. (Laborde, 1997, p.40)

El desplazamiento por manipulación directa de estas representaciones se basa en propiedades geométricas y por tanto ofrece al alumno retroacciones que son exteriores a sus acciones. La interpretación del sujeto es fundamental para entender las relaciones entre dibujo y objeto geométrico. El contexto, los conocimientos y la naturaleza misma del dibujo influyen en la caracterización del objeto geométrico, en cuanto "…las propiedades espaciales del dibujo no pueden ser interpretadas como que remiten a propiedades del objeto: al dibujo está ligado un dominio de interpretación" (Laborde, 1997, p.36).

Esteley, Marguet y Cristante (2012) sostienen que GeoGebra es un recurso para enseñar Matemática que ofrece múltiples opciones. Así, "...permite proponer a los alumnos tareas de investigación y experimentación, que en la mayoría de los casos no requerirán demasiados conocimientos técnicos ya que bastará con conocer algunas herramientas básicas y algunos comandos sencillos para afrontarlas" (p.21). Desde su aspecto geométrico, el SGD asume dos principios básicos: dudar de lo que se ve y ver más de lo que se ve. El primero se refiere a la duda acerca de lo que se percibe en una imagen estática, y la posibilidad de confirmar invariantes haciendo uso del arrastre. El segundo se refiere a la posibilidad de estudiar relaciones que no están presentes a simple vista en la figura, permitiendo construcciones auxiliares y mediciones que favorecen un proceso de experimentación.

Novembre, Nicodemo y Coll (2015) sostienen que la utilización de una herramienta tecnológica en la clase de matemática abre la posibilidad de abordar problemas que serían imposibles sin su ayuda y permite adoptar un enfoque experimental de la Matemática que cambia la naturaleza de su aprendizaje. Afirman que no siempre es necesario pensar en nuevos problemas, sino que resulta interesante analizar de qué manera se pueden resolver los problemas con nuevas herramientas. En este sentido es importante que los docentes se planteen qué es lo que cambia en la enseñanza y el aprendizaje cuando se resuelve un problema conocido utilizando tecnología, cuáles son los aportes de la tecnología y, qué conocimientos tecnológicos y matemáticos son necesarios para un nuevo abordaje de la enseñanza de la matemática

Respecto al estudio de las propiedades de figuras geométricas, Itzcovich y Broitman (2001) sostienen que esto requiere conocerlas y poder disponerlas para validar conjeturas; lo cual implica un proceso más complejo que conocerlas perceptivamente y saber sus nombres. Contribuye a que se desarrolle un modo de pensar geométrico, que supone una anticipación de un resultado utilizando propiedades disponibles, y poder afirmar que este resultado es correcto porque dichas propiedades lo garantizan. "En geometría el modo de demostrar la validez de una afirmación no es empírico (por ejemplo, midiendo o dibujando), sino racional (a través de argumentos)" (p.3). El papel de la construcción resulta fundamental teniendo en cuenta que el solo hecho de que los alumnos miren dibujos que representan figuras geométricas no garantiza que identifiquen sus propiedades. Las actividades de construcción favorecen esta identificación de ciertas características y propiedades de los objetos geométricos que, por su utilidad en los procesos deductivos, adquieren importancia. “El desafío de las construcciones es considerar las propiedades ya conocidas de las figuras y tener en cuenta los datos dados. Exige a los alumnos tomar decisiones acerca del procedimiento de construcción y los instrumentos a utilizar” (p.21).

2. Metodología

La propuesta se implementa en un segundo año de escuela secundaria al que concurren 34 alumnos. Se acuerda con el docente del curso los días para implementar la actividad y se comunica a los alumnos que la misma se enmarca en un trabajo de investigación que requiere que sea grabada en audio y video. Se cuenta con el consentimiento de los estudiantes y las autoridades para desarrollar dos clases consecutivas de ochenta minutos de duración cada una y difundir en congresos y revistas especializadas en educación matemática el análisis del material recogido.

La institución cuenta con una sala especial que tiene disponibles 20 netbooks y un proyector. Para el trabajo con software específico se recurre al responsable del manejo de la sala a fin que realice su instalación. Estos recursos se disponen reservando previamente la sala.

La docente nos informa que en clases previas desarrolla las propiedades de lados, ángulos y diagonales del paralelogramo. Para la construcción de paralelogramos y elaboración de conjeturas de propiedades, hacen uso del software GeoGebra. Con respecto a la definición de rectángulo, utiliza una clasificación jerárquica al definirlo como paralelogramo con un ángulo recto.

La consigna planteada por el equipo de investigación consta de una primera parte que consiste en el trabajo de construcción de un rectángulo con GeoGebra y se realiza en parejas (17), con una netbook por binomio. Se utiliza el software GeoGebra que se encuentra instalado en las netbooks distribuidas en Argentina en el marco del programa Conectar Igualdad, creado en abril de 2010. Estudios de este tipo se han realizado en otros entornos dinámicos tales como Cabri, Sketchpad, entre otros.

El docente guía a los alumnos para que validen sus construcciones a través del arrastre, a fin de asegurarse que están correctamente elaboradas. A continuación, se conjeturan las propiedades de las diagonales del rectángulo. La segunda parte de la consigna, en grupos de cuatro, consiste en discutir y validar las propiedades de las diagonales conjeturadas por cada binomio.

Algunos de estos grupos en el encuentro siguiente exponen al resto de la clase sus conclusiones.

Para la recogida de datos se utilizan grabaciones de audio de las interacciones en los grupos de cuatro, grabaciones de video de la puesta en común y el archivo de GeoGebra correspondiente a cada construcción. El protocolo de construcción que ofrece el software permite la reconstrucción de lo actuado por cada binomio y es utilizado como insumo para el análisis.

Lo que brinda información más significativa relacionada a los procesos de validación, en este caso, es el protocolo del software y lo expuesto por los grupos.

Las conclusiones a las que arribaron los distintos grupos se pueden encontrar en Freyre y Mántica (2015) presentadas en el marco de las IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales.

En este artículo se elabora el estudio de dos casos, un grupo de cuatro estudiantes que realiza una constatación de su conjetura a través de la medición y otro que valida utilizando propiedades disponibles. Para este análisis se tienen en cuenta lo que proporciona el protocolo del software, grabaciones de audio y video, las conclusiones a las que arribaron, el intercambio producido en la puesta en común a la luz del marco de referencia considerado.

3. Análisis de la propuesta implementada

En este punto se presenta el análisis previo, que no es exhaustivo, realizado por los docentes que diseñan la propuesta y el análisis de su implementación, tomando para este caso en particular lo realizado por los dos grupos. La tarea propuesta, se elabora teniendo en cuenta las características del trabajo con clasificaciones jerárquicas y el uso del arrastre que proporciona el software.

La consigna de la tarea es:

Construye con GeoGebra un rectángulo. Nombra los vértices A , B , C , y D.

Traza sus diagonales. Nombra O al punto de intersección.

¿Qué propiedades cumplen las diagonales? Justifica tus afirmaciones.

3.1. Análisis previo

Presentamos en este apartado las posibles soluciones que pueden plantear los estudiantes en función de sus conocimientos previos. Considerando que son alumnos de segundo año de secundaria y teniendo en cuenta los documentos regulatorios, suponemos que han trabajado teorema de Pitágoras, criterios de congruencia de triángulos, transformaciones rígidas, propiedades de los ángulos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal, definiciones de paralelogramo y de rectángulo, propiedades de lados, ángulos y diagonales de un paralelogramo.

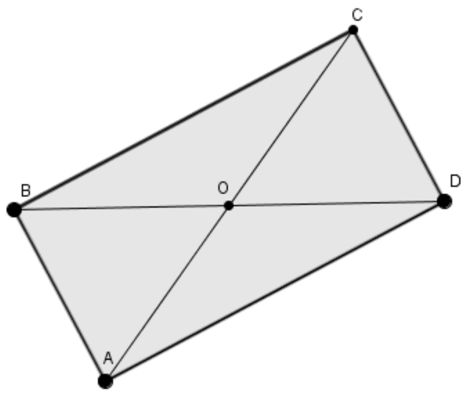

Figura 1

Detallamos los posibles procedimientos de validación sobre la conjetura: “O es punto medio de las diagonales.”

- Hacer uso de la herramienta *Distancia o longitud* que permite medir la longitud de los segmentos para determinar su igualdad.
- Utilizar la herramienta *Medio o centro* y verificar que O es el punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

- Hallar el simétrico de un vértice con respecto al centro utilizando la herramienta *Simetría central* y verificar que es el otro extremo del segmento.
- Considerar que el rectángulo es un paralelogramo, y como en todo paralelogramo las diagonales se cortan en su punto medio, en el rectángulo también.
- Recurrir a la comparación de triángulos empleando criterios de congruencia.

Presentamos dos posibles procedimientos:

1-

$\overline{AB}$=$\overline{CD}$ por ser lados opuestos del rectángulo, el ángulo $\widehat{BOA}$ es igual a $\widehat{COD}$ por ser opuestos por el vértice. $\widehat{CAD} = \widehat{ACB}$ por ser alternos internos entre las paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ y la transversal $\overleftrightarrow{AC}$. $\widehat{ACD} = \widehat{CAB}$ por ser complementos de ángulos iguales. Los triángulos ABO y CDO son iguales por tener dos ángulos y un lado igual. Por lo tanto todos sus lados son iguales, $\overline{AO}$ = $\overline{OC}$ y $\overline{BO}$ = $\overline{OD}$. En este procedimiento se utiliza la propiedad de que el rectángulo tiene ángulos rectos.

2-

$\overline{AB}$ = $\overline{CD}$ por ser lados opuestos del rectángulo, el ángulo $\widehat{BOA}$ es igual a $\widehat{COD}$ por ser opuestos por el vértice. $\widehat{ACD}$ = $\widehat{CAB}$ por ser alternos internos entre las paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ y la transversal $\overleftrightarrow{AC}$. Los triángulos ABO y CDO son iguales por tener dos ángulos y un lado igual. Por lo tanto todos sus lados son iguales, $\overline{AO}$ = $\overline{OC}$ y $\overline{BO}$ = $\overline{OD}$.

En estos procedimientos se utilizan las propiedades que el rectángulo tiene ángulos rectos y que los lados opuestos son congruentes.

Detallamos los posibles procedimientos de validación sobre la conjetura: "*Las diagonales son iguales.*"

- Utilizar la herramienta *Distancia o longitud* para determinar la igualdad de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.
- Hacer uso de la herramienta *Rotación* para hacer un giro con centro O y ángulo $\widehat{AOB}$ para determinar que $\overline{AO}$ = $\overline{OB}$ y como O es punto medio, $\overline{OB}$ = $\overline{OD}$ y $\overline{AO}$ = $\overline{OC}$. Por lo tanto $\overline{BD}$ = $\overline{AC}$.
- Recurrir a *Circunferencia (centro, punto)* para trazar una circunferencia de centro o que pase por a y una de centro O que pase por B. Luego,

- Utilizar el arrastre para obtener distintos rectángulos y comprobar visualmente que las circunferencias coinciden. Por lo tanto $\overline{AC}$ = $\overline{BD}$ por ser diámetros de la circunferencia.

- Comprobar desde la vista algebraica que las ecuaciones de ambas circunferencias son iguales. Por lo tanto $\overline{AC}$ = $\overline{BD}$ por ser diámetros de la circunferencia.

- Recurrir a *Circunferencia (centro, punto)* para trazar una circunferencia de centro O que pase por A. Luego, utilizar la herramienta *Relación* para verificar que el punto B pertenece a la circunferencia. El punto C pertenece por ser O punto medio de $\overline{AC}$, y D por lo mismo. Por lo tanto $\overline{AC}$ = $\overline{BD}$ por ser diámetros de la circunferencia.
- Utilizar el teorema de Pitágoras y la definición de rectángulo

- ✓ $\overline{AB} = \overline{CD}$ por ser lados opuestos del rectángulo
- ✓ $\overline{AD} = \overline{AD}$
- ✓ $\hat{A} = \hat{D} = 1$ recto.

Por el Teorema de Pitágoras, $\sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2} = \overline{AC} = \overline{BD}$

- Utilizar los criterios de congruencia para comparar triángulos:

El triángulo ABD es igual al triángulo DAC por:

- ✓ $\overline{AB} = \overline{CD}$ por ser lados opuestos del rectángulo.
- ✓ $\overline{AD} = \overline{AD}$
- ✓ $\hat{A} = \hat{D} = 1$ recto.

De lo anterior, por el criterio que afirma que dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo comprendido congruentes, podemos decir que $\overline{AC} = \overline{BD}$.

3.2. Análisis de la implementación

Para comenzar, se considera el grupo A, constituido por los binomios 1 y 2, que utiliza la medición para fundamentar sus conjeturas.

El protocolo de construcción del archivo de GeoGebra del binomio 1 nos muestra que utilizan las siguientes herramientas: *Punto, Segmento, Recta paralela*, *Recta perpendicular*, *Punto de intersección* y *Polígono* para la construcción del rectángulo. *Segmento* para trazar las diagonales, y para determinar la longitud de las mismas, la herramienta *Distancia o longitud*.

Para trazar la circunferencia circunscripta al rectángulo utilizan la herramienta *Circunferencia (centro, punto).*

Con la opción *Texto* expresan como conclusiones:

Las diagonales de un rectángulo miden lo mismo.

La circunferencia pasa por todos los puntos.

Las diagonales se cortan en un punto medio.

El binomio 2 utiliza las mismas herramientas que el binomio 1 para la construcción del rectángulo, el trazado de diagonales y la determinación de las longitudes de estas últimas.

Emplea también la herramienta *Ángulo* para realizar la marca de los ángulos interiores del rectángulo, cuestión que luego no es retomada en las conclusiones.

Con la opción texto expresan:

Las diagonales de un rectángulo miden lo mismo.

La circunferencia pasa por todos los puntos.

Las diagonales se cortan en el punto medio de la figura.

El audio permite afirmar que no hubo interacción entre los integrantes del grupo al respecto de validar lo que afirmaron.

En la puesta en común, en la primera instancia exponen lo realizado proyectando el archivo del binomio 1.

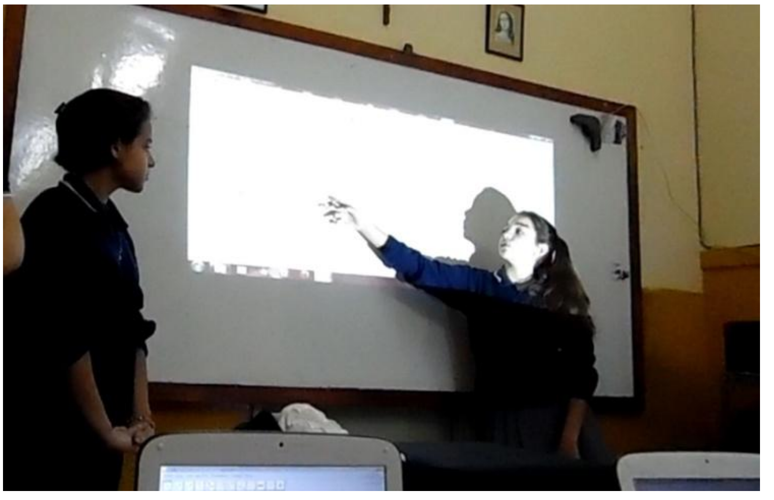

Figura 2. Exposición del grupo A

Se transcribe lo manifestado por el grupo en la puesta en común[1].

A:[2] *Marcamos las diagonales, las medimos con una de las herramientas y nos dio que medían lo mismo, por eso pusimos las diagonales de un rectángulo miden lo mismo.*

Después marcamos la circunferencia y pusimos que pasa por todos los puntos.

Y de las diagonales…pusimos que se cortaban en un punto medio porque se cortan justo en la mitad. También los ángulos miden 90°.

La docente interviene preguntando por qué se puede decir que se cortan en su punto medio tratando de que los estudiantes validen las afirmaciones realizadas.

A: *Las medimos y después medimos el segmento* $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$.

Otra pregunta de la docente es por qué se puede afirmar que son iguales.

A: *También lo medimos.*

Se les pregunta cómo afirman que la circunferencia pasa por todos los puntos.

A: *Hicimos la circunferencia desde este punto, y cuando llegamos al otro punto… también por el hecho de que cada segmento de las diagonales mide lo mismo, entonces si vos hacés la circunferencia, te va a dar… Era para verificar que estaba bien hecho*
D: *¿Por qué necesitaban verificar?*

A: *Para saber si estaba bien hecho.*

[1] La forma lingüística empleada es la variedad dialectal del español rioplatense
[2] A: refiere a las expresiones textuales en la puesta en común de los alumnos y D: a las de la docente

Los estudiantes no logran establecer la relación entre el dibujo del rectángulo realizado y el objeto geométrico que representa el rectángulo y manifiestan la necesidad de constatar que los ángulos son de 90° a pesar de utilizar herramientas del software que lo aseguran, como lo es *Recta perpendicular*.

La construcción realizada no responde a un dibujo prototipo del rectángulo (con los lados que forman el ángulo recto en posición horizontal y vertical). La posición del dibujo en la pantalla está fuera del dominio de interpretación de los dibujos de un rectángulo para los estudiantes. Esto puede haber llevado a constatar que los ángulos interiores del rectángulo construido son rectos.

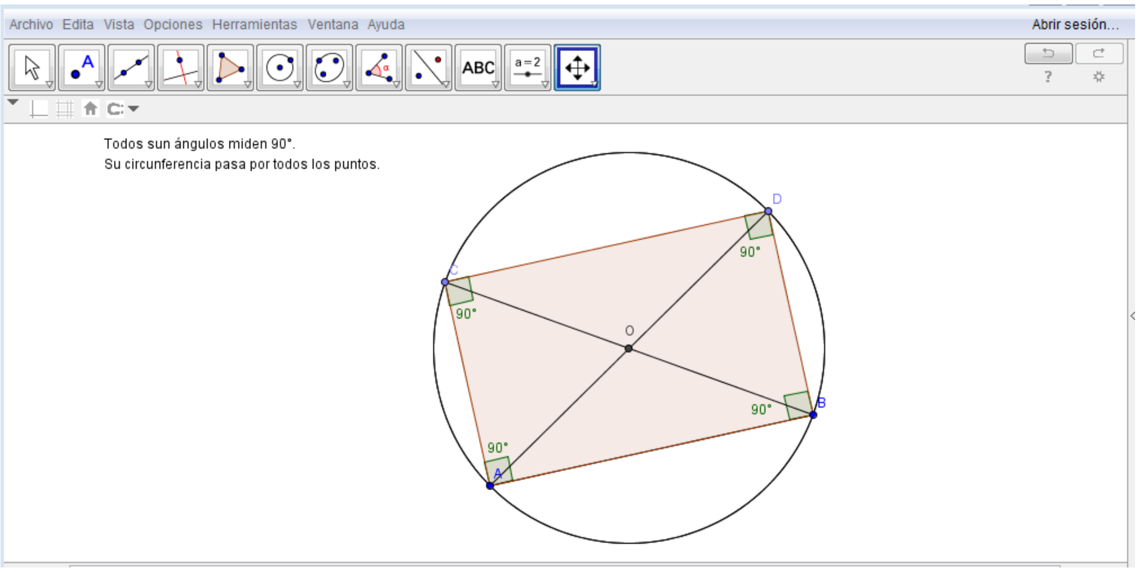

Figura 3. Construcción en GeoGebra del grupo A

Las retroacciones que ofrece el entorno informático a través del desplazamiento resultan útiles para el planteo y validación de conjeturas. En este caso, pareciera que no utilizan el arrastre para validar su conjetura de que las diagonales son iguales. El único procedimiento que afirman haber utilizado es el de medir con la herramienta *Distancia o longitud* en el rectángulo construido. Si bien esto no se visualiza en el protocolo los alumnos lo manifiestan en la puesta en común. Es decir, para afirmar que las diagonales son iguales es suficiente efectuar una medición en un rectángulo determinado, pero para constatar que la circunferencia pasa por los vértices del rectángulo necesitan corroborarlo midiendo los segmentos que quedan determinados al cortarse las diagonales, aun cuando es una propiedad del paralelogramo, y por tanto del rectángulo, que las diagonales se cortan en su punto medio.

Los alumnos realizan constataciones empíricas. No se evidencian procedimientos anticipatorios a la experiencia de medir, ya que no se utilizan propiedades conocidas para validar sus conjeturas. Itzcovich y Broitman (2001) sostienen que luego de realizar la construcción es interesante promover el análisis de las propiedades utilizadas, "... que expliciten las propiedades en las que se apoyaron" (p.21)

Consideramos ahora lo realizado por el grupo B, conformado por los binomios 3 y 4, quienes utilizan propiedades para validar sus afirmaciones.

El binomio 3, en el protocolo de construcción evidencia haber utilizado las herramientas *Punto*, *Segmento*, *Recta paralela*, *Recta perpendicular*, *Punto de intersección* y *Polígono* para la construcción del rectángulo. La herramienta *Segmento* para determinar las diagonales y *Ángulo* para marcar los ángulos interiores del rectángulo.

Con la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* traza una circunferencia con centro en el punto de intersección de las diagonales que pasa por un vértice del rectángulo y otra con el mismo centro que pasa por un vértice consecutivo al anterior.

Con la opción *Texto* expresan como conclusiones:

Todos sus ángulos miden 90º

Su circunferencia pasa por todos los puntos

El binomio 4 utiliza para la construcción del rectángulo las herramientas *Punto*, *Segmento, Recta paralela*, *Recta perpendicular*, *Punto de intersección* y *Polígono* para la construcción del rectángulo. Utiliza la herramienta *Ángulo* para constatar la perpendicularidad de las rectas.

Con la herramienta *Distancia o Longitud* mide los lados y las diagonales del rectángulo y luego los segmentos de las diagonales que quedan determinados por el punto de intersección. Trazan la circunferencia circunscripta al rectángulo con la herramienta *Circunferencia (centro, punto)*.

Con la herramienta *Texto*, en el archivo se pueden ver las siguientes conclusiones:

Hay la misma distancia entre el punto en donde se encuentran las dos diagonales hasta el vértice es la misma siempre.

Si se realiza una circunferencia tomando como punto inicial donde se cortan las diagonales, la circunferencia pasará por todos los vértices.

Miden lo mismo porque es un rectángulo y lo controlamos con la función distancia o longitud

No se ve en los estudiantes que utilicen la función de arrastre que proporciona GeoGebra para constatar que la figura conserva las propiedades, moviendo sus elementos primitivos.
Se expresa en el audio de este grupo lo siguiente:

Las diagonales miden lo mismo porque es un rectángulo y lo comprobamos con la función distancia, longitud, las medimos y miden lo mismo, eso se justifica solo, no sé por qué, es un rectángulo. Se cortan en su punto medio, nos fijamos con la misma función, y medimos la distancia del punto medio al vértice y nos dio la misma distancia del otro vértice al punto medio.

Si se hace una circunferencia desde donde se cortan las dos diagonales, pasa por los vértices.

La validación en este caso se produce a modo de respuesta de la consigna y no como una interacción entre los integrantes. Puede apreciarse que la interacción no se da entre los cuatro estudiantes, sino que son los del binomio 4 los que intercambian al respecto de la consigna.

En la puesta en común los integrantes del grupo B explican cómo obtuvieron las conclusiones proyectando el archivo del binomio 4.

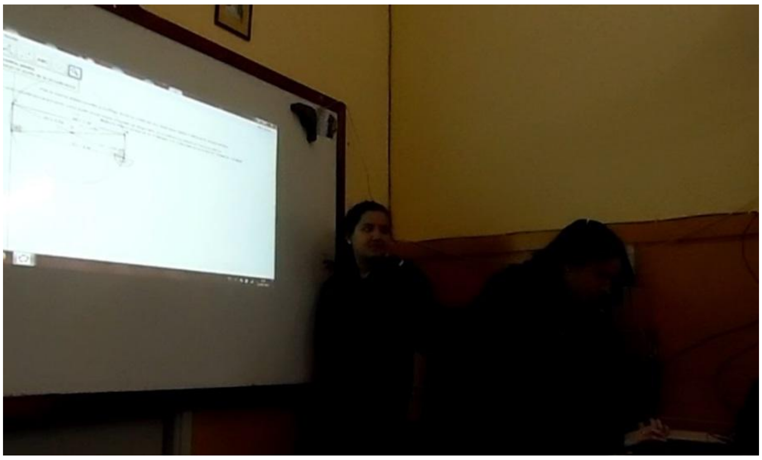

Figura 4. Exposición del grupo B

A: *Si vos hacés una circunferencia, el borde de la circunferencia va a pasar por todos los vértices del rectángulo.*

Sus ángulos miden 90º ya que es un rectángulo y sus diagonales se cortan en un punto.

Las diagonales son el diámetro de la circunferencia y si vos tomás desde el punto medio que se cortan las diagonales hasta que llegue a la circunferencia es el radio.

Se produce un intercambio entre la docente y los estudiantes con el propósito de que expresen cómo validan lo que afirman.

D: *¿Cómo hicieron para marcar la circunferencia?*

A: *Marcamos el punto medio de las diagonales y le pusimos letra O, después pusimos circunferencia, y de ahí marcamos el punto O y nos dio la circunferencia.*

D: *¿Cómo saben entonces que $\overline{BD}$ es el diámetro?*

A: *Porque lo medimos, aparte lo habíamos dado en un curso pasado.*

D: *¿Qué habían dado en un curso pasado?*

A: *Si trazás una línea que pase por el punto medio y que toque los dos extremos de una circunferencia va a ser el diámetro.*

D: *¿Cómo sabían que D es punto de la circunferencia?*

A: *Con una tecla que dice relación y apretamos la diagonal y la circunferencia.*

D: *La conclusión es que las diagonales miden lo mismo… ¿Sacaron alguna otra conclusión?*

A: *Si, que los ángulos miden 90º porque es un rectángulo y que las diagonales se cortan en un punto.*

D: *¿En qué punto?*

A: *El del medio, el punto* O.

D: *¿Y eso cómo lo saben, que se cortan en el punto medio?*

A: *Si vos medís la diagonal y después medís desde el vértice que marcás la diagonal hasta el medio, es la misma distancia que si lo hacés del otro lado.*

D: *Ustedes me dijeron que ese es un diámetro de la circunferencia, y que el punto* O *es en el que se cortan las diagonales y que todos los puntos A, B, C y D están en la circunferencia. Si digo que se cortan en el punto medio. ¿Qué son* $\overline{OA}$, $\overline{OC}$, $\overline{OB}$ *y* $\overline{OD}$ *de la circunferencia?*

A: *Radios*

D: *¿Y cómo son los radios de una circunferencia?*

A: *Iguales*

D: *¿Qué podríamos decir entonces?*

A: *Que la diagonal sería el diámetro y la mitad de la diagonal sería el radio.*

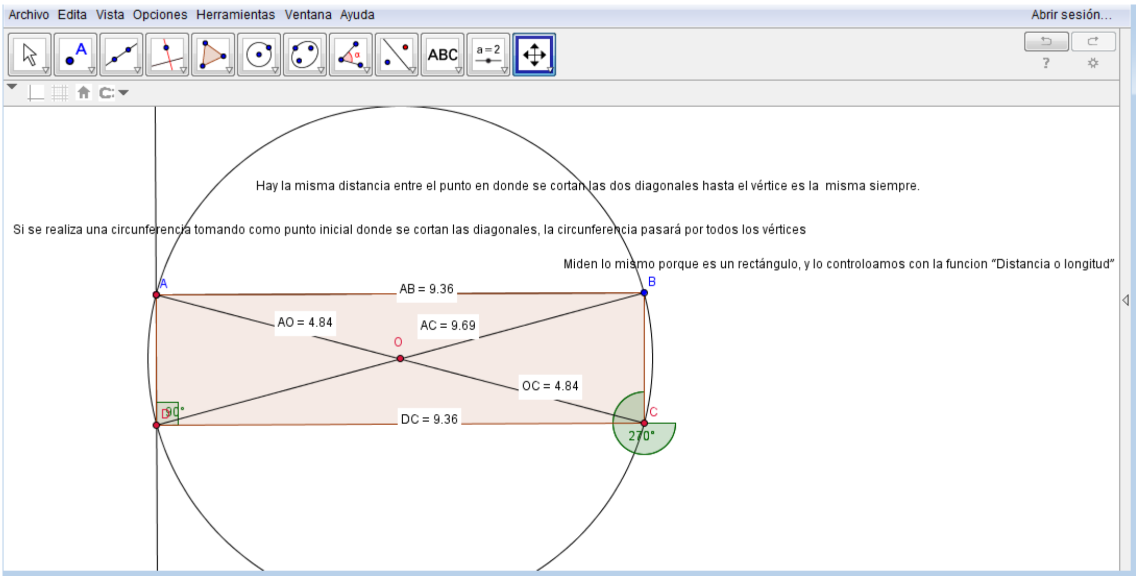

Figura 5. Construcción en GeoGebra del grupo B

Los alumnos no afirman que $\overline{BD}$ es diámetro de la circunferencia recurriendo a la propiedad disponible de las diagonales del paralelogramo. Utilizan la definición de diámetro de una circunferencia, lo mismo afirman de la otra diagonal, previa constatación de que los vértices son puntos de la circunferencia con la herramienta *Relación*.

Los estudiantes utilizan la propiedad de los diámetros de una circunferencia para afirmar que las diagonales son iguales. En este procedimiento de tipo anticipatorio relacionan la actividad propuesta con conocimientos desarrollados anteriormente. No obstante miden para comprobar que su afirmación es verdadera.

Puede observarse que no utilizan la opción que brinda el software de arrastre para determinar distintos rectángulos, a partir del construido, para conjeturar que los vértices pertenecen a la circunferencia de centro en el punto de intersección de las diagonales y que pasa por uno de ellos. No afirman la propiedad por el trazado "a ojo", sino que utilizan una herramienta que les brinda el programa que es *Relación*.

4. Reflexiones finales

Teniendo en cuenta el análisis expuesto se puede decir que las validaciones realizadas por los alumnos son constataciones empíricas, a partir del uso de la herramienta *Distancia o longitud*. Efectúan mediciones en un caso para establecer conjeturas y en otro para comprobar lo anticipado.

Para los estudiantes del primer grupo es suficiente con lo que les devuelve el software al respecto de medir para afirmar que las diagonales son iguales. Este procedimiento sólo permite constatar lo que ocurre en este ejemplo particular del rectángulo. “No se recurre a ninguna propiedad geométrica que dé cuenta de la necesariedad del resultado obtenido, ni hay certeza geométrica de que pudiera provenir de concatenar propiedades que permiten inferir tal resultado” (Itzcovich, 2005, p.46).

En el segundo caso los alumnos utilizan la herramienta *Relación* para comprobar que las circunferencias construidas son las mismas, y hacen uso de la propiedad que todos los diámetros de una circunferencia son iguales para conjeturar que las diagonales del rectángulo son iguales. No obstante utilizan la herramienta *Distancia o longitud* para constatar la igualdad de las mismas.

Los estudiantes no hacen uso de lo que De Villiers (2003) denomina clasificación jerárquica, "...para validar la propiedad que las diagonales se cortan en su punto medio, no aparece como argumento utilizado por los alumnos que el rectángulo es un paralelogramo y por esa razón cumple con la propiedad" (Freyre y Mántica, 2015, p.10). La propiedad de los diámetros de una circunferencia es disponible para los alumnos, es decir forma parte de su "caja de herramientas". La propiedad de las diagonales del paralelogramo mencionada es un contenido desarrollado previamente, sin embargo los alumnos no recurren a la misma para resolver la actividad analizada.

Para que los estudiantes reconozcan las ventajas de las clasificaciones jerárquicas, es necesario que se involucren en un proceso de elaboración de definiciones y clasificaciones realizando pruebas formales de todas las propiedades, tal como afirma De Villiers (2003). Los alumnos no tienen oportunidad de apreciar las cualidades de estas clasificaciones puesto que generalmente no se exigen pruebas formales de las propiedades, solo se las enuncia. Esto se relaciona con una dificultad funcional, ya que los alumnos no comprenden en qué aspectos las clasificaciones jerárquicas son más útiles que las particionales. Las clasificaciones jerárquicas posibilitan formular teoremas de modo más económico y simplifican la sistematización y deducción de propiedades, pero esto no es usual en la escuela secundaria.

La posibilidad de experimentación que ofrece el entorno informático, parece no haber sido utilizada por los alumnos. Para que los estudiantes puedan comprender todas las potencialidades que brinda el software es importante que interpreten lo que implica una construcción en un SGD.

Si bien el software ofrece una modificación continua del dibujo en la pantalla generando otros dibujos asociados a la misma figura, los estudiantes no hacen uso del recurso de desplazamiento que como plantea Laborde (1997) es beneficioso en cuanto a las retroacciones que permite: "(...) la ventaja de ello es que estas retroacciones proceden de un dispositivo externo al sujeto e independiente del profesor y, de esta manera, son susceptibles de hacer evolucionar al sujeto" (p.40).

Este software de geometría dinámica no sólo permite a los estudiantes construir figuras a partir de su definición o del conocimiento de ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permite transformar construcciones en tiempo real. “Este dinamismo puede contribuir hacia la formación del hábito de transformar (o bien mentalmente o por medio de una herramienta) un ejemplo particular, para estudiar las variaciones, visualmente da indicios de invariantes, y posiblemente facilita las bases intuitivas para dar justificaciones formales de conjeturas y proposiciones matemáticas”. (Arcavi y Hadas, 2000, pp. 25-26)

Una cuestión a destacar es que pareciera que los estudiantes no sienten la necesidad de utilizar el arrastre, herramienta propia de los software de geometría dinámica que permite al menos verificar, las afirmaciones realizadas a partir de mediciones, con una variedad de figuras que se obtienen a partir del arrastre de los puntos libres. En el caso de la actividad planteada se supone que el estudiante, al no utilizar el arrastre, está constatando que las diagonales son iguales en un único rectángulo. No obstante, afirma que esto se cumple en todos los rectángulos.

Laborde (2015) afirma que los estudiantes no comprenden que cuando realizan la construcción tienen cuestiones geométricas que considerar, que al no hacerlo y tomar un punto libre y desplazarlo hay elementos que no lo van a seguir. No comprenden por qué pasa esto, qué ha cambiado y cómo interpretarlo geométricamente. Es difícil que comprendan que el desplazamiento cambia el tamaño de la figura, pero no su forma.

Es fundamental estudiar la relación entre el conocimiento geométrico del estudiante, los aportes que brinda el software y la mirada crítica que pueden construir sobre las respuestas que devuelve el SGD. Sessa, Borsani, Cedrón, Cicala, Di Rico y Duarte (2015) sostienen que es importante “… comprender cómo se van apropiando los estudiantes del “arrastre” como técnica de trabajo y cómo van advirtiendo sus limitaciones” (p.159). Esto requiere de un trabajo específico con el arrastre, relacionado con sus posibilidades y características.

Bibliografía

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 5: 25-15.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of the quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.

Esteley, C., Marguet, I. y Cristante, A. (2012) Explorando construcciones geométricas con GeoGebra. En J. Adrover y G. García (Eds.) *Serie “B” Trabajos de Matemática n° 61/2012*. (pp. 19-28). Recuperado el 20 de julio de 2016, de http://www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie_b/BMat61.pdf

Freyre, M. y Mántica, A. (2015) Validación de conjeturas de propiedades del rectángulo a partir de construcciones con GeoGebra. *Actas de las IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales*. Recuperado el 20 de junio de 2016, de http://jornadasceyn.fahce.unlp.edu.ar/convocatoria/actas-2015/trabajos-matematica/Freyre.pdf/view

Sessa, C., Borsani, V., Cedrón, M., Cicala, R., Di Rico, E. y Duarte, B. (2015) La transformación del trabajo matemático en el aula del secundario a partir de la integración de las computadoras. En D. Herrera (Ed.) *Prácticas pedagógicas y políticas educativas. Investigaciones en el territorio bonaerense.* (pp.137-164). UNIPE. Editorial Universitaria: Buenos Aires.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Itzcovich, H. y Broitman, C. (2001) *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la Geometría en EGB.* Gabinete pedagógico curricular. Matemática. Buenos Aires. Subsecretaría de Educación.

Laborde, C. (1997) Cabri-Geómetra o una nueva relación con la Geometría. En Puig L. (Ed.) *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática.* 33-48. Grupo Editorial Iberoamérica: Bogotá.

Matemática con Tecnología. (2015, Marzo 19). Entrevista a Colette Laborde [Archivo de video]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=1vqJ1OOJMU0

Novembre, A., Nicodemo, M. y Coll, P. (2015). *Matemática y TIC: orientaciones para la enseñanza.* CABA. Recuperado el 5 de noviembre de 2016, de http://escuelasdeinnovacion.conectarigualdad.gob.ar/mod/page/view.php?id=875

Ana María Mántica. Profesora de la cátedra Didáctica de la Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Argentina. Docente investigadora en temas referidos a la enseñanza de la matemática en distintos niveles del sistema educativo que ha realizado publicaciones sobre la temática en distintas revistas especializadas nacionales e internacionales.
Dirección Electrónica: ana.mantica@gmail.com

Magali Freyre. Profesora en Matemática. Ayudante en la cátedra Didáctica de la Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Profesora de Matemática en los niveles secundario y superior no universitario. Ha participado como expositora en congresos y jornadas especializados nacionales e internacionales.
Dirección Electrónica: magali.freyre@gmail.com