



A S O C O L M E

ASOCIACION COLOMBIANA DE MATEMATICA EDUCATIVA

Propuesta de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración

Jorge Enrique Fiallo Leal – EDUMAT UIS

Universidad Industrial de Santander

Resumen

Presentamos una propuesta de enseñanza de las razones trigonométricas en la línea de investigación tendente a obtener una mejor idea de los procesos de demostración y del planteamiento de propuestas para introducir a los estudiantes en el tema de la demostración, desde una metodología que sustenta que: (i) A partir de un enfoque geométrico en un ambiente de geometría dinámica se favorece la formación de imágenes mentales de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas. (ii) Cabri favorece la visualización, generalización y conjetura de propiedades de las razones trigonométricas y (iii) Cabri contribuye al desarrollo de habilidades de demostración empíricas y deductivas en el estudio de las razones trigonométricas.

Introducción

El estudio de la trigonometría puede convertirse en un proceso memorístico, rutinario y mecánico, sin ningún sentido ni utilidad si no se brindan las condiciones suficientes para ello. Por esta razón, es importante brindarle al estudiante no sólo una serie de conceptos, si no las herramientas y estrategias necesarias para que explore, analice, relacione, conjeture, demuestre y aprenda con sentido los conceptos y propiedades trigonométricos, que aprenda a utilizar diferentes procedimientos y estrategias de razonamiento, a producir distintos tipos de demostración en la solución de problemas de conjetura y demostración de las propiedades trigonométricas y a relacionar las diferentes representaciones de los conceptos de tal manera que el aprendizaje sea más efectivo y duradero. Presentamos un curso basado en la experiencia de investigación realizada dentro de la fase de investigación del doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia (España).

Marco teórico

Arzarello y otros (1998) consideran cruciales dos componentes para focalizar el significado de la demostración, a saber, el cognitivo y el histórico-epistemológico (Barbin, 1988; Balacheff, 1988; Harel, 1996; Mariotti et al., 1997). Por supuesto los dos componentes pueden ser separados solamente por razones de análisis teóricos, o por lo contrario pueden entrelazarse con profundidad en la realidad (Hanna, 1996) y ambos pueden considerarse para abordar apropiadamente lo didáctico de la demostración.

Hanna (2000) manifiesta que cuando se intenta caracterizar el rol de la demostración en Educación Matemática se tiende a considerar el rol de ésta en la actividad matemática misma, pues se espera que el rol en las clases refleje todo lo que esperan de ella los matemáticos. Pero estas funciones no siempre son relevantes para el aprendizaje de las matemáticas en el mismo grado y no siempre deberían tener el mismo peso en la instrucción (de Villiers, 1990, Hersh, 1993). Para comenzar el largo trabajo de preparar a los estudiantes para la demostración deberíamos empezar por dos funciones fundamentales: verificación y explicación. En la clase, la pregunta fundamental que la demostración debe dirigir es: ¿Por

qué? En el dominio educativo es natural entonces valorar las demostraciones que mejor ayuden a explicar.

Teniendo en cuenta las ideas expuestas y las de otros investigadores (Godino y Recio, 2001; Battista y Clements, 1995), consideramos la **demostración** desde una perspectiva amplia, como un proceso que incluye todos los intentos hechos por los estudiantes para *explicar, verificar o justificar* con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática.

Análisis de conjeturas y demostraciones producidas por los estudiantes

Marrades y Gutiérrez (2000), apoyados en los trabajos de otros investigadores como Balacheff (1988), Bell (1976) y Harel y Sowder (1998), proponen una estructura analítica para analizar, organizar y describir las respuestas de los estudiantes a problemas de demostración. A continuación presentamos de manera resumida las categorías propuestas y una breve descripción de cada una de ellas:

A) Demostraciones empíricas, caracterizadas por el uso de ejemplos como elementos de convicción. Los tipos de demostración empírica son:

- *Empirismo ingenuo*: Cuando en el planteamiento de una conjetura y en la demostración se usan solamente ejemplos escogidos sin ningún criterio específico. Se identifican dos tipos de empirismo ingenuo:
 - *Perceptivo*: Cuando los estudiantes se basan en elementos visuales o táctiles.
 - *Inductivo*: Cuando los estudiantes se basan en elementos matemáticos o relaciones detectados en el ejemplo.
- *Experimento crucial*: Cuando la conjetura es demostrada usando un ejemplo que se escoge porque se presume que en cualquier otro caso va a dar el mismo resultado. Se identifican los siguientes tipos de experimentos cruciales:
 - *Basado en ejemplo*: Cuando los estudiantes se basan en la existencia de un único ejemplo o en la ausencia de contraejemplos para su demostración.
 - *Constructivo*: Cuando los estudiantes sustentan sus demostraciones en las construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma de conseguir el ejemplo.
 - *Analítico*: Cuando se usan ejemplos cuidadosamente seleccionados y las demostraciones de los estudiantes están basadas en propiedades y relaciones observadas en el ejemplo o en elementos auxiliares.
 - *Intelectual*: Cuando las conjeturas o demostraciones de los estudiantes están basadas en observaciones empíricas del ejemplo, pero en la demostración usan propiedades matemáticas aceptadas o relaciones entre los ejemplos.
- *Ejemplo genérico*: Cuando en la demostración o la conjetura se usa un ejemplo específico que es representante de una clase, y la demostración incluye la producción de razonamientos abstractos. Los cuatro tipos de demostración definidos en los párrafos anteriores para el experimento crucial se presentan en los ejemplos genéricos.

B) Demostraciones deductivas, caracterizadas por la descontextualización de las discusiones usadas, se basan en aspectos genéricos del problema, operaciones mentales y deducciones lógicas. Los tipos de demostraciones deductivas son:



- *Experimento mental*: Cuando se usa un ejemplo para ayudar a organizar la demostración. Se pueden distinguir dos tipos de experimento mental:
 - *Experimento mental transformativo*: Cuando las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente. El papel de los ejemplos es ayudar a prever cuáles transformaciones son convenientes.
 - *Experimento mental estructural*: Cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados, y, si se usan ejemplos, son para ayudar a organizar o entender los pasos de las deducciones.
- *Deducción formal*: Cuando la demostración se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos. Los dos tipos de demostración definidos para el experimento mental, pueden también ser encontrados en la demostración deductiva formal.

También plantean una clase llamada *fallida*, que incluye los casos de estudiante que no son capaces de seguir un camino de solución que los lleve al planteamiento de una conjetura o de una demostración, o aquellos que no hacen nada, no ven la conjetura, o no se puede inferir nada de sus respuestas.

Metodología

Los datos se recogieron a través de las hojas de trabajo de los estudiantes, los mapas conceptuales que debían completar o realizar al finalizar una actividad, las evaluaciones cortas y acumulativas aplicadas durante el desarrollo de la experimentación, los test diagnósticos de los preconceptos y de las habilidades de demostración, vídeos de las discusiones de clase con los compañeros y profesores y de una entrevista final realizada a algunos estudiantes y la profesora de una de las instituciones, registros de sesión de Cabri y cuadernos de apuntes del investigador y de los profesores. Para la determinación de conclusiones se utilizaron todos los análisis cualitativos y cuantitativos realizados sobre todas las actividades, teniendo en cuenta las categorías de análisis de Marrades y Gutiérrez (2000) y las categorías emergentes, así como los datos cuantitativos obtenidos.

Durante dos semanas previas a empezar las clases, el investigador trabajó con los profesores, haciendo énfasis en los objetivos de la investigación y de aprendizaje propuestos en la unidad de enseñanza, en la concepción de demostración de nuestra investigación, en el uso de Cabri y en la revisión y corrección de la unidad y de los test diagnósticos. Este trabajo continuó en el transcurso del desarrollo de la experimentación en donde los profesores eran los encargados de implementar las actividades y orientar la clase según lo planeado y descrito en cada una de las actividades para el logro de los objetivos de aprendizaje y de investigación.

El investigador fue el responsable del diseño de las actividades y los correspondientes archivos de Cabri, de participar en el desarrollo de las actividades en las instituciones, adoptando un papel de observador activo y colaborador del profesor en las tareas de asesoramiento y orientación a los estudiantes, preguntando y registrando las respuestas y conclusiones en el desarrollo de las tareas propuestas.

Descripción de la población

La implementación de la unidad de enseñanza se llevó a cabo con 100 estudiantes del grado 10º de bachillerato (14-16 años) de tres instituciones de Santander, tomando como único criterio para su elección la facilidad de poder establecer contactos con las directivas y profesores, y que fueran instituciones que contaran con una sala de computadores disponible tres horas semanales para trabajar en dos sesiones semanales de 90 minutos cada una durante el periodo de tiempo que se había planeado la experimentación.

Teniendo en cuenta que los estudiantes partícipes de la experiencia eran noveles en el uso de Cabri y el tiempo disponible para la capacitación en su uso fue de apenas dos semanas, en casi todas las

actividades Cabri fue utilizado más como una herramienta para obtener construcciones sencillas y orientada a la visualización, exploración y análisis de relaciones y propiedades trigonométricas que como una herramienta para que ellos manipularan como expertos para la solución de un problema de demostración. Cuando la construcción era compleja se daba a los estudiantes el archivo correspondiente para que ellos la manipularan y exploraran las propiedades estudiadas. Solamente en los casos en que las construcciones eran sencillas se pidió a los estudiantes que intentaran hacerlas y que, de acuerdo a su resultado, plantearan, verificaran y demostraran las propiedades correspondientes.

Para el análisis de los resultados se tomaron cuatro grupos conformados por dos o tres estudiantes de dos de las instituciones y tres grupos conformados por dos estudiantes de otra de las instituciones

Planificación de la experimentación

La experimentación de la unidad de enseñanza se llevó a cabo durante el periodo comprendido desde la segunda semana de enero hasta la primera semana de mayo de 2006 en el transcurso normal del periodo de clases de las tres instituciones participantes. El siguiente esquema muestra la secuencia cronológica de las acciones de experimentación que ayudará a dar una visión global de lo realizado.

Acciones de la experimentación	FEB				MAR				ABR				MAY			
	2006				2006				2006				2006			
Aplicación del test de conocimientos previos																
Aplicación del test diagnóstico de los tipos de demostración																
Aplicación de la unidad de enseñanza																
Aplicación de las evaluaciones cortas																
Aplicación de la evaluación acumulativa																

Se aplicaron cinco actividades que abarcaron los siguientes temas de estudio de las razones trigonométricas:

Actividad 1: Razones trigonométricas para triángulos rectángulos.

Actividad 2: Razones trigonométricas para ángulos en posición normal.

Actividad 3: Representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas.

Actividad 4: Identidades Pitagóricas.

Actividad 5: Seno de la suma de dos ángulos.

Como uno de los objetivos fundamentales de la unidad era el desarrollo de las habilidades de demostración, desde la primera actividad se planteó el análisis y demostración de conjeturas que involucraban las identidades trigonométricas. De esta manera, cada actividad era mucho más extensa de lo que normalmente se plantea en los textos escolares, puesto que se requería de la realización y análisis de construcciones en Cabri, planteamientos y discusión de las ideas en la hoja de trabajo con el grupo y finalmente en la discusión con la clase y el profesor.



Algunas conclusiones

El análisis hecho a los procedimientos de resolución de las actividades, de las estrategias de razonamiento, de los errores y dificultades y de los tipos de demostraciones producidas por los grupos de estudiantes desde el inicio de la experimentación nos permiten afirmar que la unidad de enseñanza contribuyó a mejorar el nivel de las habilidades de demostración de los estudiantes, destacándose una tendencia de transición hacia la producción de demostraciones de un mejor nivel al que se habían ubicado en la evaluación diagnóstica: Los que menos progreso alcanzaron pasaron del empirismo ingenuo a la consideración del experimento crucial intelectual, recurriendo al uso de propiedades generales de las razones trigonométricas estudiadas y aprendidas en el transcurso de la experimentación. Los que mayores avances alcanzaron llegaron a la producción de demostraciones deductivas.

El análisis cualitativo de las producciones de los estudiantes, producto del desarrollo de las actividades propuestas, permitió el planteamiento de categorías emergentes de análisis que nos permitieron detectar doce procedimientos de resolución de actividades, observándose una transición de los procedimientos numéricos hacia los procedimientos analíticos. También se detectaron cinco estrategias de razonamiento, notándose en la mayoría de los grupos analizados, una transición desde un razonamiento empírico inductivo basado en el análisis de los datos de Cabri, hacia el uso de un razonamiento más deductivo apoyado fuertemente en la visualización de propiedades geométricas y analíticas.

Referencias bibliográficas

- Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., & Robutti, O. (1998). *A model for analysing the transition to formal proofs in geometry*. Proceedings of the 22th PME Conference 2, 24-31.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children Hodder & Stoughton* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton.
- Battista, M. T., & Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. *The Mathematics Teacher*, 88(1), 48-54.
- Bell, A.W. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics* 7(1), 23-40.
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-29.
- Fiallo, J. (2006). *Enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración.*, Memoria de investigación, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia.
- Godino, J. D., & Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 405-414.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: Results from exploratory studies. En Schoenfeld, A.H., Kaput, J., & Dubinsky, E. (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. III, pp. 234-283). Providence, EE.UU: American Mathematical Society.
- Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 151-161.
-

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 25-53.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173-204). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Marrades, R., & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.
