Revista digital
**Matemática, Educación e Internet**
(http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 17, No 2. Marzo — Agosto 2017. ISSN 1659 -0643

# Numerabilidad y cardinalidad de conjuntos.

José Rosales O.
jrosales@tec.ac.cr
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Recibido: Marzo 31, 2016 Aceptado: Setiembre 15, 2016

**Resumen.** El objetivo de este trabajo es presentar los elementos básicos de lo que se conoce como numerabilidad y no numerabilidad de conjuntos, y luego definir el concepto de cardinal . El desarrollo de este concepto de número cardinal de un conjunto se hace por medio del uso de funciones inyectivas, sobreyectivas, y del cálculo explícito de inversas. También se utiliza el teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder para probar la equivalencia de ciertos subconjuntos de números reales, y se culmina probando que cualquier conjunto infinito se puede expresar como una unión disjunta de conjuntos infinitos, al utilizar los números primos.

**Palabras clave**: Numerabilidad, no numerabilidad, cardinalidad.

**Abstract.** The aim of this paper is to present the basic elements of what is known as numerability and nonnumerability of sets, then we define the concept of cardinal number. The development of this concept of cardinal number of a set is done through the use of injective and surjective functions and the explicit calculation of inverses. Cantor-Bernstein-Schroeder's theorem is also used to test the equivalence of certain subsets of real numbers, and it culminates proving that any infinite set can be expressed as a disjoint union of infinite sets, using prime numbers. computation of inverses is developed. Cantor-Bernstein-Schroeder's theorem is also used.

**KeyWords**: numerability, uncontability ,cardinality

## 1.1 Introducción

Es común que en la vida diaria uno hable del concepto de tamaño de un conjunto de objetos. En el caso de un conjunto finito este concepto no tiene problema alguno con su definición, pero cuando tratamos con conjuntos infinitos empiezan los problemas. Trate de responder a la siguiente pregunta: ¿cuál es el conjunto más grande que usted pueda pensar? Esta pregunta no tiene una respuesta inmediata, pero en primer lugar nos deberíamos ponernos de acuerdo en definir qué significa matemáticamente que un conjunto sea mayor que otro en cuanto a su número de elementos, y le debemos a George Cantor su respuesta.

Cantor trató de asignarle un tipo especial de número a cada conjunto de objetos con el objetivo de medir el tamaño de dicho conjunto. Nacieron así los llamados números cardinales, los cuales dividen a los conjuntos por su tamaño. Dos nuevos símbolos se introducen en esta nueva división, el símbolo $\aleph_0$, que consiste de la letra hebrea alef con subíndice cero, para denotar el tamaño del conjunto de los números enteros positivos, $\mathbb{N}$, y de todos los conjuntos equivalentes a este, y la primera letra de la palabra continuum, **c**, para denotar el tamaño del conjunto $[0,1]$, y de todos los conjuntos equivalentes con este.

Cuando hablamos de conjuntos equivalentes queremos expresar que existe una biyección entre dichos conjuntos, por ejemplo, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ son equivalentes, pero $\mathbb{N}$ y $]0,1[$ no son equivalentes. También $\mathbb{R}$ es equivalente con cualquier intervalo. En este punto uno se pregunta, ¿existirán conjuntos que no sean equivalentes con $\mathbb{R}$, y que en cierto sentido sean más grandes? Aquí el término más grande significa, que una vez definido el concepto de número cardinal, el cual mide el tamaño de un conjunto, procedemos a definir un orden en el conjunto de dichos números cardinales, y entonces ser más grande es sinónimo de poseer un número cardinal más grande, en el sentido del orden que se definirá posteriormente.

El mismo Cantor probó cómo construir una sucesión de conjuntos cuyos números cardinales van creciendo en sentido estricto, esto lo hizo con el concepto de potencia de un conjunto, o el llamado partes de un conjunto. De hecho, el famoso teorema de Cantor establece, para un caso específico, que:

$$\#(\mathbb{R}) < \#(\mathcal{P}(\mathbb{R})) < \#(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))) < \cdots,$$

donde $\#(A)$ denota el cardinal del conjunto $A$ Lo anterior significa que existen conjuntos cuyo tamaño es más grande que el de los números reales, y todos los conjuntos equivalentes a este.

En este trabajo queremos explicar con detalle lo expresado en los párrafos anteriores, es decir lo referente a conjuntos numerables, no numerables, y cardinalidad, utilizando conceptos básicos. Con utilizar conceptos básicos queremos indicar que nos basaremos en los conceptos de función inyectiva y sobreyectiva, y en las llamadas funciones restricción, tanto del dominio como del rango.

En la segunda sección exponemos los llamados conceptos básicos. Aquí hay que rescatar que probamos la equivalencia entre función biyectiva y la existencia de inversa, ya que esto será utilizado a lo largo de todo el trabajo.

En la tercer sección definimos uno de los conceptos fundamentales: el de equivalencia, o equipotencia, entre conjuntos. Se prueba que ser equipotente es una relación de equivalencia, y se dan varios ejemplos para acostumbrarse con dicho término.

En la cuarta sección enunciamos y probamos el famoso teorema de Cantor-Bernstein-Scroeder, el cual será muy útil para probar la equivalencia, de una forma indirecta, entre dos conjuntos dados.

En la quinta sección definimos lo que para nosotros representa un conjunto finito, y un conjunto infinito. Damos una caracterización de finitud de un conjunto en términos de funciones inyectivas y sobreyectivas.

En la sexta sección definimos los llamados conjuntos contables, los cuales abarcan a los finitos y a los infinitos numerables. Se prueba la diferencia fundamental entre conjuntos finitos e infinitos: que estos últimos poseen un subconjunto propio equivalente con él, mientras que los finitos no pueden tener un subconjunto propio equivalente a ellos. Además se da un criterio de contabilidad en términos de funciones inyectivas y sobreyectivas. Se enuncian varios teoremas para generar nuevos conjuntos contables a partir de conjuntos contables dados.

En la séptima sección abordamos el concepto de no numerabilidad, y se prueban varios teoremas que presentan conjuntos no numerables.

La octava sección presenta varios ejemplos de conjuntos numerables y no numerables para que el lector pueda realizar un repaso general de lo visto anteriormente, y al mismo tiempo reforzar los conceptos dados para introducir el concepto de cardinalidad en la siguiente sección.

La novena sección presenta el concepto de cardinalidad de un conjunto. Se introducen los símbolos $\aleph_0$ y $\mathbf{c}$ que representan las cardinalidades de $\mathbb{N}$ y $[0,1]$, respectivamente. Se prueba el teorema de Cantor, y se termina enunciando la hipótesis del continuo.

Queremos indicar que esta forma de introducir el tema en cuestión(en su forma, en varios de los teoremas, en sus demostraciones, y en los ejemplos presentados) ha sido expuesta en varias ocasiones por el autor a estudiantes de matemática. Esperamos que con la lectura de este trabajo la comunidad estudiantil, y profesional en matemática se vea beneficiada.

Resta decir, por último, que hay una serie de actividades, las cuales promoverán la apropiación de los conceptos y resultados expuestos a los largo del presente trabajo.

## 1.2 Conceptos básicos

Empezamos por establecer que el conjunto de los números naturales, denotado por $\mathbb{N}$, se define de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots,\}.$$

Asumiremos el llamado **principio del Buen Orden**: todo subconjunto, no vacío, de enteros positivos, posee un primer elemento. Este será utilizado en varias de las pruebas que daremos posteriormente.

También se asumirá el llamado **principio de las Casillas**: si tenemos $n+1$ cartas y $n$ casillas, entonces al menos una de las casillas contendrá dos cartas.

En este trabajo vamos a utilizar en todos sus extremos el concepto de función, por lo tanto vamos a definir dicho concepto.

**Definición 1.1**

Sean $A$ y $B$ conjuntos arbitrarios. Por una función $f : A \to B$ entenderemos una regla que asigna a cada elemento $a \in A$, un único elemento $b \in B$. Este último elemento $b$ suele denotarse por $f(a)$.

De la definición anterior vemos que para definir una función necesitamos tres elementos: los dos conjuntos $A$ y $B$, y la regla de asignación $f$. Al conjunto $A$ se le llama dominio, y a sus elementos se les conoce como preimágenes. Al conjunto $B$ se le llama el codominio, y a sus elementos se les conoce como imágenes.

Resulta importante considerar, para la función $f : A \to B$, al siguiente subconjunto de $B$.

**Definición 1.2**

Dada una función $f : A \to B$, al subconjunto de los elementos de $B$ que tienen asignada una preimagen en $A$ se le llamará el rango de $f$, o el ámbito. En otras palabras, $b$ pertenece al ámbito de $f$ si existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Es usual denotar al ámbito de $f$ por $f(A)$. Es claro que $f(A) \subset B$.

**Ejemplo 1.1**

Dado $B$, subconjunto de $A$, definimos la función $i : B \to A$ por medio de $i(b) = b$. A esta función le llamaremos la función inclusión.

**Ejemplo 1.2**

Sea $A$ un conjunto. A la función, $1_A : A \to A$, definida por $1_A(a) = a$, se le conoce como la función identidad.

**Definición 1.3**

Sean $f : A \to B$, y $g : B \to C$ funciones. A la función $g \circ f : A \to C$, definida de la siguiente forma:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)),$$

para cada $a \in A$, se le conoce como la composición de $f$ y $g$.

Tres tipos de funciones nos interesan: las inyectivas, las sobreyectivas, y las biyectivas.

**Definición 1.4**

Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que la función $f$ es:

- inyectiva, si siempre que $a_1 \neq a_2$ en $A$, entonces $f(a_1) \neq f(a_2)$ en $B$, o bien utilizando la contrapositiva, si siempre que $f(a_1) = f(a_2)$, implica que $a_1 = a_2$.
- sobreyectiva, si para cada $b \in B$ existe un $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
- biyectiva, si es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente.

**Ejemplo 1.3**

Sea $A,B,C,D$ conjuntos, ninguno de ellos vac ío, y $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ funciones tales que $g \circ f$ y $h \circ g$ son biyectivas. Entonces se puede concluir que $f,g,h$ son biyectivas.

Probemos que $f$ es inyectiva. Supongamos que $f(a_1) = f(a_2)$, entonces al aplicar la función $g$, obtenemos que $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, y por definición de composición se sigue que $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$, y al utilizar la biyectividad de $g \circ f$, se sigue que $a_1 = a_2$.

De la misma forma se puede probar que $g$ es inyectiva. Supongamos que $g(b_1) = g(b_2)$, entonces al aplicar la función $h$, obtenemos que $h(g(b_1)) = h(g(b_2))$, y por definición de composición se sigue que $(h \circ g)(b_1) = (h \circ g)(b_2)$, y al utilizar la biyectividad de $h \circ g$, se sigue que $b_1 = b_2$.

Veamos que $g$ es sobreyectiva. Sea $c \in C$, entonces como $g \circ f : A \to C$ es biyectiva, debe existir $a \in A$ tal que $g(f(a)) = c$, y al tomar $b = f(a)$, se sigue que $g(b) = c$.

Probemos que $h$ es sobreyectiva. Sea $d \in D$, y como $h \circ g : B \to D$ es biyectiva, debe existir $b \in B$ tal que $h(g(b)) = d$. Tomando $g(b) = c$, se sigue que $h(c) = d$.

Probemos que $f$ es sobreyectiva. Sea $b \in B$, y considere $g(b)$, el cual es un elemento en $C$. Por la biyectividad de $g \circ f$ se sigue que existe $a \in A$ tal que $g(f(a)) = g(b)$, y como ya sabemos que $g$ es inyectiva, entonces $f(a) = b$.

Por último, probemos que $h$ es inyectiva. Supongamos que existen $c_1 \neq c_2$ tales que $h(c_1) = h(c_2)$. Por biyectividad de $g \circ f$ existen $a_1 \neq a_2$ en $A$ tales que $g(f(a_1)) = c_1$ y $g(f(a_2)) = c_2$. Al aplicar $h$ en ambos lados de la igualdad anterior tenemos que $h(g(f(a_1))) = h(g(f(a_2)))$. Ahora bien, utilizando la asociatividad de la composición, se llega a que: $(h \circ g)(f(a_1)) = (h \circ g)(f(a_2))$, y por la biyectividad de $h \circ g$ se conluye que $f(a_1) = f(a_2)$, y como $f$ es inyectiva, se sigue que $a_1 = a_2$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $h$ debe ser inyectiva.

**Ejemplo 1.4**

La siguiente función $f: ]0,1[ \to \mathbb{R}^+$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1/2 \\ \dfrac{1}{4(1-x)} & \text{si } 1/2 < x < 1, \end{cases}$$

es inyectiva y sobreyectiva.

Para probar la inyectividad vamos a proceder por casos. En primer lugar, tomemos dos elementos distintos en el intervalo $]0,1/2]$, digamos $a_1$ y $a_2$. Ahora bien, sus imágenes son por definición $f(a_1) = a_1$, y $f(a_2) = a_2$, y por lo tanto diferentes también. En segundo lugar, tomemos dos elementos distintos $a_1$ y $a_2$ en el intervalo $]1/2,1[$. Sus imágenes son distintas, ya que si fueran iguales entonces tendríamos:

$$f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow \frac{1}{4(1-a_1)} = \frac{1}{4(1-a_2)} \Longrightarrow 4(1-a_2) = 4(1-a_1) \Longrightarrow a_1 = a_2,$$

lo cual contradice que $a_1$ y $a_2$ son distintos. Por último, tomamos $a_1$ en $]0,1/2[$ y $a_2$ en $]1/2,1[$. Observemos que $f(a_1) = a_1$, pero por otra parte se tiene que:

$$\frac{1}{2} < a_2 < 1 \Longrightarrow -1 < -a_2 < -\frac{1}{2} \Longrightarrow 0 < 1 - a_2 < \frac{1}{2} \Longrightarrow 0 < 4(1-a_2) < 2,$$

y de esto sigue que

$$\frac{1}{4(1-a_2)} > \frac{1}{2} \Longrightarrow f(a_2) > \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, se concluye que $f(a_1) \neq f(a_2)$, ya que $f(a_1) \leq 1/2$ y $f(a_2) > 1/2$. Dado lo anterior se concluye que $f$ es inyectiva.
Para probar que $f$ es sobreyectiva, nos damos un elemento $y \in \mathbb{R}^+$, y buscamos un $x$ en $]0,1[$ tal que $f(x) = y$. Si $y \in ]0,1/2]$, tomando $x = y$ tenemos que $f(x) = y$. Por otra parte, si $y > 1/2$, entonces tomando $x = 1 - 1/(4y)$, se tiene que:

$$f(x) = f\left(1 - \frac{1}{4y}\right) = \frac{1}{4\left(1 - \left(1 - \frac{1}{4y}\right)\right)} = \frac{1}{4\frac{1}{4y}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y.$$

En resumen, al ser $f$ inyectiva y sobreyectiva, se concluye que $f$ es biyectiva.

Más adelante se probará que esta misma función es biyectiva al exhibir explícitamente su inversa.

Dada una función, $f: A \to B$, queremos formar nuevas funciones a partir de $f$. Dos nuevas funciones surgen al restringir el dominio y el codominio de $f$.

**Definición 1.5**

Dada una función $f : A \to B$ y $A_1 \subset A$, definimos, la función restricción a $A_1$, por $f|_{A_1} : A_1 \to B$, y con asignación $f|_{A_1}(x) := f(x)$.

Aunque la función $f : A \to B$ y la función restricción $f|_{A_1} : A_1 \to B$ poseen igual codominio y la misma regla de asignación, resulta que poseen dominio diferente y por lo tanto son distintas como funciones.

**Definición 1.6**

Dada una función $f : A \to B$ definimos, la función restricción al rango, a la nueva función $\tilde{f} : A \to f(A)$, y con asignación $\tilde{f}(x) := f(x)$.

Observe que esta función posee el mismo dominio, y la misma asignación que $f$, y sólo difiere en el codominio, luego son técnicamente diferentes.

**Ejemplo 1.5**

Consideremos la siguiente función, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$ representa la parte entera de $x$. Por ejemplo, $f(1{,}5) = 1{,}5 - \lfloor 1{,}5 \rfloor = 0{,}5$. Ahora bien, observe que si restringimos dicha función a $\mathbb{N}$, obtenemos la función cero, es decir, que $f|_{\mathbb{N}} = 0$, ya que

$$f|_{\mathbb{N}}(n) = f(n) = n - \lfloor n \rfloor = n - n = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente resultado resulta obvio, pero será de mucha importancia en lo que sigue.

**Teorema 1.1**

Sea $f : A \to B$ una función inyectiva. Si $A_1 \subset A$, entonces $f|_{A_1}$ también es inyectiva. La misma propiedad conserva $\tilde{f} : A \to f(A)$.

Supongamos que $f|_{A_1}(a_1) = f|_{A_1}(a_2)$, entonces por la definición de función restricción a $A_1$, se sigue que $f(a_1) = f(a_2)$, y por la inyectividad de $f$, se concluye que $a_1 = a_2$. Por lo tanto, $f|_{A_1}$ es inyectiva.

La prueba de que la restricción al rango es inyectiva se deja al lector.

**Ejemplo 1.6**

Es claro que la función restricción al rango no conserva la sobreyectividad. Para justificar lo anterior basta exhibir un ejemplo. Considere la siguiente función sobreyectiva $f : A \to B$, donde $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,4,9,16,25\}$, y $f(x) = x^2$. Si consideramos $A_1 = \{1,3,5\}$, entonces se sigue que $f|_{A_1} : A_1 \to B$ no es sobreyectiva, ya que, por ejemplo, para $4 \in B$ no existe $x \in A_1$ tal que $f|_{A_1}(x) = 4$, es decir, $x^2 = 4$ con $x \in A_1$.

Por otra parte, es claro que se cumple el siguiente resultado:

**Teorema 1.2**

Si $f : A \to B$ es una función inyectiva, entonces $\tilde{f} : A \to f(A)$, la función restricción al rango, es biyectiva.

Esto está, en la realidad, contenido en el teorema anterior pero preferimos tenerlo como un resultado aparte. Recuerde que al restringir al rango obtenemos automáticamente sobreyectividad.

Ahora pasamos a definir el concepto de imagen inversa bajo una función.

**Definición 1.7**

Sea $f : A \to B$ una función y consideremos $B_1 \subset B$. Se llama imagen inversa de $B_1$, bajo $f$, al subconjunto de $A$, expresado por $f^{-1}(B_1)$, y definido por:

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A : f(x) \in B_1\}.$$

**Ejemplo 1.7**

Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Es claro que $f^{-1}(]-\infty,0[) = \emptyset$, ya que

$$f^{-1}(]-\infty,0[) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in ]-\infty,0[\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\}.$$

Por otra parte, se tiene que $f^{-1}(\{1,2\}) = \{-1,1,\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$, ya que

$$f^{-1}(\{1,2\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \{1,2\}\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \{1,2\}\} = \{-1,1,\sqrt{2},-\sqrt{2}\}.$$

Es claro también que $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, y esto se deja para que el lector lo compruebe.

Veamos el siguiente resultado que liga inyectividad con imágenes inversas.

**Teorema 1.3**

La función $f : A \to B$ es inyectiva, si y sólo si, $f^{-1}(\{b\})$ es vacío, o posee un sólo elemento.

Supongamos que la función $f : A \to B$ es inyectiva, y sea $b \in B$. Si $f^{-1}(\{b\})$ es igual a $\emptyset$ el resultado es inmediato. Si por el contrario se tiene que $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$, entonces este último conjunto sólo puede tener un elemento, ya que si tuviera al menos dos, digamos $a_1, a_2$, entonces como $a_1, a_2 \in f^{-1}(\{b\})$ se sigue que $f(a_1) = f(a_2) = b$, y por inyectividad $a_1 = a_2$. Por lo tanto, $f^{-1}(\{b\}) = \{a\}$, es decir consta de un sólo elemento.

El siguiente resultado liga la sobreyectividad con la imagen inversa.

**Teorema 1.4**

La función $f : A \to B$ es sobreyectiva, si y sólo si, $f^{-1}(B_1) \neq \emptyset$, para todo $B_1 \subset B$, no vacío.

Sea $B_1 \subset B$ tal que $B_1 \neq \emptyset$, entonces para cada $b \in B_1$, debido a la sobreyectividad, existe un $a \in A$ tal que $f(a) = b \in B_1$, y esto es lo mismo que decir que $a \in f^{-1}(B_1)$, y por lo tanto $f^{-1}(B_1) \neq \emptyset$.
Por otra parte, si $b \in B$, entonces $\{b\} \subset B$, no vacío, y por hipótesis $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$. Esto a su vez implica que existe $a \in A$ con $f(a) = b$, y por lo tanto, $f$ es sobreyectiva.
En ocasiones, para probar que una función es biyectiva, el exhibir explícitamente la llamada función inversa, más que probar que la función es inyectiva y sobreyectiva.

**Definición 1.8**

Sea $f : A \to B$ una función. Se dice que $g : B \to A$ es la inversa de $f$ si se cumple lo siguiente:

$$g \circ f = 1_A, \qquad f \circ g = 1_B.$$

Los siguientes teoremas muestran la equivalencia que existe entre estos dos conceptos.

**Teorema 1.5**

Si $f : A \to B$ es una función biyectiva, entonces existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.

Supongamos que se cumple que existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.

Para probar la inyectividad, suponemos que $f(a_1) = f(a_2)$, luego al componer con la función $g$ se sigue que $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, y entonces

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Longrightarrow 1_A(a_1) = 1_A(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2.$$

Para probar la sobreyectividad, sea $b \in B$, y consideremos $a = g(b)$, el cual es un elemento en $A$. Ahora, basta observar lo siguiente:

$$f(g(b)) = f \circ g(b) = 1_B(b) = b.$$

Por otra parte, definamos $g : B \to A$ de la siguiente forma: $g(b) = a$, donde $a \in f^{-1}(\{b\})$. Como $f$ es sobreyectiva, ya sabemos por un teorema anterior que $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$, y como $f$ es inyectiva, por otro teorema mostrado anteriormente, se sique que entonces $f^{-1}(\{b\})$ posee un único elemento $a$. Por lo tanto, $g$ está bien definida.

Por último, probemos que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. En efecto, se $a \in A$, entonces $g(f(a)) = a$, por la definición de $g$. Por otra parte, $f(g(b)) = f(a) = b$, donde $a \in f^{-1}(\{b\})$.

Entonces, de ahora en adelante, si queremos probar que una función es biyectiva, tenemos dos formas. La primera es probar que es inyectiva y sobreyectiva, y la segunda es calculando la inversa.

**Actividad 1.1** *Sean $\{A_i\}_{i \in I}$, y $\{B_i\}_{i \in I}$ dos colecciones de conjuntos no vacíos, tales que para cada $i \in I$ existe una función $f_i : A_i \to B_i$. Si para todo $x \in A_i \cap A_j$ se tiene que $f_i(x) = f_j(x) \in B_i \cap B_j$, entonces defina la* *función* $f : \cup_{i\in I} A_i \to \cup_{i\in I} B_i$ *por medio de* $f(a) = f_i(a)$, *siempre que* $a \in A_i$.

- *Pruebe que* $f$ *es en efecto una función.*
- *Si cada* $f_i$ *es es sobreyectiva, entonces* $f$ *es sobreyectiva.*
- *Si* $f$ *es inyectiva, entonces cada* $f_i$ *es inyectiva.*
- *Si cada* $f_i$ *es inyectiva, y si* $\{B_i\}_{i\in I}$ *es disjunta a pares, entonces* $f$ *es inyectiva.*
- *Si* $\{B_i\}_{i\in I}$ *es disjunta a pares, entonces* $f$ *posee inversa si, y sólo si, cada* $f_i$ *posee inversa.*

## 1.3 Conjuntos Equivalentes

**Definición 1.9**

Dados dos conjuntos $A$ y $B$, diremos que $A$ es equivalente a $B$, si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Cuando $A$ y $B$ son equivalentes se utiliza la notación $A \simeq B$.

El primer resultado importante sobre conjuntos equivalentes es que dicha relación es de equivanlecia.

**Teorema 1.6**

La relación $\simeq$ es de equivalencia,

Probemos que tal relación es reflexiva, es decir, que para cada conjunto $A$ se tiene que $A \simeq A$. Para esto basta tomar la función identidad, $1_A : A \to A$, dada por $1_A(a) = a$, la cual es claramente biyectiva.

Probemos que la relación es simétrica, es decir, si $A \simeq B$, entonces existe una función biyectiva $f : A \to B$, luego $f^{-1} : B \to A$ es biyectiva, y por lo tanto, $B \simeq A$.

Por último, probemos que dicha relación es transitiva. Supongamos que $A \simeq B$ y $B \simeq C$, entonces existen funciones biyectivas, $f : A \to B$, y $g : B \to C$. Tomando la composición $g \circ f : A \to C$, obtenemos una función biyectiva entre $A$ y $C$, y por lo tanto, $A \simeq C$.

**Ejemplo 1.8**

La función siguiente nos da directamente una biyección entre $[0,1]$ y $]0,1[$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \\ \dfrac{x}{2x+1} & \text{si } x = \frac{1}{n}, \text{ y } n \in \mathbb{N} \\ \\ x & \text{si } x \neq \frac{1}{n}, 0 \end{cases}$$

Para mostrar que $f$ es, en efecto, una biyección, en lugar de probar que es inyectiva y sobreyectiva vamos a exhibir su inversa:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ \\ \dfrac{x}{1-2x} & \text{si } x = \frac{1}{n+2}, \text{ y } n \in \mathbb{N} \\ \\ x & \text{si } x \neq \frac{1}{n}, 0 \end{cases}$$

Para ver que efectivamente es la inversa, vamos a calcular $f \circ g$ y $g \circ f$. En primer lugar observe que para $x = 0$, $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1/2) = 0$. En segundo lugar, para $x = 1/n$, donde $n \in \mathbb{N}$, se tiene lo siguiente:

$$(g \circ f)\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = g\left(\frac{1/n}{2/n+1}\right) = g\left(\frac{1}{2+n}\right) = \frac{\frac{1}{2+n}}{1 - \frac{2}{2+n}} = \frac{1}{n},$$

y en tercer lugar, si $x \neq 1/n$, entonces $g(f(x)) = g(x) = x$, y por lo tanto $g \circ f = 1_{[0,1]}$. Se deja como un ejercicio para el lector, que verifique $f \circ g = 1_{]0,1[}$.

Se concluye que $[0,1]$ y $]0,1[$ son equiivalentes.

**Teorema 1.7**

Sean $A, B$ conjuntos arbitrarios. Entonces $A \times B$ es equivalente con $B \times A$, donde $A \times B$ representa el producto cartesiano.

Lo que debemos exhibir es una función biyectiva entre $A \times B$ y $B \times A$. Esto es inmediato al tomar: $f : A \times B \to B \times A$, dada por $f(a,b) = (b,a)$.

Es fácil ver que esta función es biyectiva, de hecho, $f^{-1} : B \times A \to A \times B$, dada por $f^{-1}(b,a) = (a,b)$, es inversa de $f$, ya que:

$$(f^{-1} \circ f)(a,b) = f^{-1}(f(a,b)) = f^{1}(b,a) = (a,b) = 1_{A \times B},$$

y por otra parte,

$$(f \circ f^{-1})(b,a) = f(f^{-1}(b,a)) = f(a,b) = (b,a) = 1_{B \times A}.$$

## 1.4 El Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder.

En general, es difícil el exhibir una función explícita que sea biyección entre conjuntos $A$ y $B$. Resulta, algunas veces más sencillo el establecer una biyección entre $A$ y un subconjunto de $B$, y recíprocamente, para luego concluir que $A$ y $B$ son biyectivos. Esto es lo que establece el famoso teorema de Cantor-Schroeder.

Enunciamos el siguiente importante lema.

**Lema 1.0**

Sea $A_1, A$, y $B$ conjuntos tales que:

- $A_1 \subset B \subset A$, y
- $A$ y $A_1$ equivalentes.

Entonces, se tiene que $A$ y $B$ son equivalentes.

Como $A$ es equiivalente con $A_1$, se sigue por la definición que existe $f : A \to A_1$ biyectiva.

Por hipótesis, $B \subset A$, y podemos considerar la función restricción del domino, $f|_B : B \to A_1$. No olvide que $f|_B(x) := f(x)$.

Como $f$ es inyectiva, ya que es biyectiva, se tiene que $f|_B$ también es inyectiva. En efecto, si $f|_B(b_1) = f|_B(b_2)$, entonces $f(b_1) = f(b_2)$, y por la inyectividad de $f$ se sigue que $b_1 = b_2$.

Por lo tanto, la función restricción del codominio, $\tilde{f|}_B : B \to f|_B(B)$ es biyectiva. Como por hipótesis es inyectiva, y luego al restringir el codominio a la imagen la hacemos sobreyectiva, y por lo tanto biyectiva.

Tomando $B_1 = f|_B(B)$, tenemos que tanto $B_1 \subset A_1$, y que $B$ es equivalente con $B_1$.

En resumen, lo que hemos mostrado es que si $A_1 \subset B \subset A$ y $A$ y $A_1$ equivalentes, entonces existe $B_1$ tal que $B_1 \subset A_1 \subset B \subset A$ y $B_1$ equivalente con $B$.

Por lo tanto, el resultado anterior se lo podemos aplicar a $B_1 \subset A_1 \subset B$ y $B$ equivalente con $B_1$, lo que resulta es que existe $A_2 \subset B_1$ con $A_2$ equipotente con $A_1$.

Una vez más aplicamos el resultado a $A_2 \subset B_1 \subset A_1$ y $A_1$ equivalente con $A_2$, con lo cual obtenemos $B_2 \subset A_2$ y $B_2$ equivalente con $B_1$.

Observemos que hasta el momento tenemos lo siguiente:

$$B_2 \subset A_2 \subset B_1 \subset A_1 \subset B \subset A,$$

donde $A$ y $A_1$ son equivalentes; $B$ y $B_1$ son equivalentes; $A_1$ y $A_2$ son equivalentes; $B_2$ y $B_1$ son equivalentes, por la transitividad.

Podemos seguir empleando el resultado, y encontraremos dos sucesiones de conjuntos, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que:

- $\cdots \subset B_n \subset A_n \subset B_{n-1} \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset B_1 \subset A_1 \subset B \subset A$, y
- $A_i$ equivalente con cada $A_j$, y $B_i$ equivalentes con cada $B_j$, para todo $i, j$.

La idea ahora es tomar la intersección de todos los conjuntos que hemos obtenido, es decir:

$$T = A \cap B \cap A_1 \cap B_1 \cap A_2 \cap B_2 \cap \cdots .$$

Esta intersección puede, o no, ser vacía. Hay que tener presente esto, pero tampoco es indispensable.

Consideremos las dos siguientes igualdades:

- $A = (A \setminus B) \cup (B \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus B_1) \cup \cdots \cup T$,
- $B = (B \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus A_2) \cup \cdots \cup T$

Lo importante ahora es darse cuenta que los conjuntos $A \setminus B; A_1 \setminus B_1; A_2 \setminus B_2; \ldots$ todos ellos son equivalentes entre sí. La prueba es la siguiente, lo haremos para los dos primeros conjuntos de la lista anterior, pero funciona en todos los casos. Se sabe que $A$ y $A_1$ son equipotentes, y también que $B$ y $B_1$ lo son, además de que $B \subset A$ y $B_1 \subset A_1$. La misma $f$ del inicio sirve como función de $A \setminus B$ a $A_1 \setminus B_1$. Observe que está bien definida, es claramente inyectiva, y es sobreyectiva.

Ahora bien, vamos a definir la biyección $g : A \to B$ que andamos buscando:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{Si } x \in A_l \setminus B_l, \text{ o bien } x \in A \setminus B \\ \\ x & \text{Si } x \in B_m \setminus A_n, \text{ donde } n > m, \text{ o bien } x \in T \end{cases}$$

Hay que probar que dicha función es biyectiva, y esto queda como ejercicio para el lector.

Enunciamos a continuación El Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder. Para futuras referrencias a este teorema nos referiremos como el teorema C-B-S.

**Teorema 1.8**

Sean $A, B$ conjuntos tales que existen $A_1, B_1$ subconjuntos de $A$, y $B$, respectivamente. Si $A$ es equipotente con $B_1$, y $B$ es equipotente con $A_1$, entonces $A$ y $B$ son equipotentes.

Como $A$ es equipotente con $B_1$ existe una función biyectiva $f : A \to B_1$. De la misma forma como $B$ es equipotente con $A_1$ existe una función biyectiva $g : B \to A_1$.

Ahora bien, podemos restringir $f$ a $A_1$, es decir considerar $f|_{A_1}$, y ver que $\tilde{f}|_{A_1} : A_1 \to f(A_1)$ es biyectiva, luego $A_1$ es equipotente con $B_2 = f(A_1) \subset B_1$. Entonces, como $B$ es equipotente con $A_1$, se concluye que $B$ es equipotente con $B_2$.

En resumen, tenemos que $B_2 \subset B_1 \subset B$, y que $B$ es equipotente con $B_2$. Por el lema previo, se sigue que $B$ es equipotente con $B_1$, pero como $A$ es equipotente con $B_1$, por transitividad, se sigue que $A$ y $B$ son equipotentes.

**Ejemplo 1.9**

Veamos, por medio del teorema de C-S-B, que $[0,1]$ es equipotente con $]0,1[$. En primer lugar, necesitamos probar que $]0,1[$ es equipotente con algún subconjunto de $B_1 \subset [0,1]$. Podemos tomar como $B_1 = ]0,1[$, y ver entonces que la función identidad sería una biyección entre $]0,1[$ y $]0,1[$.

La otra parte, es decir, establecer una biyección entre $[0,1]$ y algún subconjunto $A_1$ de $]0,1[$ tiene un poco más de trabajo. Podemos considerar como $A_1$ al intervalo $[\frac{1}{2016}, \frac{1}{2015}]$, pero cualquier otro intervalo cerrado contenido en $]0,1[$ funciona. Busquemos la fórmula para el segmento de recta que pasa por los puntos $(0,1/2016)$ y $(1,1/2015)$. No es difícil ver que tal segmento de recta es dado por la fórmula:

$$y = \left(\frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}\right)x + \frac{1}{2016},$$

para los valores de $x \in [0,1]$. Esta es una biyección, y por lo anterior podemos concluir, utilizando el teorema de C-S-B, que $]0,1[$ es equipotente con $[0,1]$.

## 1.5 Conjuntos Finitos e Infinitos

**Definición 1.10**

Un conjunto $A \neq \emptyset$, se llamará finito, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A$ es equipotente con el conjunto $\{1,\ldots,n\}$.
Si denotamos por $I_n$ al conjunto $\{1,\ldots,n\}$, entonces la definición anterior, de que $A$ es finito, significa que existe una biyección entre $A$ e $I_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$.
Si un conjunto no es finito, entonces lo llamaremos infinito, y esto significa que no existe biyección entre dicho conjunto e $I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Observacion 1.1** *Por convención se tiene que $\emptyset$ es finito.*

**Lema 1.0**

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a \in A$. Entonces, existe una biyección $f : A \to I_{n+1}$, si, y sólo si existe una biyección $g : A \setminus \{a\} \to I_n$.

La parte fácil de la prueba es la suficiencia. En efecto, supongamos que existe una biyección $g : A \setminus \{a\} \to I_n$, y construyamos una biyección $f : A \to I_{n+1}$.

Tal biyección se define de la siguiente forma:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a, \\ \\ n+1 & \text{si } x = a, \end{cases}$$

Se comprueba que $f$ es biyectiva, ya que su inversa es dada por:

$$f^{-1}(x) \;=\; \begin{cases} g^{-1}(m) & \text{si } m \in I_n, \\ \\ a & \text{si } m = n+1, \end{cases}$$

Por otra parte, supongamos que existe una biyección $f : A \to I_{n+1}$, y construyamos una biyección $g : A \setminus \{a\} \to I_n$.

Esta prueba hay que dividirla en dos partes. Si $f(a) = n+1$, entonces es obvio que $f : A \setminus \{a\} \to I_n$ es la función que hará el trabajo.

Por otra parte, si $f(a) \neq n+1$, entonces $f(a) = m$, donde $m < n+1$, y debe existir $b \in A$ tal que $f(b) = n+1$, por biyectividad de $f$. Entonces, podemos definir la siguiente función:

$$h(x) \;=\; \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a,b \\ \\ n+1 & \text{si } x = a, \\ \\ m & \text{si } x = b \end{cases}$$

Esta función cumple ser biyectiva, ya que su inversa es dada por:

$$h^{-1}(k) \;=\; \begin{cases} f^{-1}(k) & \text{si } k \neq m, n+1 \\ \\ a & \text{si } k = n+1, \\ \\ b & \text{si } k = m \end{cases}$$

Entonces, como $h : A \to I_{n+1}$ es biyectiva, y cumple que $h(a) = n+1$, estamos en el caso anterior, y se sigue que: $g = h|_{A-\{a\}}$, es la función biyectiva buscada.

No está demás señalar que la contrapositiva de este lema es importante, y la enunciamos como un corolario.

**Corolario 1.1**

No existe biyección entre $A$ e $I_{n+1}$, si, y sólo si no existe biyección entre $A \setminus \{a\}$ e $I_n$.

**Teorema 1.9**

Sea $A$ un conjunto tal que $A$ es equipotente con $I_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $B \subsetneq A$. Entonces $B$ no es equipotente con $I_n$. Sin embargo, si $B \neq \emptyset$, $B$ es equipotente con $I_m$ para algún $m < n$.

Si $B = \emptyset$, entonces no hay nada que probar. Por lo tanto, supongamos que $B \neq \emptyset$.

Se procederá por inducción matemática sobre $n$. Si $n = 1$, entonces $A$ es, por hipótesis, equipotente con $\{1\}$, y por lo tanto $B$ debería ser $\emptyset$, y de nuevo no hay nada que mostrar.

Supongamos que el resultado es cierto para $n$, es decir que siempre que $A$ es equipotente con $I_n$, y $B \subsetneq A$, entonces $B$ no es equipotente con $I_n$, y si $B \neq \emptyset$ existe una biyección de $B$ con algún $I_m$, para cierto $m < n$.

Sea $f : A \to I_{n+1}$ una biyección, y consideremos $B \subsetneq A$. Vamos a probar que no existe una biyección entre $B$ e $I_{n+1}$.

Consideremos $a,b$ tales que $a \in B$ y $b \in A \setminus B$. Por un resultado anterior, debe existir una biyección $g : A \setminus \{a\} \to I_n$. Además nótese que $b \in A \setminus \{a\}$, y que $b \notin B \setminus \{a\}$. Se concluye que $B \setminus \{a\} \subsetneq A \setminus \{a\}$.

Por hipótesis inductiva, no existe biyección entre $B \setminus \{a\}$ e $I_n$.

Además, si $B \setminus \{a\} = \emptyset$ , o bien $B = \{a\}$, o bien, existe $g : B \setminus \{a\} \to I_k$ para $k < n+1$, y luego $B$ es equivalente con $I_k$ .
Por lo tanto, utilizando la contrapositiva del resultado anterior, se concluye que no existe biyección entre $B$ e $I_{n+1}$.

**Corolario 1.2**

Si $A$ es finito, entonces no existe una biyección entre $A$ y cualesquiera de sus subconjuntos propios.

Supongamos que $f : A \to I_n$ es una biyección para algún $n \in \mathbb{N}$. Si existiera $g : A \to B$ biyección , donde $B \subsetneq A$, entonces la composición $f \circ g^{-1} : B \to I_n$ sería una biyección entre $B$ e $I_n$, lo cual es un absurdo en virtud del resultado anterior.

**Corolario 1.3**

El número de elementos de un conjunto finito $A$ es determinado de forma única por $A$.

Supongamos que existan biyecciones $f : A \to I_n$, y $g; A \to I_m$, donde $n < m$.

Consideremos $f \circ g^{-1} : I_m \to I_n$, la cual es una biyección. Esto contradice el corolario anterior.

Por lo tanto, si $A$ es finito existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $A$ es equipotente con $I_n$.

**Corolario 1.4**

El conjunto $\mathbb{N}$ es infinito.

Observe que $\mathbb{N} \setminus \{1\} \subsetneq \mathbb{N}$, y que la función $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n - 1$ es biyectiva, ya que su inversa es dada por $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que $f^{-1}(m) = m + 1$.
Por lo tanto, existe un subconjunto propio de $\mathbb{N}$ que es equipotente con él, y esto indica que $\mathbb{N}$ no puede ser finito, entonces debe ser infinito.

**Teorema 1.10**

Sean $A \neq \emptyset$, y $n \in \mathbb{N}$ . Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $A$ es finito y posee a lo sumo $n$ elementos.
2. Existe una función sobreyectiva $f : I_n \to A$.
3. Existe una función inyectiva $g : A \to I_n$.

Supongamos que $A$ es finito, y que posee a lo sumo $n$ elementos. Como ser equipotente es una relación simétrica, existe una biyección $h : I_m \to A$, donde $m \leq n$. Si $m = n$, entonces podemos tomar como $f$ a la misma función $h$, la cual al ser biyectiva, será sobreyectiva.

Si $m < n$, consideremos la función $f : I_n \to A$, definida por:

$$f(k) = \begin{cases} h(k) & \text{si } k \leq m \\ \\ h(1) & \text{si } m < k \leq n \end{cases}$$

Esta función es claramente sobreyectiva.

Supongamos que existe una función sobreyectiva $f : I_n \to A$. Construyamos a partir de $f$ una función inyectiva $g : A \to I_n$ . En efecto, observemos que para cada $a \in A$, el conjunto $f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$, ya que $f$ es sobreyectiva. Además, es claro que si $a_1 \neq a_2$, entonces $f^{-1}(\{a_1\}) \cap f^{-1}(\{a_2\}) = \emptyset$, ya que de lo contrario existiría $z$ tal que $f(z) = a_1$ y $f(z) = a_2$, de donde $a_1 = a_2$, que es un absurdo.

Entonces, podemos definir $g : A \to I_n$ de la siguiente forma:

$$g(a) = \text{ primer elemento del conjunto } f^{-1}(\{a\}).$$

Como $\emptyset \neq f^{-1}(\{a\}) \subset I_n$, por el principio del Buen orden se tiene $g$ está bien definida, y además es inyectiva.

Supongamos que existe $g : A \to I_n$ una función inyectiva. Al considerar la función restricción al rango, es decir $\tilde{g} : A \to g(A) \subset I_n$, obtenemos una función biyectiva. Observe que $g(A) = I_m$, para algún $m \leq n$, de donde se sigue que $A$ es un conjunto finito con a lo más $n$ elementos.

**Ejemplo 1.10**

Demos un ejemplo de dos conjuntos infinitos que no sean equivalentes.

Ya sabemos por un resultado previo que $\mathbb{N}$ es infinito. Consideremos al conjunto de partes de $\mathbb{N}$, es decir, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Este último conjunto es infinito, ya que no puede existir una función inyectiva $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to I_n$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos una función arbitraria, $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to I_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces es claro que para $k = 1, \ldots, n+1$ , cada conjunto $\{k\}$ tiene por imagen a $f(\{k\}) \in I_n$, sin embargo por el principio de las Casillas, al menos dos de tales imágenes deben ser iguales, y no podrá ser $f$ inyectiva. Por lo tanto, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es un conjunto infinito.

Ahora bien, se probará que $\mathbb{N}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no pueden ser equivalentes. Lo anterior ya que cualquier función $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ no puede ser sobreyectiva. En efecto, consideremos el siguiente subconjunto de números naturales, $A = \{n \in \mathbb{N} : n \notin f(n)\}$.

Si la función $f$ fuese sobreyectiva debería existir un $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) = A$. Entonces debe pasar que $m \in A$, o bien $m \notin A$. En cualesquiera de estos dos casos se llega a una contradicción, y por lo tanto $f$ no puede ser sobreyectiva.

En resumen, $N$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ son subconjuntos infinitos los cuales no son equivalentes, ya que cualquier función entre ellos no puede ser sobreyectiva, y luego no puede ser biyectiva.

## 1.6 Conjuntos Contables

**Definición 1.11**

Diremos que un conjunto infinito, $A$, es numerable si es equipotente con $\mathbb{N}$, es decir, si existe una función $f : \mathbb{N} \to A$ la cual sea biyectiva.

**Teorema 1.11**

Un conjunto $A$ es infinito, si y sólo si, existe $B \subset A$ tal que $B$ sea numerable.

Si el conjunto $A$ posee un subconjunto $B$, el cual es numerable, entonces por definición, $B$ es infinito, y se sigue que $A$ también es infinito.

Supongamos que $A$ es infinito, entonces existe $a_0 \in A$. Consideremos $A_1 = A \setminus \{a_0\}$, y es claro que $A_1 \neq \emptyset$ , de lo contrario $A$ sería finito. Continuando de esta forma, es decir considerando un $a_{n+1} \in A_{n+1}$, donde $A_{n+1} = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ no es vacío, tenemos como resultado que el conjunto infinito, $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, es subconjunto de $A$, y además es numerable, al poder etiquetar sus subíndices con números naturales.

La diferencia fundamental, para efectos de esta teoría, entre conjuntos finitos e infinitos radica en la siguiente proposición.

**Teorema 1.12**

Cada conjunto infinito es equivalente a uno de sus subconjuntos propios.

Sea $A$ un conjunto infinito. Por definición, $A \neq \emptyset$, y luego podemos tomar $a_0 \in A$. Consideremos ahora el nuevo conjunto $B = A \setminus \{a_0\}$. De $B$ podemos afirmar que es infinito, y la prueba es que si $B$ fuese finito, entonces $A$ también lo sería y esto es absurdo.

Apliquemos a $B$ el resultado previo, es decir que $B$ posee un subconjunto numerable, y denotemos a dicho conjunto por $P = \{a_1, a_1, a_3, \ldots\}$.

Entonces definimos la función, $f : A \to B$, por medio de la fórmula:

$$f(x) = \begin{cases} a_1 & \text{si } x = a_0 \\ a_{n+1} & \text{si } x = a_n, \text{ y } n \in \mathbb{N} \\ x & \text{si } x \neq a_n, a_0 \end{cases}$$

Se afirma que dicha función es biyectiva, y para ello mostramos explícitamente a la función inversa, $f^{-1} : B \to A$, dada por:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} a_0 & \text{si } x = a_1 \\ a_n & \text{si } x = a_{n+1}, \text{ y } n \in \mathbb{N} \\ x & \text{si } x \neq a_n \end{cases}$$

Queda como ejercicio que el lector verifique que $f \circ f^{-1} = 1_B$, y que $f^{-1} \circ f = 1_A$.

Se puede dar otra prueba de este teorema. Observemos que el subconjunto obtenido en la prueba anterior, resultó ser el mismo conjunto original quitándole un punto. Se logra lo mismo si quitamos un subconjunto numerable.

De nuevo sea $A$ un conjunto infinito. Utilizando el teorema 1.11, $A$ posee un subconjunto numerable $B$, el cual es propio. Que $B$ sea numerable, quiere decir que lo podemos escribir de la siguiente forma:

$$B = \{f(1), f(2), f(3), \ldots\},$$

donde $f : \mathbb{N} \to B$ es una función biyectiva. Expresemos a $B$ como la unión de dos subconjuntos numerables disjuntos, es decir, $B = B_1 \cup B_2$ con $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, y $B_1, B_2$ numerables.

Es claro que $B$ y $B_1$ son equivalentes. En efecto, la función que hace el trabajo es $g: B \to B_1$, dada por, $g(f(n)) = f(2n+1)$, para $n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, se afirma que $A$ es equivalente con $A \setminus B_2$. En efecto, la función, $h: A \to A \setminus B_2$, dada por:

$$h(x) = \begin{cases} g(f(n)) & \text{si } x = f(n) \\ \\ x & \text{si } x \neq f(n), \end{cases} \qquad \text{es biyectiva.}$$

**Actividad 1.2** *En esta actividad se desea que usted pruebe el siguiente teorema debido a Kolmogorov-Fomin: Sea $M$ un conjunto infinito, y $A$ un conjunto numerable arbitrario. Pruebe que $M$ y $M \cup A$ son equivalentes.*

**Teorema 1.13**

Sea $A$ un conjunto. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. El conjunto $A$ es infinito.
2. Existe una función inyectiva $f: \mathbb{N} \to A$.
3. Existe una función biyectiva de $A$ con un subconjunto propio de $A$.

Probaremos primero que 1. y 2. son equivalentes. Supongamos que $A$ es infinito, se sigue que existe $B \subset A$ tal que $B$ es numerable. Luego existe $h: \mathbb{N} \to B$ biyectiva. Podemos utilizar la función $j: B \to A$ dada por $j(x) = x$, la cual es claramente inyectiva. Al realizar la composición $j \circ h: \mathbb{N} \to A$, obtenemos una función inyectiva, la cual es la $f$ buscada. Por otra parte, si existe una función $f: \mathbb{N} \to A$ inyectiva, entonces obtenemos una biyección entre $\mathbb{N}$ y un subconjunto de $A$ al tomar la restricción de $f$ al rango, $\tilde{f}: \mathbb{N} \to f(A) \subset A$, y por un resultado anterior se sigue que $A$ es infinito.

Probemos que 2. implica 3. Supongamos que existe $f: \mathbb{N} \to A$ inyectiva. De nuevo, al tomar la restricción al rango, $\tilde{f}: \mathbb{N} \to f(A) \subset A$, obtenemos una función biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $f(A) \subset A$. Por lo tanto, $A$ posee un subconjunto numerable, y entonces $A$ es infinito. Luego, al ser $A$ infinito es equivalente a uno de sus subconjuntos propios, y esto da la biyección buscada.

Probemos que 3. implica 1. Supongamos que $A$ posee un sunconjunto propio $B$ tal que $A$ es equivalente con $B$. Como los conjuntos finitos no pueden tener biyecciones con sus subconjuntos propios, se llega a que $A$ debe ser infinito.

**Corolario 1.5**

Si $A$ y $B$ son conjuntos infinitos, entonces $A \times B$ es infinito.

Por el teorema anterior, existen funciones inyectivas $f: \mathbb{N} \to A$, y $g: \mathbb{N} \to B$. Consideremos la función $h: \mathbb{N} \to A \times B$ dada por $h(n) = (f(n), g(n))$. Es claro que $h$ es inyectiva, ya que si

$$h(n_1) = h(n_2) \Longrightarrow (f(n_1), g(n_1)) = (f(n_2), g(n_2)) \Longrightarrow f(n_1) = f(n_2), g(n_1) = g(n_2),$$

y por la inyectividad de las funciones $f$ y $g$, se sigue que $n_1 = n_2$, y se concluye que $h$ es inyectiva. Por lo tanto, $A \times B$ es infinito.

**Definición 1.12**

Un conjunto, $A$, se llamará contable si es finito, o bien numerable .
Algunas veces a los conjuntos numerables se les llama conjuntos contablemente infinitos.

La definición anterior indica que cuando trabajemos con conjuntos contables hay que diferenciar que puede ser finito o infinito, y que si es infinito es numerable.

**Lema 1.0**

Todo subconjunto $X$ de $\mathbb{N}$ es contable.

Si $X$ es finito, entonces $X$ es contable por definición.

Hagamos el caso en donde $X$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Se sigue por el principio del Buen Orden la existencia de un primer elemento en $X$, al cual llamaremos $x_0$. Consideremos $X_1 = X \setminus \{x_0\}$. Por ser $X$ infinito, se sigue que $X_1 \neq \emptyset$, luego aplicando de nuevo el principio del buen orden a $X_1$, obtenemos un primer elemento de $X_1$, al cual denotaremos por $x_1$. Ahora se considera $X_2 = X_1 \setminus \{x_1\} = X \setminus \{x_0, x_1\}$, y de nuevo, por la infinitud de $X$ y por el principio del buen orden, aplicado a $X_2$ obtenemos un primer elemento, al cual denotaremos por $x_2$. Continuando de esta forma, es decir, denotando por $x_{n+1}$ el primer elemento de $X_{n+1} = X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, se afirma que necesariamente se tiene que cumplir la siguiente igualdad:

$$X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Por una parte, es claro que se tiene la siguiente inclusión: $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset X$. Para probar la otra inclusión, es decir, probar que $X \subset \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, procedemos por reducción al absurdo: suponemos que $X \not\subset \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Se sigue entonces que existe un $x \in X$ tal que $x \notin \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Esto nos lleva a concluir que $x > x_0$ y $x > x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En resumen, $x$ sería una cota superior del conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Hemos arribado a un absurdo, ya que $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ al ser infinito no puede ser acotado.
Por lo tanto, hemos logrado etiquetar cada elemento de $X$ con un único entero positivo, de esto se concluye que $X$ es numerable.

**Teorema 1.14**

Todo subconjunto de un conjunto contable es contable.

Supongamos que $X$ es un conjunto numerable, y que $A$ es un subconjunto infinito de $X$. El caso en que $A$ es finito es inmediato de la definición.

Por hipótesis se tiene que existe una función biyectiva $f : X \to \mathbb{N}$. Consideremos la función restricción del dominio, $f|_A : A \to \mathbb{N}$, la cual sólo conserva la inyectividad. Ahora, restrinjamos el codominio de $f|_A$ de tal forma que obtengamos:

$$\tilde{f|}_A : A \to f(A) \subset \mathbb{N},$$

la cual es una biyección entre $A$ y un subconjunto de $\mathbb{N}$. Como $A$ es infinito, entonces que $f(A)$ debe ser también infinito, y además un subconjunto de $\mathbb{N}$. Se sigue que $f(A)$ debe ser numerable, es decir existe

$g : f(A) \to \mathbb{N}$. Luego la composición $g \circ \tilde{f}\lceil_A$ es una biyección entre $A$ y $\mathbb{N}$, y por lo cual $A$ es numerable.

Un resultado fundamental es mostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, pero exhibir una función biyectiva entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es complicado, en su lugar, se utiliza el resultado anterior.

El siguiente teorema resulta ser económico en cuanto que para mostrar si un conjunto es equivalente con $\mathbb{N}$ no necesitamos hallar una biyección, basta con encontrar una inyección o una sobreyección.

**Teorema 1.15**

Sea $A$ un conjunto no vacío. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. El conjunto $A$ es contable.
2. Existe una función sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to A$.
3. Existe una función inyectiva $g : A \to \mathbb{N}$.

Probemos que 1. implica 2. Si $A$ es finito, entonces existe una función biyectiva $h : I_n \to A$ , para algún $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, obtenemos una función sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to A$, al definirla de la siguiente forma:

$$f(k) = \begin{cases} h(k) & \text{si } k \leq n \\ \\ h(1) & \text{si } k \geq n+1 \end{cases}$$

Esta función es claramente sobreyectiva. Si $A$ fuera numerable, entonces existe $f : \mathbb{N} \to A$ biyectiva, y ella misma es sobreyectiva, y no hay nada más que hacer.
Probemos que 2. implica 3. En efecto, si existe $f : \mathbb{N} \to A$ sobreyectiva, entonces para cada $a \in A$ el conjunto $f^{-1}(\{a\})$ no es vacío y sus elementos son números enteros positivos. Por el principio del buen Orden existe el primer elemento de tal conjunto. Sea la función $g : A \to \mathbb{N}$, definida por:

$$g(a) = \text{ el primer elemento de } f^{-1}(\{a\}).$$

Por lo tanto, dicha función está bien definida, y es inyectiva ya que si $a_1 \neq a_2$, se tiene que $f^{-1}(\{a_1\})$ y $f^{-1}(\{a_2\})$ son disjuntos, luego sus primeros elementos son distintos, y $f$ es inyectiva.

Probemos que 3. implica 1. Supongamos que existe una función inyectiva $g : A \to \mathbb{N}$. Al considerar $\tilde{g} : A \to g(A) \subset \mathbb{N}$ obtenemos una biyección entre $A$ y un subconjunto de $\mathbb{N}$. Ya hemos demostrado que cada subconjunto de un conjunto contable es contable, y como $\mathbb{N}$ es contable, entonces claramente $A$ es contable.

**Ejemplo 1.11**

El conjunto de los enteros, $\mathbb{Z}$, es numerable.

La función biyectiva, $f$, entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ es la siguiente:

$$f(k) = \begin{cases} 2k & \text{si } k > 0 \\ \\ 1 & \text{si } k = 0 \\ \\ -2k+1 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

La biyectividad se puede probar exhibiendo la inversa, o bien mostrando que $f$ es inyectiva y sobreyectiva. Para completitud del ejemplo, exhibimos la inversa:

$$f^{-1}(k) = \begin{cases} \dfrac{k}{2} & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k = 1 \\ \dfrac{1-k}{2} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Se deja al lector que verifique lo anterior.

**Teorema 1.16**

El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es equivalente con $\mathbb{N}$.

Vamos a realizar dos pruebas diferentes de este resultado.

Para la primer prueba, consideremos $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $f(m,n) = (m+n)^2 + n$. Para concluir el resultado, sólo tenemos que probar que la función $f$ es inyectiva, ya que entonces $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ será equipotente con un subconjunto numerable de $\mathbb{N}$, y por lo tanto obtenemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es equipotente con $\mathbb{N}$.

Supongamos que $f(m_1,n_1) = f(m_2,n_2)$, entonces se sigue que $(m_1+n_1)^2 + n_1 = (m_2+n_2)^2 + n_2$. Al realizar un poco de álgebra se llega a que:

$$(m_1+n_1)^2 - (m_2+n_2)^2 = n_2 - n_1, \Longrightarrow (m_1+n_1+m_2+n_2)(m_1+n_1-m_2-n_2) = n_2 - n_1.$$

Tomando valor absoluto, para sólo trabajar con números positivos, se llega a que:

$$(m_1+n_1+m_2+n_2)|m_1+n_1-m_2-n_2| = |n_2-n_1|.$$

Si $n_1 \neq n_2$, entonces se sigue que $m_1+n_1+m_2+n_2$ es divisor de $|n_2-n_1|$, pero ya que es claro que se da la siguiente desigualdad: $m_1+n_1+m_2+n_2 > |n_2-n_1|$, vemos que obtenemos un absurdo, y por lo tanto debe darse que $n_1 = n_2$. Luego debe seguirse que $(m_1+n_1)^2 = (m_2+n_2)^2$, y por lo tanto $m_1 = m_2$, y entonces se concluye que $f$ es inyectiva.

La segunda prueba que queremos presentar es muy interesante, y se basa en considerar a la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por:

$$f(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n.$$

Observe que la función está bien definida, ya que $m+n$ o bien $m+n+1$ es par, y al dividir por dos obtendríamos un número natural.

Vamos a probar que $f$ es inyectiva, pero a diferencia de la prueba anterior, aquí vamos a suponer que $(m_1,n_1) \neq (m_2,n_2)$, y probar que sus imágenes bajo, $f$, también son distintas, es decir $f(m_1,n_1) \neq f(m_2,n_2)$.

Si $(m_1,n_1) \neq (m_2,n_2)$ entonces hay tres casos por considerar, y cada uno de estos casos contiene a su vez subcasos.

Presentamos los casos que se pueden dar:

1. el primero es cuando $n_1 \neq n_2$, pero $m_1 = m_2$,
2. el segundo es cuando $m_1 \neq m_2$, pero $n_1 = n_2$, y
3. el tercer es cuando $n_1 \neq n_2$ y $m_1 \neq m_2$.

Analicemos el primer caso , y sus posibles subcasos. Como $n_1 \neq n_2$ pero $m_1 = m_2$, entonces se tienen los siguientes dos subcasos:

- $n_1 < n_2$ y $m_1 = m_2$, o bien
- $n_1 > n_2$ y $m_1 = m_2$.

Si asumimos que $n_1 < n_2$, pero $m_1 = m_2$, entonces se sigue que $m_1 + n_1 < m_1 + n_2$, y trivialmente también que $m_1 + n_1 + 1 < m_2 + n_2 + 1$, luego

$$\frac{(m_1+n_1)(m_1+n_1+1)}{2} < \frac{(m_2+n_2)(m_2+n_2+1)}{2},$$

y a su vez como $n_1 < n_2$, se llega a que:

$$f(m_1,n_1) = \frac{(m_1+n_1)(m_1+n_1+1)}{2} + n_1 < \frac{(m_2+n_2)(m_2+n_2+1)}{2} + n_2 = f(m_2,n_2),$$

de donde se concluye inyectividad en este primer subcaso.

En el segundo subcaso,del primer caso, es decir, cuando $n_1 > n_2$ y $m_1 = m_2$, se procede exactamente como en el primer subcaso. Sólo resta decir que se concluirá que $f(m_1,n_1) > f(m_2,n_2)$.

Analicemos el segundo caso, y sus posibles subcasos. Como $m_1 \neq m_2$ pero $n_1 = n_2$, entonces se tienen los siguientes subcasos:

- $m_1 < m_2$ y $n_1 = n_2$, o bien
- $m_1 > m_2$ y $n_1 = n_2$.

Si asumimos que $m_1 < m_2$ pero $n_1 = n_2$, entonces se sigue que $m_1 + n_1 < m_1 + n_2$, y trivialmente también que $m_1 + n_1 + 1 < m_2 + n_2 + 1$, luego

$$\frac{(m_1+n_1)(m_1+n_1+1)}{2} < \frac{(m_2+n_2)(m_2+n_2+1)}{2},$$

y a su vez que:

$$f(m_1,n_1) = \frac{(m_1+n_1)(m_1+n_1+1)}{2} + n_1 < \frac{(m_2+n_2)(m_2+n_2+1)}{2} + n_2 = f(m_2,n_2),$$

de donde se concluye inyectividad en este primer subcaso, del caso dos. En el segundo subcaso, es decir, cuando $m_1 > m_2$ y $n_1 = n_2$, se procede exactamente como en el primer subcaso, y se dejan los detalles para el lector.

Analicemos el tercer caso, es decir, cuando $n_1 \neq n_2$ y $m_1 \neq m_2$. Aquí también se presentan varios subcasos, pero además cada uno de los subcasos tendrá a su vez subcasos a considerar.

Los subcasos posibles en este tercer caso son:

- el subcaso $n_1 < n_2$ y $m_1 < m_2$,
- el subcaso $n_1 > n_2$ y $m_1 > m_2$,
- el subcaso $n_1 < n_2$ y $m_1 > m_2$, y
- el subcaso $n_1 > n_2$ y $m_1 < m_2$.

Los dos primeros subcasos son fáciles de tratar, es más para probar la inyectividad en estos casos se procede exactamente en la misma forma en que se procedió en los párrafos anteriores.

Hagamos el subcaso $n_1 < n_2$ y $m_1 > m_2$.

Ahora bien, lo complicado de este subcaso es que se divide en tres subcasos, los cuales presentamos a continuación:

- el subcaso $n_1 + m_1 = m_2 + n_2$, por ejemplo, si $n_1 = 2, m_1 = 7$ y $n_2 = 8, m_2 = 1$. Aquí la prueba es sencilla y se deja al lector. Se debe llegar a que: $f(m_1, n_1) < f(m_2, n_2)$.
- el subcaso $n_1 + m_1 < m_2 + n_2$, por ejemplo si $n_1 = 3, m_1 = 5$ y $n_2 = 10, m_2 = 4$. Es claro que:

$$f(m_1,n_1) = \frac{(m_1+n_1)(m_1+n_1+1)}{2} + n_1 < \frac{(m_2+n_2)(m_2+n_2+1)}{2} + n_2 = f(m_1,n_2),$$

  y de nuevo obtenemos la inyectividad en este subcaso.

- El subcaso $n_1 + m_1 > n_2 + m_2$, por ejemplo, $n_1 = 7, m_1 = 5$ y $n_2 = 9, m_2 = 1$. La idea fundamental es que si $n_2 + m_2 < m_1 + n_1$ y al ser enteros, entonces $n_2 + m_2 + 1 \leq m_1 + n_1$, esto lo usaremos más adelante.

  De la siguiente acotación:

$$\begin{aligned} f(m_2,n_2) &= \frac{(m_2+n_2)(m_2+n_2+1)}{2} + n_2 \\ &< \frac{(m_2+n_2)(m_2+n_2+1)}{2} + n_2 + m_2 + 1 \\ &= \frac{(m_2+n_2)(m_2+n_2+1) + 2(n_2+m_2+1)}{2} \\ &= \frac{(m_2+n_2+1)(n_2+m_2+2)}{2} \\ &< \frac{(m_1+n_1)(n_1+m_1+1)}{2} \\ &< \frac{(m_1+n_1)(n_1+m_1+1)}{2} + n_1 \\ &= f(m_1,n_1), \end{aligned}$$

se deduce entonces que $f$ es inyectiva en este subcaso.

El subcaso $n_1 > n_2$ y $m_1 < m_2$ se trata en la misma forma que el subcaso anterior.

Reuniendo la información anterior se concluye que si $(m_1, n_1) \neq (m_2, n_2)$, entonces siempre sucede que

$$f(m_1, n_1) \neq f(m_2, n_2),$$

y por lo tanto $f$ es inyectiva.

En resumen, como $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es inyectiva, entonces $\tilde{f} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ es biyectiva, y como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es infinito, se concluye que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

**Teorema 1.17**

Si $A$ y $B$ son conjuntos contables, entonces $A \cup B$ es contable.

Sea $A \cap B$, y consideremos los casos en que dicha intersección sea vacía o no.

Supongamos primero que $A \cap B = \emptyset$.

Si tanto $A$ como $B$ son finitos, entonces existen funciones biyectivas $f : I_n \to A$, y $g : I_m \to B$. Es claro que si $m > n$, la siguiente función $h : \{n+1, \ldots, n+m\} \to I_m$ es biyectiva, luego la composición $g \circ h : \{n+1, \ldots, n+m\} \to B$ es biyectiva. Consideremos la función:

$$p(k) = \begin{cases} f(k) & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ \\ g \circ h(k) & \text{si } n+1 \leq k \leq n+m \end{cases}$$

Esta función $p : I_{n+m} \to A \cup B$ es claramente sobreyectiva. La inyectividad sigue ya que tanto $f$ y $g \circ h$ son inyectivas, pero también se necesita que $A \cap B = \emptyset$, y por lo tanto es biyectiva, de donde sigue que $A \cup B$ es finito.

Si $A$ es finito y $B$ es numerable, entonces existen funciones biyectivas $f : I_n \to A$, y $g : \mathbb{N} \to B$. Consideremos la siguiente función:

$$h(k) = \begin{cases} f(k) & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ \\ g(k-n) & \text{si } k \geq n+1 \end{cases}$$

Esta función $h$ es sobreyectiva, y la inyectividad se deja como ejercicio para el lector. no es difícil.

Si $A$ y $B$ son numerables, entonces existen funciones biyectivas $f : \mathbb{N} \to A$, y $g : \mathbb{N} \to B$. Consideremos la siguiente función $h : \mathbb{N} \to A \cup B$ dada por

$$h(k) = \begin{cases} f\left(\dfrac{k}{2}\right) & \text{si } k \text{ es par} \\ \\ g\left(\dfrac{k+1}{2}\right) & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Veamos que dicha función es sobreyectiva. Sea $x \in A \cup B$, entonces $y \in A$, o bien $y \in B$, pero no en ambos por hipótesis. Supongamos que $y \in A$. Busquemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $h(n) = y$. Como $y \in A$, entonces sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(k) = y$. Tomando $n = 2k$, tenemos que:

$$h(n) = h(2k) = f\left(\frac{2k}{2}\right) = f(k) = y.$$

Si $y \in B$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g(k) = y$. Tomando $n = 2k - 1$, tenemos que:

$$h(n) = h(2k-1) = g\left(\frac{2k-1+1}{2}\right) = g(k) = y.$$

Veamos que dicha función es inyectiva. Esto se prueba en tres pasos. Primero se sebe ver que preimágenes pares distintas, poseen imágenes distintas, es decir, si $k_1 \neq k_2$, con $k_1, k_2$ pares, se debe tener que $h(k_1) \neq h(k_2)$. En efecto, por la inyectividad de $f$ se sigue que:

$$h(k_1) = f\left(\frac{k_1}{2}\right) \neq f\left(\frac{k_2}{2}\right) = h(k_2).$$

La misma prueba funciona si $k_1, k_2$ son impares distintos, en efecto:

$$h(k_1) = g\left(\frac{k_1+1}{2}\right) \neq g\left(\frac{k_2+1}{2}\right) = h(k_2).$$

Falta ver que si $k_1$ es par y $k_2$ es impar, entonces $h(k_1) \neq h(k_2)$. Observemos que al ser $k_1$ par, su imagen bajo $h$ es igual a $f(k_1/2)$, el cual es un elemento en $A$. Por otra parte, al ser $k_2$ impar, su imagen bajo $h$ es igual a $g((2k_2+1)/2)$, el cual es un elemento de $B$. Como $A \cap B = \emptyset$, se debe tener que $h(k_1) \neq h(k_2)$. Por lo tanto, $h$ es biyectiva, y entonces $A \cup B$ es numerable.

Falta el caso en que $A \cap B \neq \emptyset$. Sean $C = A \cap B$, y $D = B \setminus C$. Es claro entonces que $A \cap D = \emptyset$, esto porque $D$ es la parte de $B$ que ya no tiene parte común con $A$. Además $A \cup B = A \cup D$. En resumen, tenemos dos conjuntos, $A$ y $D$ con intersección vacía y cuya unión es igual a $A \cup B$. Esto reduce el caso en cuestión al caso ya estudiado.

Si $D$ es contable, entonces al unirlo con $A$, el cual es finito o numerable, se tiene por la parte ya probada que $A \cup D$ es contable, y por lo tanto, $A \cup B$ es contable.

**Corolario 1.6**

El conjunto $\mathbb{Z}^+$ es contable.

En efecto, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, y como ambos conjuntos son contables se deduce por el teorema anterior que $\mathbb{Z}^+$ es contable.

**Corolario 1.7**

La unión finita de conjuntos contables es contable.

Esto sigue por un argumento inductivo.

El siguiente resultado utiliza el hecho, ya probado anteriormente, de que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, entre otras cosas.

**Teorema 1.18**

Si $A$ y $B$ son conjuntos contables, entonces $A \times B$ es contable.

Si al menos uno entre $A$ y $B$ es vacío, entonces $A \times B = \emptyset$, el cual es por convención un conjunto finito, y por lo tanto contable.

En caso contrario, se tiene que $A \times B \neq \emptyset$. Aquí tenemos que hacer varios casos: $A, B$ finitos, uno entre $A, B$ finito y el otro numerable, y ambos $A, B$ numerables.

Haremos sólo el caso en el cual tanto $A$ como $B$ son numerables. En efecto, se tiene que existen funciones biyectivas $f : A \to \mathbb{N}$, y $g : B \to \mathbb{N}$.

Consideremos la función $g : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definida de la siguiente forma:

$$g(a,b) = (f(a), g(b)), \qquad \text{donde } a \in A, \text{ y } b \in B.$$

Dicha función es biyectiva. En efecto, si $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, entonces por la biyectividad de $f$ y $g$, existen $a_0 \in A$, y $b_0 \in B$ tales que $f(a_0) = n$, y $g(b_0) = m$, luego el par ordenado $(a_0, b_0) \in A \times B$ cumple que:

$$h(a_0, b_0) = (f(a_0), g(b_0)) = (n,m),$$

y por lo tanto, $h$ es sobreyectiva.

Por otra parte, observe que si $h(a_1,b_1) = h(a_2,b_2)$, entonces $(f(a_1), g(b_1)) = (f(a_2), g(b_2))$, y luego $f(a_1) = f(a_2)$ y $g(b_1) = g(b_2)$. Como tanto, $f$ y $g$ son inyectivas, se concluye que $a_1 = a_2$, y que $b_1 = b_2$.

Por lo tanto, $(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$, con lo cual $h$ es inyectiva.

De todo lo anterior, se concluye que $h$ es biyectiva, y por lo tanto, $A \times B$ es numerable, ya que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Vamos a dar una prueba que sea independiente del hecho de que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sea numerable.

Supongamos que $f : A \to \mathbb{N}$ y $g : B \to \mathbb{N}$ son biyectivas, y considere la función $h : A \times B \to N$ dada por:

$$h(a,b) = (f(a) + g(b))^2 + g(b).$$

Si mostramos que dicha función es inyectiva, entonces se concluye que $A \times B$ es equivalente con un subconjunto de $\mathbb{N}$, y por lo tanto $A \times B$ sería equivalente con un conjunto contable. Como $A \times B$ es infinito, se sigue que $A \times B$ es equivalente con un conjunto numerable, y por lo tanto $A \times B$ es numerable.

La prueba de que $h$ es inyectiva se deja como ejercicio al lector, pero se le advierte que es idéntica a la primer prueba que se dió para mostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

**Corolario 1.8**

El producto cartesiano de un número finito de conjuntos numerables es numerable.

La prueba sigue por un proceso inductivo. En efecto, ya sabemos que es válido para dos conjuntos. Supongamos que el resultado es válido para $n-1$ conjuntos, es decir, si $A_1, \ldots, A_{n-1}$ son numerables, entonces $A_1 \times \cdots \times A_{n-1}$ es numerable.

Asumiendo que $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ son numerables, entonces $A_1 \times \cdots \times A_{n-1}$ es numerable por hipótesis inductiva, y por el resultado anterior se concluye que el conjunto $(A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$ es numerable. Ahora bien, es fácil ver que los conjuntos $A_1 \times \cdots \times A_n$ y $(A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$ son biyectivos, y por lo tanto se sigue que $A_1 \times \cdots \times A_n$ es numerable. Esto se deja para que el lector lo verifique.

El siguiente resultado será muy importante para poder abordar ciertos teorema que se enunciarán más adelante.

**Teorema 1.19**

La unión numerable de conjuntos numerables es numerable, es decir que si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in J}$ es una colección tal que $J$ es numerable, y cada $A_\lambda$ numerable, entonces

$$\bigcup_{\lambda \in J} A_\lambda,$$

es numerable.

Hay varias pruebas de este resultado, en particular las presentadas en [4], [5] son muy ingeniosas y utilizan el hecho de que un conjunto numerable se puede expresar como una sucesión. Sin embargo, nosotros presentaremos una prueba diferente que va más en el espíritu de nuestro trabajo, y que utiliza el hecho de que un producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable.

Por hipótesis, como $A_\lambda$ es numerable, para cada $\lambda \in J$, existe $f_\lambda : \mathbb{N} \to A_\lambda$, para cada $\lambda \in J$.

Consideremos $A = \cup_{\lambda \in J} A_\lambda$, y $f : J \times \mathbb{N} \to A$, definida de la siguiente forma:

$$f(\lambda, n) = f_\lambda(n), \qquad \text{donde } \lambda \in I, \text{ y } \quad n \in \mathbb{N}.$$

Observe que $f$ está bien definida, y además es sobreyectiva, ya que si $a \in A$, entonces existe $\lambda_0 \in J$ tal que $a \in A_{\lambda_0}$. Por otra parte, como $f_{\lambda_0} : \mathbb{N} \to A_{\lambda_0}$ es biyectiva, se sigue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $f_{\lambda_0}(n_0) = a_0$. Por lo tanto, $f(\lambda_0, n_0) = f_{\lambda_0}(n_0) = a$, y se concluye que $f$ es sobreyectiva.

Como $J \times \mathbb{N}$ es numerable, entonces existe $h : \mathbb{N} \to J \times \mathbb{N}$ biyectiva, y luego la composición $f \circ h : \mathbb{N} \to A$ sería sobreyectiva, y por un resultado anterior $A$ sería numerable.

**Corolario 1.9**

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ son numerables, entonces

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

es un conjunto numerable.

La prueba consiste en aplicar el teorema anterior tomando en cuenta que $J = \mathbb{N}$.

**Teorema 1.20**

El conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, es numerable.

Empecemos con la siguiente igualdad:

$$\mathbb{Q} \;=\; \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-,$$

donde $\mathbb{Q}^+$ representa al conjunto de los números racionales positivos, y $\mathbb{Q}^-$ representa al conjunto de los números racionales negativos. Si probamos que cada uno de estos tres conjuntos es contable, entonces la unión contable de conjuntos contables concluye que $\mathbb{Q}$ es numerable. Claramente $\{0\}$ es contable, y además $\mathbb{Q}^+ \simeq \mathbb{Q}^-$ bajo la función $x \mapsto -x$, donde $x \in \mathbb{Q}^+$. Por lo tanto, basta que probemos que $\mathbb{Q}^+$ es numerable.

En efecto, definamos la función, $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, por medio de:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = (a, b),$$

donde $a, b \in \mathbb{N}$, y sin factores comunes.

Veamos que dicha función es inyectiva. Del siguiente cálculo:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{c}{d}\right) \Longrightarrow (a,b) = (c,d) \Longrightarrow a = c, b = d,$$

se sigue que $ad = cb$, y por lo tanto $a/b = c/d$, y por lo tanto, $f$ es inyectiva.

De la inyectividad de $f$, se sigue que la función restricción del rango, $\tilde{f} : \mathbb{Q}^+ \to f(\mathbb{Q}^+) \subset \mathbb{N}$ es biyectiva, y por lo tanto $\mathbb{Q}^+$ es enumerable.

Hay otras formas de probar que $\mathbb{Q}$ es numerable. Una forma ingeniosa es el método expuesto por Kolmogorov y Fomin en su libro [5]. El conjunto $\mathbb{Q}$ lo forman los números del tipo $p/q$, con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, y el máximo común divisor de $p$ y $q$ igual a uno.

Para un número racional $x = p/q$ definimos la altura de $x$ como el número $|p| + q$. Definamos $A_n$ como el conjunto de los números racionales $x$ cuya altura es igual a $n$. Observe que $A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ es finito, ya que el número de sus elementos es el doble del número de descomposiciones de $n$ en dos números positivos cuya suma sea $n$. Por ejemplo, cuáles son los números racionales en $A_5$? Un rato de pensamiento nos dice que sus elementos son:

$$\frac{1}{4};\frac{-1}{4};\frac{2}{3};\frac{-2}{3};\frac{4}{1};\frac{-4}{1}.$$

Se afirma que $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Esto es fácil de probar, ya que si $x \in \mathbb{Q}$, entonces $x = p/q$, y luego $x \in A_{|p|+q} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Por otra parte, si $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, entonces $x \in A_{n_0}$, para algún $n_0$, y por definición se sigue que $x \in \mathbb{Q}$.

Por lo tanto, como hemos escrito $\mathbb{Q}$ como una unión contable de conjuntos contables disjuntos a pares, se sigue que $\mathbb{Q}$ es contable, y aún más numerable.

**Observacion 1.2** *Hasta el momento sabemos que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, y $\mathbb{Q}$ son numerables, pero es conocido que*

$$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q}.$$

*Vamos a exhibir un nuevo conjunto numerable, $\mathbb{A}$, el cual contiene a $\mathbb{Q}$, y se cumplirá la nueva sucesión de contenciones:*

$$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{A}.$$

**Definición 1.13**

Un polinomio, $p(x)$, con coeficientes enteros y de grado $n$, es una expresión del tipo:

$$p(x) \;=\; a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son elementos en $\mathbb{Z}$.

Al conjunto de todos los polinomios de coeficientes enteros, de todos los posibles órdenes, se le denotará por $P$.

**Definición 1.14**

Un número real $\alpha$ se llamará algebraico si existe un polinomio, p(x), con coeficientes enteros de grado $m$, para algún $m \in \mathbb{N}$, tal que $p(\alpha) = 0$.
Denotaremos por $\mathbb{A}$ al conjunto de todos los números algebraicos.

**Lema 1.0**

Se cumple que $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{A}$.

Tenemos que probar que todo número racional es algebraico, y además que hay números algebraicos que no son racionales.

Sea $\alpha = p/q$ un número racional, entonces el polinomio de grado uno con coeficientes enteros, $p(x) = qx - p$, cumple trivialmente que $p(\alpha) = 0$, y por lo tanto $\alpha \in \mathbb{A}$. Por la arbitrariedad de $\alpha$ se sigue que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$.

Por otra parte, el polinomio de grado dos con coeficientes enteros, $p(x) = x^2 - 2$, cumple que $p(\sqrt{2}) = 0$, de donde se concluye que hay números irracionales que son algebraicos, y de esto sigue que $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{A}$. El siguiente resultado expresa que el conjunto de todos los polinomios de coeficientes enteros, de todos los grados, es un conjunto numerable.

**Teorema 1.21**

El conjunto $P$ es numerable.

Denotemos por $P_n$ al conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros que tienen grado $n$, es decir, $p(x) \in P_n$, si y sólo si, $p(x)$ tiene grado $n$ y sus coeficientes son números enteros.

Probemos primero que cada $P_n$ es numerable. Para ver esto definamos la siguiente función $f : P_n \to \underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n+1-\text{veces}}$ por medio de :

$$f(p(x)) = p(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0).$$

Vamos a probar que $f$ es inyectiva, para ver esto suponemos que se tiene $f(p(x)) = f(q(x))$, donde $p(x), q(x) \in P_n$, luego sigue que

$$p(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = p(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) \Longrightarrow$$

$$(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) = (b_n, b_{n-1}, \ldots b_1, b_0) \Longrightarrow a_m = b_m; a_{m-1} = b_{m-1}; \ldots; a_1 = b_1; a_0 = b_0,$$

y por lo tanto $p(x) = q(x)$, ya que ambos tienen el mismo grado y los mismos coeficientes.

Se concluye que $f : P_n \to \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ es inyectiva, y ya que $\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ es numerables, se sigue que la función restricción al rango $\tilde{f} : P_n \to f(P_n)$ es biyectiva, y como $f(P_n) \subset \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ es numerable, se sigue que $P_n$ es numerable.

Para concluir la prueba se debe notar que se cumple lo siguiente:

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n.$$

Como la unión anterior es numerable, y cada conjunto es numerable, se concluye por un resultado previo que $P$ es numerable.

**Teorema 1.22**

El conjunto $\mathbb{A}$ de números algebraicos es numerable.

Este resultado es intuitivamente válido ya que el conjunto de polinomios de coeficientes enteros y de cualquier grado es numerable, luego como cada polinomio posee a lo sumo un número de raíces igual al grado de dicho polinomio tendríamos que la cantidad de raíces es numerable.

**Actividad 1.3** *Escriba formalmente una prueba del resultado anterior basándose en el esquema de demostración que se dió.*

## 1.7 Conjuntos no numerables.

**Definición 1.15**

Un conjunto $A$ que no es finito, y para el que tampoco existe una biyección $f : A \to \mathbb{N}$ se llamará no numerable.

**Teorema 1.23**

El intervalo abierto $]0,1[$ es no numerable.

La prueba procede por reducción al absurdo, es decir, supongamos que $]0,1[$ es numerable. Esto significa que existe una biyección $f : \mathbb{N} \to ]0,1[$, y por lo tanto, podemos suponer que $]0,1[= \{f(1), f(2), f(3), \ldots\}$.

Vamos a utilizar el hecho de que cada elemento en $]0,1[$ puede escribirse en su forma decimal, esto significa que:

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots \\ f(2) & = & 0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n}\ldots \\ f(3) & = & 0.a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n}\ldots \\ \vdots & = & \\ f(n) & = & 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn}\ldots \\ \vdots & & \end{array}$$

No debe olvidarse que en la representación decimal de cada $f(i)$ se tiene que los respectivos $a_{ij}$ son números enteros entre cero y nueve. Ahora vamos a construir un número en $]0,1[$ distinto a todos los $f(i)$, y por lo tanto llegaríamos a un absurdo.

Considere el siguiente número $x \in ]0,1[$ dado por

$$x = 0.b_1b_2\ldots b_n\ldots,$$

donde cada $b_i$ sólo toma valores entre cero y ocho, y además $b_i \neq a_{ii}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Comparando este $x$ con cada $f(i)$ vemos que son diferentes ya que por lo menos difieren en la posición $a_{ii}$.

Hemos entonces obtenido un nuevo elemento de $]0,1[$, y esto nos lleva a un absurdo, a menos que $]0,1[$ no sea numerable.

Sólo resta decir que los $b_i$ se toman entre cero y ocho, ya que evitamos tener cadenas infinitas de nueves porque nos lleva a que ciertos números posean dos representaciones decimales diferentes, es decir, por ejemplo, tratamos de evitar decimales del tipo:

$$0.49999999\ldots = \frac{1}{2} = 0.500000\ldots.$$

**Lema 1.0**

Si $A$ es un conjunto tal que posee un subconjunto $B$ no numerable, entonces $A$ es no numerable.

La demostración es sencilla. Si $A$ fuese numerable, ya es conocido que cada subconjunto de él es finito o numerable, luego no puede pasar que $B$ sea no numerable, y por lo tanto se concluye que $A$ es no numerable.

**Corolario 1.10**

El intervalo $[0,1]$ es no numerable.

Por el teorema anterior $[0,1]$ posee un subconjunto no numerable, a saber $]0,1[$, y por el corolario anterior se concluye que $[0,1]$ es no numerable.

**Observacion 1.3** *El intervalo $[0,1]$ es llamado en algunos textos como el continuo. Esto tiene que ver con el posible tamaño que pueden tener los conjuntos infinitos. De hecho, la famosa Hipótesis del continuum asegura que no puede existir un conjunto cuya cardinalidad esté estrictamente entre las cardinalidades de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$, respectivamente, ver [2] para más detalles .*

**Teorema 1.24**

Cualesquiera dos intervalos abiertos son equivalentes.

Sean $]a,b[$ y $]c,d[$ dos intervalos abiertos arbitrarios. Una simple línea recta servirá como la función biyectiva buscada. Buscamos la recta que pase por los puntos $(a,c)$, y $(b,d)$, y sabemos por matemática elemental que dicha función viene dada por:

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a)+c.$$

Para ver que $f$ es efectivamente una biyección podemos exhibir su inversa:

$$f^{-1}(x) = \frac{b-a}{d-c}(x-c)+a.$$

Se encarga al lector que verifique lo anterior.

**Corolario 1.11**

El intervalo $]a,b[$, donde $a,b$ son números reales, es no numerable.

Ya sabemos que el intervalo $]0,1[$ es no numerable, y por el teorema anterior $]0,1[$ es equivalente con $]a,b[$, es decir existe una función biyectiva $f:]0,1[\rightarrow]a,b[$, por lo tanto $]a,b[$ debe ser no numerable, ya que si fuese numerable debería existir una biyección $g:]a,b[\rightarrow \mathbb{N}$, y entonces la composición $g\circ f:]0,1[\rightarrow \mathbb{N}$ sería una biyección, y esto es absurdo.

**Teorema 1.25**

Cualesquiera dos intervalos cerrados son equivalentes.

Sean $[a,b]$ y $[c,d]$ dos intervalos cerrados arbitrarios. Procediendo en la misma forma que en la prueba del teorema anterior se llega a que tales intervalos son equivalentes.

El siguiente teorema es una aplicación directa del teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein.

**Teorema 1.26**

Cualesquiera dos intervalos son equivalentes.

Cuando decimos que cualesquiera dos intervalos, queremos decir que pueden ser intervalos del siguiente tipo: $]a,b[,]a,b],[a,b[,$, y $[a,b]$.

Vamos a realizar la prueba en el siguiente caso: un intervalo abierto y un intervalo cerrado. Los casos donde los dos intervalos son abiertos, o los dos cerrados, ya fueron considerados. Faltarían los casos donde uno de los intervalos es abierto, cerrado, o semiabierto, y el otro es semiabierto. La prueba para estos es análoga a la que vamos a realizar.

Sean $I=[a,b]$ y $J=]c,d[$. Vamos a suponer que $a\neq b$, y $c\neq d$, es decir que los intervalos no se reducen a un sólo punto.

Podemos hallar un subintervalo $J_1\subset J$ del tipo $[c_1,d_1]$, y por un resultado anterior se sigue que $I\simeq J_1$.

Del mismo modo, podemos hallar un subintervalo $I_1\subset I$ del tipo $]a_1,b_1[$, y por un resultado anterior se sigue que $J\simeq I_1$.

Por el teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein se sigue que $I\simeq J$.

**Teorema 1.27**

El conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, es no numerable.

Vamos a exhibir una función biyectiva entre $]0,1[$ y $\mathbb{R}$. Como se sabe que $]0,1[$ es no numerable, entonces $\mathbb{R}$ es no numerable.

Consideremos la siguiente función, $f : ]0,1[ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \dfrac{2x-1}{1-x} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \ . \end{cases}$$

Su inversa viene dada por la siguiente funcíon:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \ . \end{cases}$$

Por lo tanto, se concluye que $]0,1[$ y $\mathbb{R}$ son equivalentes, y luego $\mathbb{R}$ no numerable.

**Corolario 1.12**

Cualquier intervalo es equivalente a $\mathbb{R}$.

La relación ser equivalente es transitiva. Por el teorema anterior, $\mathbb{R} \simeq ]0,1[$, y por un resultado previo, $]0,1[ \simeq$ con cualquier intervalo, y esto prueba el corolario.

**Corolario 1.13**

El conjunto de los números irracionales es no numerable.

Recordemos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, donde $\mathbb{I}$ representa el conjunto de los números irracionales. Luego $\mathbb{I}$ debe ser no numerable, ya que si fuese numerable, se seguiría que $\mathbb{R}$ es la unión de dos conjuntos numerables, y por lo tanto numerable, con lo cual llegamos a un absurdo.

**Definición 1.16**

Un número real el cual no es algebraico se llamará transcendental.
Denotaremos al conjunto de los números transcendentales por $\mathbb{T}$.

**Corolario 1.14**

El conjunto de números transcendentales, $\mathbb{T}$, es no numerable.

La prueba a similar a la realizada en el corolario anterior, sólo debe tenerse en cuenta que $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$, y proseguir en la misma forma que en tal corolario.
Presentamos otra aplicación del teorema de Cantor-Scroeder-Bernstein.

**Teorema 1.28**

Sea $A$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ el cual contiene un intervalo abierto. Entonces $A$ es equivalente a $\mathbb{R}$.

Por la reflexividad de ser equivalentes, se deduce que $A \simeq A$, luego equivalente a un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Por otra parte, $\mathbb{R}$, es equivalente a un subconjunto de $A$, el tal intervalo abierto. Por lo tanto, por Cantor-Schroeder-Bernstein se sigue que $A$ es equivalente a $\mathbb{R}$.

## 1.8 Más ejemplos de conjuntos numerables y no numerables.

**Ejemplo 1.12**

Supongamos que $A$ es un conjunto numerable, y definamos una relación de equivalencia sobre $A$. Demostrar que el conjunto cociente, es decir el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia, es también numerable.

Una forma de reolver este problema es la siguiente: sea $\simeq$ una relación de equivalencia sobre $A$, un conjunto numerable. Considere el llamado conjunto cociente, cuyos elementos son las clases de equivalencia:

$$A/\simeq = \{[x] : x \in A\}.$$

Se define la siguiente función $\pi : A \to A/\simeq$, definida por $\pi(x) = [x]$. Esta función es claramente sobreyectiva, y como $A$ es numerable, se sigue que existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{A}$ biyectiva.

Al considerar la composición, $\pi \circ f : \mathbb{N} \to A/\simeq$, obtenemos una función sobreyectiva entre $\mathbb{N}$ y $A/\simeq$. Por un resultado previo se sigue que el conjunto cociente, $A/\simeq$, es numerable.

**Ejemplo 1.13**

Sea $A$ el conjunto de todas las sucesiones cuyos elementos son los dígitos 0 y 1. Este conjunto es denotado por $2^{\mathbb{N}}$. Probar que $A$ es no numerable.

Cada elemento de $A$ es una función con dominio $\mathbb{N}$ y rango $\{0,1\}$, es decir $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$. Esto también puede verse en la notación de sucesiones como $f_n = (f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots)$, donde cada entrada $f(n) \in \{0,1\}$.

La notación anterior no es adecuada para la prueba que deseamos brindar, y debemos utilizar un doble índice para referirnos a elementos específicos en una sucesión dada.

Supongamos que $A$ es numerable, y entonces sus elementos se pueden enumerar de la siguiente forma:

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\},$$

es decir $x_1$ es la primer sucesión, $x_2$ es la segunda sucesión y así sucesivamente.

Entonces observe lo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} x_1 & = & (x_1^1, x_1^2, x_1^3, \ldots, x_1^m, \ldots) \\ x_2 & = & (x_2^1, x_2^2, x_2^3, \ldots, x_2^m, \ldots) \\ x_3 & = & (x_3^1, x_3^2, x_3^3, \ldots, x_3^m, \ldots) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & (x_n^1, x_n^2, x_n^3, \ldots, x_n^m, \ldots) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Vamos a construir una nueva sucesión que sea diferente a todas las descritas anteriormente. Sea $y : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ tal que $y(1) = 1 - x_1^1$, $y(2) = 1 - x_2^2$, y en general, $y(n) = 1 - x_n^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$
Observe que en efecto, $y \neq x_1$, ya que son diferentes por lo menos en el primer elemento. Además $y \neq y_2$, ya que son diferentes por lo menos en el segundo elemento, y así sucesivamente $y \neq y_n$, ya que difieren al menos en el enésimo elemento. Por lo tanto, $A$ no puede ser numerable.

**Ejemplo 1.14**

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función dada. Supongamos que existe un número positivo, $M$, tal que verifica la siguiente propiedad: para cada elección de un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_n$ en $[0,1]$, se tiene que

$$|f(x_1) + \cdots + f(x_n)| \leq M.$$

Consideremos el conjunto $S = \{x \in [0,1] : f(x) \neq 0\}$. Probar que $S$ es un conjunto contable.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos el siguiente conjunto $S_m$ definido por:

$$S_m = \left\{ x \in S : |f(x)| > \frac{1}{m} \right\}.$$

Observemos que al tener $x \in S$, entonces $f(x) \neq 0$, y luego $|f(x)| > 0$. Por lo tanto, tiene sentido el considerar $S_m$.

Lo primero que vamos a probar es que para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $S_m$ es finito, de hecho debe tener a lo sumo $\alpha = m(\lfloor M \rfloor + 1)$ elementos.

Por la propiedad que satisface la función $f$ tenemos que si $S_m$ contiene al menos $\alpha + 1$ puntos , digamos $x_1, \ldots, x_{\alpha+1}$, entonces

$$|f(x_1) + \cdots + f(x_{\alpha+1})| \leq M,$$

pero por otra parte,

$$|f(x_1)+\cdots+f(x_{\alpha+1})| \geq |f(x_1)|+\cdots+|f(x_{\alpha+1})| > \frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m} = \frac{\alpha+1}{m} > \frac{mM+1}{m} = M+\frac{1}{m}.$$

Por lo tanto se llega al siguiente absurdo:

$$M+\frac{1}{m} < |f(x_1)+\cdots+f(x_{\alpha+1})| \leq M.$$

Ahora bien, se observa que se cumple la siguiente igualdad:

$$S = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_m,$$

esto se deja como ejercicio para el lector.

Se concluye que $S$ es contable al ser la unión numerable de conjuntos finitos.

## 1.9 Cardinalidad de Conjuntos.

En las secciones anteriores hemos hablado sobre conjuntos finitos, conjuntos numerables, y conjuntos no numerables. No nos hemos referido al tamaño de estos conjuntos, cualesquiera que sea esta definición. Al tratar de desarrollar una forma de definir el tamaño de un conjunto, lo primero que uno tiene que mencionar es que fue George Cantor el que se preguntó: Puede el concepto de número natural ser generalizado en tal forma que a cada conjunto se le asigne uno de estos números generalizados para designar el número de elementos en el conjunto?

Para definir el tamaño de un conjunto arbitrario se habla del cardinal de un conjunto. concepto, la idea es pensar que la colección de todos los conjuntos se divide en familias disjuntas, donde los elementos de cada familia comparten la propiedad de ser equivalentes. Esto se logra al definir una relación en la categoría de todos los conjuntos, y luego considerar su conjunto cociente.

**Definición 1.17**

Dado un conjunto $A$ definimos su número cardinal, el cual se denotará por $\#(A)$, de tal forma que dos conjuntos equivalentes, o equipotentes, $A$ y $B$ poseen el mismo cardinal.
Es común que también se utilice una letra minúscula para denotar el cardinal de un conjunto, por ejemplo $a$ y $\#(A)$ representan el número cardinal del conjunto $A$.

**Observacion 1.4** *El número cardinal del conjunto vacío es 0. Asignamos el número de elementos de un conjunto finito, no vacío, como el número cardinal del conjunto finito, es decir, 1 es el número cardinal de cualquier conjunto del tipo $\{x\}$; 2 es el númer cardinal de todos los conjuntos equivalentes a $\{x,y\}$; y así sucesivamente.*

*Por lo tanto, podemos asignarle un número cardinal a un conjunto finito de* $\mathbb{N}$. *Le asignaremos el símbolo* $\aleph_0$ *a la clase de todos los conjuntos numerables, y tal* $\aleph_0$ *es el número cardinal de cualquier conjunto numerable.*

*Denotamos con* **c**, *la primer letra del palabra continuum, al número cardinal del conjunto* $[0,1]$, *y a todos los conjuntos equivalentes con él.*

*Claramente, el conjunto de números cardinales:*

$$\{0,1,2,3,\ldots,\aleph_0,\mathbf{c}\},$$

*es una extensión del conjunto* $\mathbb{N}$.

En lo que sigue queremos comparar números cardinales. Es evidente que si entre dos conjuntos, digamos $A,B$ podemos establecer una inyección, entonces pareciera que hay tantos elementos en $A$ como en $B$, pero si no podemos encontrar una sobreyección, entonces pareciera que hay más elementos en $B$ que en $A$. Tratemos de aclarar esto.

**Definición 1.18**

Sean $a$ y $b$ dos números cardinales. Sean $A$ y $B$ conjuntos tales que $a = \#(A)$, y $b = \#(B)$.

- Diremos que $a \leq b$, si $A$ es equivalente a un subconjunto propio de $B$.
- Diremos que $a < b$ si $a \leq b$ y $a \neq b$. Esto significa que $A$ es equivalente a un subconjunto propio de $B$, pero que $A$ no es equivalente a $B$.

**Teorema 1.29**

(Teorema de Cantor) Sea $A$ un conjunto arbitrario, entonces $A$ no es equivalente con $\mathcal{P}(A)$; aún más se tiene que:

$$\#(A) \ < \ \#(\mathcal{P}(A)).$$

Primero mostramos que $A$ es equivalente a un subconjunto propio de $\mathcal{P}(A)$. Consideremos $B^*$ el conjunto cuyos elementos son del tipo $\{a\}$, donde $a \in A$. Entonces se sigue que $A$ es equivalente con $B^*$, ya que podemos definir la función biyectiva, $f : A \to B^*$ dada por $f(a) = \{a\}$, además de que $B^* \subset \mathcal{P}(A)$.

Ahora veremos que no hay ninguna función sobreyectiva entre $A$ y $\mathcal{P}(A)$, y por lo tanto $A$ no es equivalente a $\mathcal{P}(A)$, y además se concluye que $\#(A) \ < \ \#(\mathcal{P}(A))$.
Sea $f : A \to \#(A) \to \mathcal{P}(A)$ una función. Supongamos que tal $f$ es sobreyectiva, entonces para cualquier $B \in \mathcal{P}(A)$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = B$.

Tomando $B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$, el cual es un subconjunto de $A$ y por lo tanto un elemento en $\mathcal{P}(A)$, debe existir un $a \in A$ tal que $f(a) = B$.

Ahora uno se pregunta si $a \in f(a)$, si esto pasa entonces por definición de $B$ se sigue que $a \notin f(a)$, lo cual es absurdo. Por otra parte, nos preguntamos si $a \notin f(a)$, luego $a \notin B$, y de nuevo un absurdo. En resumen, no puede ser que $f$ sea sobreyectiva. Por lo tanto, si cualquier función definida entre $A$ y $\mathcal{P}(A)$ no es sobreyectiva, entonces no puede existir una función biyectiva, y por lo tanto $A$ y $\mathcal{P}(A)$ no pueden ser equivalentes.

**Corolario 1.15**

Sea $A$ un conjunto arbitrario, entonces se cumple la siguiente sucesión de desigualdades:

$$\#(A) < \#(\mathcal{P}(A)) < \#(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))) < \cdots$$

Por lo tanto, no existe el número cardinal mayor.

La prueba de esto es una aplicación reiterada del teorema de Cantor.

**Corolario 1.16**

Se cumple la siguiente sucesión de desigualdades:

$$\#(\mathbb{N}) < \#(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \#(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) < \cdots$$

**Teorema 1.30**

Dado cualquier conjunto $A$, se cumple que $\mathcal{P}(A)$ es equivalente con $2^A$, donde

$$2^A = \{f : A \to \{0,1\} : f \text{ es función}\}.$$

Consideremos la función $\phi : 2^A \to \mathcal{P}(A)$ dada por $\phi(f) = f^{-1}(\{1\})$. No es difícil darse cuenta que $\phi$ es una función. Es suficiente, para probar el teorema, el verificar que $\phi$ es biyectiva.

Vamos a exhibir la inversa de dicha función: $\phi^{-1} : \mathcal{P}(A) \to 2^A$ dada por $\phi^{-1}(B) = \chi_B$, donde $\chi_B : A \to \{0,1\}$ es la llamada función característica asociada a $B$, y está definida por:

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B, \\ 0 & \text{si } x \notin B. \end{cases}$$

**Actividad 1.4** *Demuestre que, en efecto, la función $\phi^{-1}$ dada en la prueba del teorema anterior es la función inversa de $\phi$.*

**Teorema 1.31**

El conjunto $2^{\mathbb{N}}$ es no numerable, y además se cumple que

$$\#\left(2^{\mathbb{N}}\right) = \#(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathbf{c}.$$

.

La prueba de que $2^{\mathbb{N}}$ es no numerable consiste en utilizar un argumento del tipo la diagonal de Cantor, observe que una función $f:\mathbb{N}\to\{0,1\}$ es sencillamente una sucesión cuyos valores son sólo ceros y unos. Esto fue demostrado anteriormente, pero ellector puede intentar una vez más realizar esta prueba. Utilizando el teorema anterior se concluye que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es también no numerable.

Lo que queda pendiente es asignarle un número cardinal a cualesquiera de estos conjuntos: $2^{\mathbb{N}}$ , o bien $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Vamos a probar que $2^{\mathbb{N}}$ es equivalente con $[0,1]$. Sea $\phi:2^{\mathbb{N}}\to[0,1]$, definida por:

$$\phi(f) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{2^n}.$$

Nótese que $f(n)\in\{0,1\}$, y luego $\phi(f)\in[0,1]$.

La inversa de dicha función $\phi$ es $\phi^{-1}$ definida por

$$\phi^{-1}(x)=f,$$

donde $f:\mathbb{N}\to\{0,1\}$ es la función $f(n)=b_n$, tal que

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{2^n}=\text{la expansión binaria de } x.$$

Observe que:

$$(\phi^{-1}\circ\phi)(f)=\phi^{-1}(\phi(f))=\phi^{-1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{2^n}\right)=f.$$

Por otra parte:

$$(\phi\circ\phi^{-1})(x) \;=\; \phi(\phi^{-1}(x)) \;=\; \phi\left(\phi^{-1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{2^n}\right)\right) \;=\; \phi(f) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{2^n} \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{2^n} \;=\; x.$$

Por lo tanto, $\#(\mathcal{P}(\mathbb{N}))=\#([0,1])=\mathbf{c}$.

**Corolario 1.17**

Se tiene que $\aleph_0<\mathbf{c}$.

Recordemos que $\aleph_0=\#(\mathbb{N})$, y que $\mathbf{c}=\#([0,1])$. Por otro lado, ya conocemos que $[0,1]$ es equivalente con $\mathbb{R}$, y luego $\#(\mathbb{R})=\mathbf{c}$.

Veamos que $\aleph_0\le\mathbf{c}$, esto sigue ya que $\mathbb{N}$ es equipotente con él mismo como subconjunto de $\mathbb{R}$. Además, sabemos que $\mathbb{N}$ no es equivalente con $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, pero este último es equivalente con $2^{\mathbb{N}}$, y este a su vez con $[0,1]$, y por transitividad, se concluye que $\mathbb{N}$ no es equivalente con $[0,1]$.

Por definición, se concluye que $\aleph_0<\mathbf{c}$.

**Ejemplo 1.15**

El teorema de Cantor nos da ejemplos de conjuntos que poseen un número cardinal mayor que el de los números reales, pero hasta cierto punto es artificial. En este ejemplo, vamos a mostrar un conjunto explícito cuyo número cardinal es mayor que $\mathbf{c}$.

Consideremos a $\mathcal{F}$ como el conjunto de todas las funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Sea $a \in [0,1]$, y definamos la función, $\phi_a : [0,1] \to \mathbb{R}$, por medio de:

$$\phi_a(x) \;=\; a, \qquad \text{para todo } x \in [0,1].$$

Consideremos $A = \{\phi_a : a \in [0,1]\}$. Observe que $A$ es un subconjunto de funciones de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, y por lo tanto $A \subset \mathcal{F}$. Además es claro que $A$ es equivalente con $[0,1]$. Por lo tanto, podemos concluir que $\#(A) = \mathbf{c} \leq \#(\mathcal{F})$.

Para mostrar que $\mathbf{c} \neq \#(\mathcal{F})$, por definición, probaremos que $[0,1]$ no es equivalente con $\mathcal{F}$.

Supongamos que existe una biyección $g : [0,1] \to \mathcal{F}$. Luego, para cada $y \in [0,1]$, se tiene que $g(y) \in \mathcal{F}$.

Ahora bien, para cada $x \in [0,1]$, tenemos que $g(y)(x) \in \mathbb{R}$, es decir, estamos usando el hecho de que $g(y) : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Considerando la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = g(y)(x) + \frac{1}{2},$$

queda claro que $f \in \mathcal{F}$. Ahora bien, tenemos que $f \neq g(y)$ , para todo $y \in [0,1]$, esto prueba que $g$ no es sobreyectiva, y entonces se concluye que $[0,1]$ no es equivalente con $\mathbb{F}$. En resumen, se sigue que $\mathbf{c} < \#(\mathcal{F})$.

## 1.10 Conclusión

Hemos pues definido para cada conjunto, $A$, un nuevo número llamado el número cardinal del conjunto $A$, y denotado tal número por el símbolo $\#(A)$. Este número cardinal es el mismo para cualquier conjunto que sea equivalente con $A$.

Vimos que $\mathbb{N}$ posee número cardinal $\aleph_0$, y que cualquier conjuto equivalente a él posee el mismo cardinal, además vimos que $[0,1]$ posee cardinal $\mathbf{c}$, y que en particular al ser $\mathbb{R}$ y $[0,1]$ equivalentes se tiene que $\#(\mathbb{R})$ es igual a $\mathbf{c}$.

Probamos que $\aleph_0 < \mathbf{c}$, y esto significaba que dado cualquier conjunto, $A$, con número cardinal igual a $\mathbf{c}$, es equivalente a un subconjunto de $\mathbb{N}$, pero que $A$ y $\mathbb{N}$ no son equivalentes.

Además vimos que el teorema de Cantor nos indica cómo construir conjuntos grandes, y en efecto dimos un ejemplo explícito de un conjunto con número cardinal mayor que $\mathbf{c}$.

Queda para esta última parte el ver si existe un conjunto $B$ cuyo número cardinal verifique lo siguiente:

$$\aleph_0 \ < \ \#(B) \ < \ \mathbf{c}.$$

La repuesta no se conoce aún, pero los que dicen que dicha respuesta es negativa, la llaman la Hipótesis del continuo.

Existe también la famosa Hipótesis Generalizada del continuo, la cual indica que para cualquier conjunto infinito, $A$, no existe un número cardinal, $u$, tal que

$$\#(A) \ < \ u \ < \ \#(\mathcal{P}(A))).$$

A esta altura ya el lector estará preparado para lo siguiente. Demostrar que si un conjunto $A$ es infinito, entonces se le puede expresar como una unión numerable de conjuntos infinitos, disjuntos por pares, es decir:

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

donde cada $A_n$ es infinito y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

Para realizar dicha prueba, lo primero que haremos seraéxpresar a $\mathbb{N}$ como una unión numerable de conjuntos infinitos, obviamente numerables, disjuntos dos a dos. Con esto en mano podremos demostrar el resultado original.
La idea es simple. Consideremos la sucesión de primos en su orden natural: $p_1, p_2, p_3, \ldots$, donde $p_1 = 2, p_2 = 3$, y así sucesivamente. Es conocido que el conjunto de números primos es infinito.

Para cada primo, $p_n$, consideremos el siguiente conjunto: $B_n = \{p_n^m : m \in \mathbb{N}\}$. Por ejemplo, en el caso $p_5 = 11$, tendríamos que $B_5 = \{11, 11^2, 11^3, \ldots\}$.

Observe que cada $B_n$ es numerable para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que la función $f : B_n \to \mathbb{N}$ dada por $f(p_n^m) = m$ es claramente biyectiva. Además , se tiene que $B_n \cap B_k = \emptyset$ si $k \neq n$. Esto por cuanto si existiera un $x$ en la intersección, entonces este $x$ debería tener la siguiente forma: $x = p_n^m = p_k^l$, para algunos $m, l$ enteros positivos. Esto es un absurdo, ya que contradice al teorema fundamental de la aritmética: aólo puede haber una única descomposición en primos, salvo el orden.

Por otra parte, observe que

$$\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup T,$$

donde $T$ es el conjunto de puntos que no viven en ningún $B_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Este conjunto es infinito, ya que por ejemplo contiene a todos los puntos de la forma $2 \cdot p_n$, con $n \geq 2$.

Por lo tanto, hemos expresado a $\mathbb{N}$ como una unión numerable de conjuntos numerables disjuntos dos a dos.

Ahora bien, como $A$ es infinito, ya sabemos que posee un subconjunto numerable, al cual llamaremos $B$. De esto sigue que existe $g : \mathbb{N} \to B$ biyectiva.

Observe que

$$B = g(\mathbb{N}) = g(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup T) = g(B_1) \cup g(B_2) \cup \cdots \cup g(T),$$

ya que la función separa las uniones. Es claro que $g(B_i) \cap g(B_j) = \emptyset$, para $i \neq j$, ya que de lo contrario se llega a que $B_i \cap B_j = \emptyset$, lo cual es absurdo. No es difíl el percatarse que cada $g(B_i)$ es numerable, y que $g(T)$ también lo es.

Por lo tanto, podemos escribir a $A$ de la sigueitne forma:

$$A = (A \setminus B) \cup B = (A \setminus B) \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup g(T),$$

donde los $A_i = g(B_i)$. Como la unión es numerable entonces hemos expresado a $A$ en la forma exigida.

Por último, sólo nos resta decir que dado un conjunto arbitrario no siempre es fácil encontrar su número cardinal. Considere el siguiente ejemplo-ejercicio.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión cuyo término general es $x_n = 1/n$. Mostrar que la colección de todas las subsucesiones de dicha sucesión, denotada por $\mathcal{F}$, es un conjunto no numerable. Además, calcule $\#(\mathcal{F})$. Lo obvio es que $\#(\mathcal{F}) > \aleph_0$.

# Bibliografía


1. Apostol, T.M. *Análisis Matemático.* Editorial Reverté. 1976.
2. Hrbacek, K; Jech, T. *Introduction to Set theory.* Marcel Dekker. 1999.
3. Jain, P.K.; Gupta, V.P. *Lebesgue Measure and Integration*. Halsted Press Book. 1986.
4. Kaplansky, I. *Set theory and Metric spaces.* Allyn and Bacon Inc. 1972.
5. Kolmogorov, A.N; Fomin, S.V. *Introductory Real Analysis.* Dover Publications Inc. 1975.
6. Lanski, Ch. *Concepts in Abstract Algebra.* THOMSON. 2005.
7. Torchinsky, A.*Real Variables.*Addison-Wesley.1988.