Encuentro Colombiano de matemática educativa

Desarrollo del pensamiento geométrico: algunas actividades de matemática recreativa

Oscar Javier Molina Jaime
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
ojmolina@uni.pedagogica.edu.co
Brigitte Johanna Sánchez Robayo
Profesora Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C, Colombia
brigittesanchez82@gmail.com
Jaime Fonseca González
Universidad Manuela Beltrán
Universidad Pedagógica Nacional
Grupo de Álgebra
jfgonzalez@pedagogica.edu.co

Resumen

En este taller se presentan actividades de Matemática Recreativa en el marco de temáticas relacionadas con teoremas elementales sobre algunas propiedades de los triángulos y construcción de algunos polígonos regulares y de cónicas, todas ellas con base en procedimientos que se realizan al plegar papel. En estas actividades, se evidencia la importancia de la visualización de relaciones entre objetos geométricos y posterior modelación de éstas, así como la elaboración y comparación de algunos procedimientos propios de la geometría y de otros, que posibilitan la transición de una representación concreta de objetos geométricos a un análisis de propiedades de los mismos.

1. Fundamentación teórica

Una de las tendencias de cambio que ha surgido en la Educación Matemática Colombiana en los últimos años, consiste en la recuperación del estudio de la geometría en el currículo escolar. Es así como en los lineamientos curriculares propuestos por el MEN (1998) se toma el pensamiento espacial como uno de los conocimientos básicos que desarrollan el pensamiento matemático del individuo. En esta propuesta, se concibe la geometría activa[1] como herramienta para que sea el estudiante quien reconozca los sistemas geométricos como instrumento propio para representar y conceptualizar el espacio y los objetos que se pueden encontrar en el mismo, a partir del descubrimiento de relaciones o hechos geométricos, de la modelación (o matematización) de los mismos enunciados en conjeturas, del análisis de relaciones entre los objetos matemáticos encontrados y de la aplicación de procedimientos geométricos y analíticos en la comprobación de aquellas conjeturas. Todo este proceso, puede ser

[1] En la propuesta del Ministerio de Educación, se privilegia la actividad en geometría más que la concepción pasiva de figuras y el estudio de objetos geométricos que aparentemente son estáticos. Entonces, la geometría activa se refiere al estudio de la geometría tomando como base el "saber hacer".

enmarcado en metodologías para la enseñanza de las matemáticas que no pretenden ser tradicionales o lineales; ahora bien, esas metodologías puede ser enriquecidas con actividades que se basen en el uso de material didáctico que, a partir de su manipulación, favorezcan el desarrollo de habilidades procedimentales y actitudinales en las que se potencie la aplicación o construcción de algunos tópicos del currículo de matemáticas en la educación básica y de algunos métodos de razonamiento matemático. Adicionalmente, este tipo de metodología genera ambientes de clase que potencia el trabajo como comunidad de práctica, en donde el profesor es un miembro más de la misma y en donde sólo actúa como experto cuando la situación lo amerita; un trabajo en el aula como éste, favorece la interacción entre los individuos, el desarrollo de habilidades comunicativas, el respeto por la diversidad de opiniones (Ruiz de Elvira, Blanco y Corchete, 1998) y la generación de prácticas naturales en las que el estudiante se interese por profundizar su conocimiento y cuestionar los fundamentos y procesos desarrollados durante la clase.

En este sentido, la siguiente propuesta de actividades con papel plegado pretenden ser un ejemplo de generación de ambientes de prácticas educativas que estén en correspondencia con diversos procesos que constituyen la actividad matemática (MEN 1998). Algunas de las actividades que se pretenden potencializar son:

- Conjeturar o verificar respecto a propiedades o relaciones geométricas relativas a los objetos aquí tratados.
- Comunicar y argumentar ideas matemáticas desarrolladas a partir de la comprensión, interpretación y evaluación de razonamientos realizados.
- Producir y exponer argumentos que de manera convincente, persuadan a sus pares, contemplando siempre como factor fundamental, el respeto al otro y a la diversidad de opinión.
- Abordar situaciones problema relacionadas con la matemática recreativa, identificando patrones y argumentando matemáticamente, según el contexto en que se encuentren.

2. Metodología

Se parte del presupuesto *enseñar no es mostrar, aprender no es imitar* (Segura, Cañas y Reynoso, 2005). Por eso es fundamental proponer un cambio en la manera de enseñar: en lugar de mostrar, se debe encontrar situaciones, en donde el alumno, con las herramientas que tiene y en lo posible haciendo uso de material concreto, pueda construir ese conocimiento que se quiere, él aprenda. No se debe seguir mostrando el procedimiento al resolver un problema para que los estudiantes lo imiten, se deben proponer situaciones que generen en el estudiante interés por resolverla, representando para él un reto asumible. El profesor debe entonces, no mostrar la forma de obtener la solución de dicha situación, por el contrario, debe permitir que sea el estudiante quien plantee estrategias de solución a partir de conocimientos previos. En este sentido, siguiendo parcialmente un esquema sugerido por Segura, Cañas y Reynoso, la siguiente propuesta está planificada para desarrollarse a partir de las siguientes fases de actuación:

- **Acción:** es la exploración por parte del estudiante (para este caso, los asistentes al taller) de la situación propuesta por el profesor, en la cual se pone en juego la responsabilidad individual de cada alumno con el compromiso voluntario de la resolución a la misma.
- **Formulación:** es la explicitación por parte de los estudiantes, de aquello que han encontrado después de la exploración. Allí se pone en juego la responsabilidad que tienen los estudiantes para comunicar aquello que establece, no importando si ello es acertado o erróneo.

- **Validación:** es aquí donde se pone en juego la responsabilidad de todos los agentes educativos (alumnos y profesor) en explicar, a partir de las normas sociomatemáticas de clase, aquello que se ha formulado.
- **Institucionalización:** esta es una tarea ineludible del profesor (para este caso, el ponente o tallerista); es él, el que hace que los alumnos reconozcan los saberes puestos en juego en la situación y que van a formar parte del saber matemático. Luego, hace una síntesis de lo aprendido utilizando un lenguaje lo más cercano posible al formal, esto según el nivel de los estudiantes (no es lo mismo un "lenguaje formal" en básica primaria, que en "básica secundaria").

Para diseñar las actividades, se tuvieron presente los siguientes principios básicos:

- sorprender al alumno, mostrando otra cara de las Matemáticas,
- potenciar la manipulación de materiales, para este caso del papel para plegar,
- utilizar la investigación (o exploración) como herramienta metodológica básica y
- diferenciar claramente la actividad matemática que se quiere llevar a cabo en el aula, de las clases de Matemáticas usuales (o tradicionales).

3. Actividades

Antes de describir las actividades, se considera pertinente mencionar algunas características del *origami* o *papiroflexia*. El origami es clasificado de acuerdo a diversos aspectos: el tipo de papel utilizado, la finalidad y la cantidad de piezas utilizadas. De acuerdo a la finalidad, se clasifica en *artístico* si la construcción de figuras es para un ornamento y *educativo* si es para el estudio de propiedades de los "objetos" que se construyen. Dependiendo el tipo de papel, se clasifica en *papel completo* si el trozo de papel inicial tiene forma rectangular o triangular y en *papel tiras*, si el trozo de papel inicial tiene forma de tiras largas. Dependiendo la cantidad de trozos, se clasifica en *tradicional* si la cantidad de trozos es una o a lo más tres y *modular* si son cuatro o más trozos de papel inicial que se pliegan para formar unidades, las cuales serán unidas de alguna manera para conformar una única figura.

De otro lado, la papiroflexia tiene unas reglas de construcción que pueden llamarse axiomas y que fundamentan las construcciones (y relaciones geométricas que de ellas se obtienen) que se pueden realizar con pliegues. Algunas de tales reglas son:

- Línea[2] que pasa por un punto: Se marca un punto sobre el papel, preferiblemente por los dos lados. Se dobla la hoja y sin apretarla, se hace resbalar sobre sí misma hasta que en el borde del insinuado doblez, aparece el punto predibujado. Entonces se marca con cuidado el doblez manteniendo el punto en éste.
- Línea que pasa por dos puntos: Se trata de conseguir que el doblez pase simultáneamente por dos puntos previamente marcados. Se recomienda con un lápiz unir los dos puntos, repasar la línea con objeto agudo no cortante, y doblar por el segmento marcado.
- Línea perpendicular a una línea dada: Se dobla el papel por la línea dada y se hace un nuevo doblez que lleve dicha línea sobre ella misma.
- Línea perpendicular que pasa por un punto: En el caso anterior, antes de marcar el último doblez se hace resbalar la primera línea sobre ella misma hasta que aparezca el punto en el insinuado nuevo doblez.

[2] Entiéndase línea como la recta que se puede asociar al doblez realizado.

- Mediatriz y punto medio de un segmento: Se hacen coincidir en el doblez los extremos del segmento, con lo que éste se dobla sobre sí mismo teniéndose una perpendicular.
    - Bisectriz de un ángulo: Se dobla el papel de forma que coincidan las líneas que forman el ángulo.
    - Movimiento de compás: Al doblar la hoja por un doblez que pasa por O cualquier punto A se corresponde en la hoja con otro punto A' de forma que OA = OA', lo que puede ser leído como un giro de A con centro en O.

Dichas reglas en sí mismas permiten justificar argumentos que dan los estudiantes a los hechos o relaciones geométricas que conjeturan.

Enseguida se expone la estructura que tiene la presente propuesta. (En el anexo se ilustran todas las actividades de la misma):

- Tres secciones denominadas *Tareas*, en las cuales se enmarcan actividades relativas a *triángulos, construcción de polígonos regulares* y *construcción de cónica*s, respectivamente. Las tareas **Acerca de Triángulos** y **Acerca de Construcción de Cónicas** se debe hacer uso de *origami tradicional* con *papel completo*, en tanto que la tarea **Acerca Construcción de Polígonos Regulares** se debe utilizar *origami tradicional* con *papel tiras*.
- Cada *Tarea* se describe de manera muy sucinta, y para cada *Actividad* de la *Tarea* se explicita su propósito.
- Cada *Actividad* tiene unos *pasos de instrucción* que indican cómo el estudiante debe hacer los dobleces. Enseguida de tales pasos, se presentan las preguntas que deben conducir al establecimiento del hecho geométrico que se tiene como propósito.

4. Conclusiones

- Con base en materiales concretos no muy elaborados y "al alcance de la mano" se pueden diseñar actividades diferentes a las tradicionales, que propicien un ambiente en el aula de matemáticas donde la interacción y la recreación de los estudiantes propician construcción de conocimiento en la comunidad de la clase.
- La papiroflexia puede ser un gran un instrumento para favorecer el desarrollo de las actividades matemáticas (modelación comunicación, etc.) propuestas por el MEN (1998) y el pensamiento geométrico en los estudiantes de Educación Básica y Media.
- En el marco del trabajo con actividades en las cuales se manipula papel plegado, los estudiantes se familiarizan con el funcionamiento de un sistema axiomático en tanto deben hacer uso de las reglas de la papiroflexia (lo que aquí se ha llamado axiomas de la papiroflexia), para justificar sus conjeturas. Se puede decir entonces que tales actividades se constituyen en un trabajo introductorio para la formalización en un sistema somático o teórico.
- Existen diversas construcciones usando papel, que pueden ser modeladas por medio de objetos geométricos y que permiten el estudio de regularidades así como el planteamiento y la comprobación de conjeturas.

5. Bibliografía

LARIOS, V., *Taller Polígonos con papel.*, II Congreso Regional del Noroeste de la enseñanza de las matemáticas. México. 2001.

LEDESMA, A., *Estudio cónicas con papel.*, Revista Educación Matemática. 1994.

RUIZ, A., BLANCO, M., CORCHETE, A., *Taller de matemáticas*. Junta de Extremadura, Mérida. 1998.

SEGURA, S., CAÑAS, S. y REYNOSO, D., *Aportes para la elaboración de secuencias didácticas egb 3 y polimodal. Material para la reflexión, la discusión y la toma de decisiones*. Dirección general de escuelas, Gobierno de Mendoza. 2005

ANEXOS

1. Acerca de Triángulos

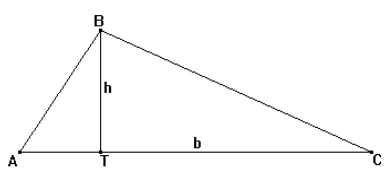
En las siguientes actividades se trabajará origami educativo con papel completo para verificar o conjeturar al respecto de algunas propiedades de los triángulos.

Actividad 1: Comprobación de la suma de los ángulos de un triángulo. Área del triángulo.

Propósito: Se debe inferir que la suma de los ángulos internos de un triángulo suman 180 y que el área es el producto de la base y la altura correspondiente, dividido entre dos.

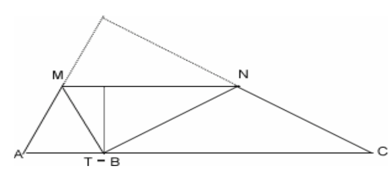
<table>
<tr>
<td>

1. Se recorta un triángulo cualquiera y se apoya sobre el lado más largo. Se dobla trazando una altura sobre ese lado.



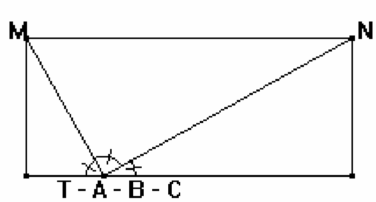
</td>
<td>

2. Doblando, se lleva B sobre T.



</td>
</tr>
<tr>
<td>

3. Se lleva también A y C sobre T



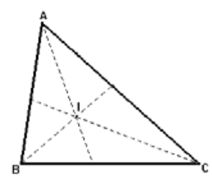
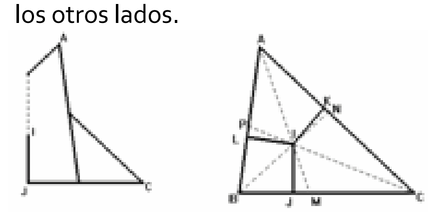
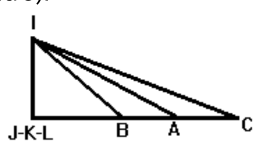
</td>
<td>

- ¿Qué puede inferir acerca de la medida de los ángulos que determina el triángulo? Explique su respuesta. Establezca su conjetura
- Al hacer los dobleces, ¿qué figura resulta? ¿Cuál es el área del triángulo original con respecto a la de la figura que se forma después de hacer los dobleces? Explique su respuesta. Establezca su conjetura

</td>
</tr>
</table>

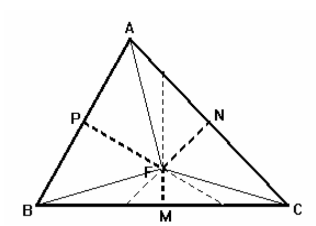
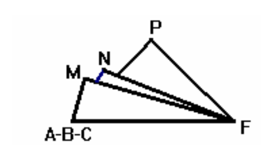
Actividad 2: Trazado del incentro. Igualdad de la distancia del incentro a los lados.

Propósito: Inferir que las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes y que el incentro de un triángulo equidista de cada uno de sus lados.

<table>
<tr>
<td>1. Se recorta un triángulo cualquiera, se trazan sus bisectrices uniendo de dos en dos los lados que forman los distintos ángulos. Se marca por las dos caras el punto I de intersección entre las tres líneas. I recibe el nombre de incentro del triángulo.

</td>
<td>2. Se trazan segmentos perpendiculares desde I a los lados. Se hace resbalar un lado sobre él mismo doblando el papel, aplastando sin marcar hasta ver que aparece en el doblez el punto I. Sin perder la guía del lado, se marca el doblez desde I hasta el lado. Se repite la operación en los otros lados.
</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Finalmente, se doblan los segmentos IA, IB e IC en forma de colina (hacia fuera) y los segmentos IJ, IK e IL en forma de valle (hacia dentro).

</td>
<td>• ¿Qué se ha verificado con la última construcción? ¿Por qué?</td>
</tr>
</table>

Actividad 3: Trazado del circuncentro. Igualdad de la distancia a los vértices.

Propósito: Inferir que las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes y que el circuncentro de un triángulo equidista de cada uno de sus vértices.

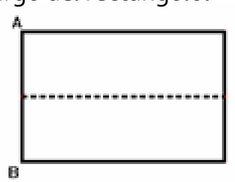
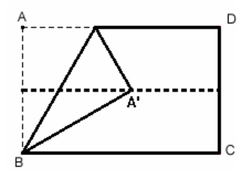
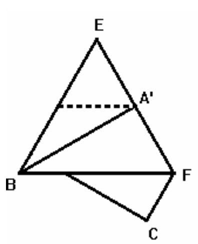
<table>
<tr>
<td>1. Se recorta un triángulo acutángulo escaleno y se trazan sus mediatrices doblando papel (hacer coincidir de dos en dos sus vértices).

</td>
<td>2. Con un lápiz se trazan los segmentos AF, BF y CF. Doblando en forma de valle por FM, FN y FP y en forma de colina por AF, BF y FC se obtendrá una estrella de tres puntas que es posible cerrar juntando los tres brazos, comprobando que los segmentos AF, BF Y CF son iguales.

</td>
</tr>
</table>

- ¿Qué se ha verificado con la última construcción? ¿Por qué?

Actividad 4: Construcción del triángulo equilátero

Propósito: Inferir los siguientes hechos geométricos:

- Un triángulo es isósceles si y sólo si una de sus alturas coincide con una de sus bisectrices.
- Si un triángulo tiene dos ángulos con medida 60º, es equilátero.
- Si un triángulo es equiángulo es equilátero.

1. Doblando, se traza la paralela media en el sentido largo del rectángulo.  	2. Con un doblez que pase por B se lleva A sobre la paralela media. 
3. Sin desdoblar la figura anterior, con un nuevo doblez, se prolonga el lado más corto del triángulo.  • ¿Dónde quedó el punto D?	• ¿Qué ángulo forma el rayo que contiene $\overline{BA'}$ con el rayo que contiene $\overline{EF}$? ¿Por qué? ¿Qué es $\overline{BA'}$ en el ΔEBF? ¿Qué es A' en $\overline{EF}$? ¿Por qué?. • Con base en la relación que tienen $\overline{BA'}$ y ΔEBF, ¿Cómo es ΔEBF? • De acuerdo al resultado que se obtuvo en el paso 2, ¿Es posible construir un triángulo equilátero de lado congruente al menor del rectángulo?

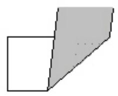
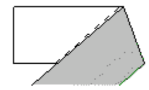
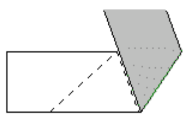
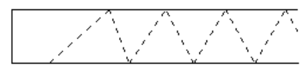
2. Acerca de Construcción de Polígonos Regulares[3]

En las siguientes actividades se trabajará origami educativo con papel de tiras largas, con la finalidad de construir polígonos regulares e identificar patrones y argumentar matemáticamente dicha construcción.

Propósito de las actividades: A partir de procesos Ad infinitum construir polígonos regulares como triángulos equiláteros, pentágonos y nonágonos, argumentar con base en patrones aritméticos (sucesiones) por qué lo son y generalizar resultados a partir de ciertos casos particulares.

3 Actividad basada en el taller Polígonos con papel del profesor Víctor Larios expuesto en el II Congreso Regional del Noroeste de la enseñanza de las matemáticas. México. 2001

Actividad 1: Plegar y Torcer I

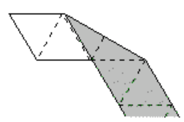
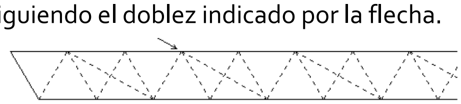
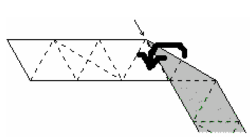
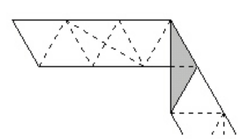
1. Se toma una tira de papel y se dobla hacia ARRIBA en cualquier ángulo: 	2. Se desdobla y dobla hacia abajo siguiendo el doblez anterior: 
3. Se desdobla nuevamente y vuelve a doblar hacia arriba siguiendo el doblez anterior: 	4. En forma repetida, se continúa doblando alternativamente hacia arriba y hacia abajo, siguiendo siempre el doblez anterior: 

El procedimiento que se acaba de realizar con la tira de papel se denomina $A^1 - B^1$.

a. ¿Cómo son los triángulos que se obtienen a medida que se realizan los dobleces? ¿Por qué?

Eliminando los triángulos que se desee y doblando por las marcas obtenidas de los pliegues anteriores.

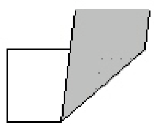
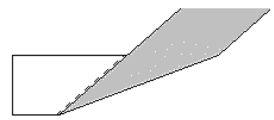
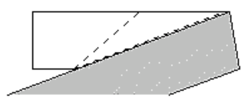
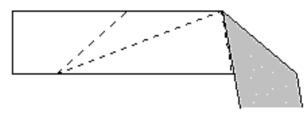
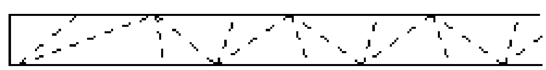
b. ¿Qué figuras geométricas se pueden realizar? Dibujarlas y describir el procedimiento necesario para doblar y obtener las figuras que se construyeron.

5. Se realiza un doblez secundario, para lo cual dobla hacia abajo exactamente como se muestra: 	
6. A intervalos regulares se realiza el mismo doblez secundario. Como se ve en la figura de abajo. Luego, se pliega la tira siguiendo el doblez indicado por la flecha. 	
7. Ahora, se pliega siguiendo el doblez indicado por la flecha delgada, como si se estuviera torciendo la tira 	8. El resultado es como el que se muestra, en la figura: 

c. Repitiendo los tres pasos anteriores a intervalos regulares (procedimiento denominado Pliega y Tuerce), ¿qué figura geométrica se obtiene? ¿Por qué?

Actividad 2: Plegar y Torcer II cuartilla

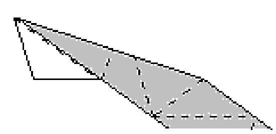
Se realizará A2 – B2, esto es:

1. Se toma una tira de papel y se dobla hacia ARRIBA en cualquier ángulo: 	2. Se desdobla y se pliega nuevamente hacia arriba siguiendo el doblez anterior: 
3. Se desdobla y pliega hacia abajo siguiendo el doblez anterior: 	4. Nuevamente se desdobla y pliega hacia abajo, siguiendo el doblez anterior 
5. Se desdobla y continúa doblando consecutivamente dos veces hacia arriba y dos veces hacia abajo ($A^2 – B^2$), siempre siguiendo el doblez anterior, te queda algo como: 	
6. Posteriormente, se eliminarán los primeros triángulos (irregulares) de tal forma que se pueda plegar la tira siguiendo diferentes dobleces, ya sea los cortos o los largos.	

a. ¿Qué figura se obtiene si se pliega por los segmentos más cortos?
b. ¿Qué figura se obtiene si se pliega por los segmentos más largos?
c. Si se realiza el procedimiento de pliega y tuerce, ¿Qué figura se obtiene?

Actividad 3: Plegar Y Torcer III

1. Inicialmente, se debe realizar un doblez secundario en la tira anterior (pentágono), similar al pliegue del punto 5 de la primera actividad así:



2. Se desdobla y pliega nuevamente realizando el mismo doblez, hasta obtener:

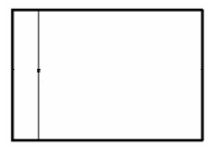
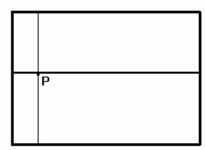
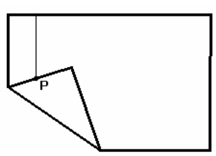
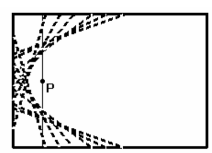
¿Cuál es la figura que se obtiene si se realiza el procedimiento pliegue y tuerce?.

3. Con $A^3 – B^3$ ¿Qué figura se obtendrá?. Si se utiliza el pliegue auxiliar ¿cuál se obtiene?
4. Si se pliega una tira con el procedimiento $A^n – B^n$, ¿cuál será el número de lados que tendrá el polígono realizado a partir de dicha tira?

3. Acerca de Construcción de Cónicas[4]

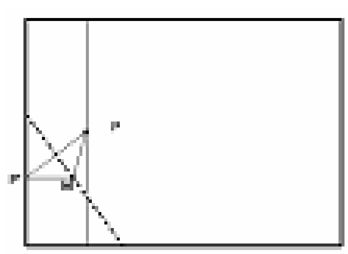
Las anteriores actividades tenían como finalidad justificar ciertas características que se cumplen en los triángulos a partir de ciertas construcciones en papel plegado, y construir polígonos convexos regulares, garantizando que lo son a partir de herramientas aritméticas (sucesiones) que modelan los pliegues realizados. A continuación, se exponen actividades que tienen como **propósito** construir cónicas (parábola, elipse e hipérbola) además de justificar por qué lo son, a partir de los pliegues que se realizan y las definiciones como lugar geométrico que tales figuras tienen.

Actividad 1: Construcción de una Parábola

<table>
<tr><td>1. Se toma una hoja rectangular y a cierta distancia de uno de los lados menores, se pliega de tal forma que se marque un doblez paralelo a éste.</td><td></td></tr>
<tr><td>2. Se une los lados largos de la hoja mediante un pliegue, de tal forma que se construye la mediatriz del doblez realizado en el numeral 1. Se nombra P al punto de intersección de estos dos dobleces.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3. Se dobla la hoja de forma que un punto cualquiera del lado señalado pase por el punto P.

</td><td>4. Se desdobla y repite el numeral 3 variando el punto de apoyo sobre el lado de un extremo a otro.

</td></tr>
</table>

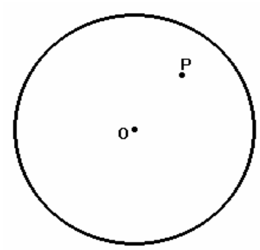
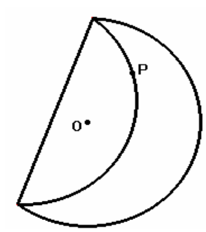
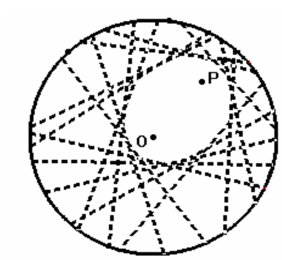
Como se puede observar, la figura que se va delimitando es una parábola:

a. ¿Cuál es su foco? ¿Cuál su eje? ¿Cuál su vértice? ¿Cuál su directriz?
b. Justifique por qué efectivamente se obtiene una parábola

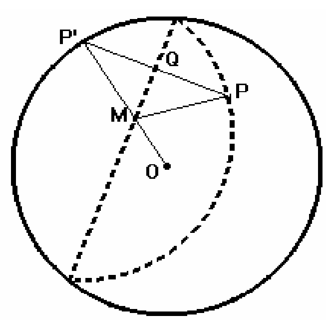


[4] Actividades basadas en el artículo *Estudio cónicas con papel* de Antonio Ledesma publicado en Revista Educación Matemática. 1994.

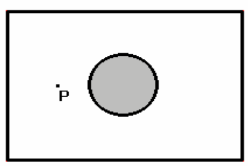
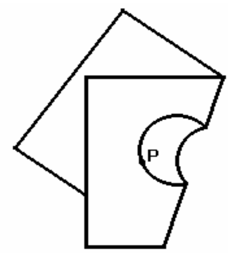
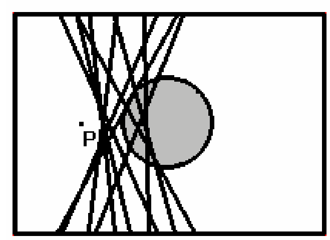
Actividad 2: Construcción de una Elipse

<table>
<tr>
<td>1. Se toma una hoja y se dibuja dentro, una circunferencia de la longitud que se desea. Se recorta el círculo y se marca un punto P un poco más cerca del borde que del centro O. Se marca el punto y el centro por los dos lados del círculo, para facilitar la visión al doblar.

</td>
<td>2. Se dobla el círculo de forma que un punto cualquiera de la circunferencia pase por P y se desdobla.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">3. Se repite el numeral 2 variando el doblez de forma que tome varios puntos de la circunferencia. Los dobleces que se marcan van delimitando una elipse.

</td>
</tr>
</table>

a. ¿Cuáles son los focos de la elipse? ¿Cuál es su centro?
b. Justifique por qué efectivamente se obtiene una elipse



Actividad 3: Construcción de una Hipérbola

<table>
<tr>
<td>1. Se toma una hoja y aproximadamente en el centro de la misma, se dibuja una circunferencia. Se separa cortando el círculo y dejando intacto el resto de la hoja; en este punto se recomienda que se doble el papel pasando por el centro de la circunferencia y se recorte por la línea de semicircunferencia. Se marca un punto de la hoja agujereada a cierta distancia de la circunferencia y de tal forma que queden equidistantes de los lados largos de la hoja.

</td>
<td>2. Se dobla la circunferencia, de tal manera que un punto de ella, pase por P.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">3. Se desdobla (tener presente el doblez) y se repite el numeral 2 variando el doblez de forma que tome varios puntos de la circunferencia. Los dobleces que se marcan van delimitando una hipérbola.

</td>
</tr>
</table>

a. ¿Cuáles son los focos de la hipérbola? ¿Cuál es su centro?
b. Justifique que efectivamente se obtiene una hipérbola.