ARTÍCULOS: INVESTIGACION

Algunos trabajos recientes sobre integración

1. Introducción

En este artículo hablaremos del *cálculo de primitivas* y de su enseñanza, sobre todo en el nivel medio superior. Nos basaremos principalmente en observaciones y resultados obtenidos en varias tesis, algunas concluidas y otras en desarrollo ([1] a [4]). Destacaremos dos cuestiones: en primer lugar, respecto al desempeño en dicho cálculo, se señalará el papel fundamental que juega la elección de estrategias cuya efectividad, en principio, es incierta. En segundo lugar, se discute la ausencia de control en las operaciones, un factor que consideramos una de las principales causas de los errores cometide los "prerrequisitos" durante la enseñanza y aprendizaje de este cálculo, habría que revisar la importancia dada al dominio de los "prerrequisitos", y posiblemente, buscar determinarlos con mayor precisión. Finalmente se mencionan algunas relaciones con los "sistemas expertos" en Inteligencia Artificial [5].

2. El Cálculo de primitivas

Entre los algoritmos matemáticos estudiados antes del nivel superior, el cálculo de primitivas es el más avanzado, pues reúne en un mismo sistema, algoritmos algebraicos y de derivación, y también el hecho fundamental de que calcular una primitiva es una operación inversa fundamental a la derivación. Intervienen el álgebra y las reglas de derivación, ya que con frecuencia es necesario efectuar trans-

Guillermo Arreguín
Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV)
Sección de Matemática Educativa
Instituto Politécnico Nacional (IPN) - México, D.F., México

formaciones algebraicas: sustituciones, factorizaciones, etcétera. También es muy frecuente tener que derivar funciones, y en ciertos casos, se deben resolver sistemas de ecuaciones. Puede ser necesario identificar las funciones que intervienen en una composición, y también efectuar la composición de funciones al derivar.

Aparte de los elementos anteriores, hay una serie de habilidades algorítmicas específicas, usualmente poco explícitas. Veamos un par de ejemplos:

En primer lugar hay una serie de fórmulas de integración básicas, en las que se da la primitiva de una función algebraica de u, y donde aparece alguna de las expresiones $\pm u^2 \pm a^2$ (con a constante), ya sea como denominador de una función racional, o bien en un radical. Es usual hacer una serie de ejercicios en los cuales a algún polinomio de segundo grado, con una sustitución adecuada, se le da dicha forma genérica. Por ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 5}} \quad \text{etc.}$$

Es decir, al ejercitarse para llevar ciertas integrales a dichas fórmulas de integración, se enseña un tipo de transformación algebraica que no se usa en otros temas.

En segundo lugar, al efectuar ciertos cambios de variables, hay formas más económicas de llevarlos a cabo, que por su brevedad eliminan riesgos de error. No es usual que estos desarrollos sean explícitamente señalados, sino que se van conociendo y dominando con la práctica, quizás imitados del texto o del profesor. (Así por ejemplo, al simplificar

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x + 1}}$$

mediante la sustitución $u = \sqrt{x + 1}$, en vez de calcular du y luego modificar el integrando, es más sencillo derivar implícitamente $u^2 = x + 1$ y sustituir tanto u como la expresión obtenida por dx.)

Hay la impresión de que el cálculo de primitivas es rutinario, y que frecuentemente no hay una comprensión de lo que se está haciendo. Aunque en principio pueda ser válida esta última observación (como sucede al olvidar los dominios de las funciones o también en los errores causados por un conocimiento casi nulo de las funciones trigonométricas o logarítmicas) hay características en este cálculo que lo hacen un cálculo "inteligente", puesto que no hay fórmulas ni algoritmos mecánicos: hay estrategias o métodos que ensayar. Se debe seleccionar un método y quizá también sustituciones, cuya probabilidad de éxito depende en buena medida de una experiencia adquirida con la práctica. Además, aunque esto sea raro en los ejercicios planteados en el bachillerato, en ocasiones ni siquiera puede haber primitiva elemental [3].

3. Estrategias de resolución

Veamos ahora en mayor detalle uno de los aspectos clave de este cálculo: conjeturar la hipótesis más razonable a nuestro alcance sobre el método, o bien sobre la sustitución más adecuada a seguir, y luego, ponerla en práctica. Finalmente, evaluar el resultado obtenido con dicho método de integración o con la sustitución escogida.

Algunas observaciones en esta sección provienen de entrevistas a algunos profesores de matemáticas en el nivel superior, que aunque no se sentían "fuertes" en el tema al realizarse la entrevista, seguramente tuvieron cierto dominio del mismo en algún momento. A ellos se les propuso integrar

$$\int \frac{1 + \sqrt{1 + x}}{1 - \sqrt{x}}\,dx$$

un problema tomado del texto de Goursat ([6] p. 246), que no es inmediato, y por lo tanto, permite observar los pasos dados al iniciar la resolución. Otras observaciones provienen de alumnos de bachillerato, al ser interrogados sobre errores cometidos en un cuestionario, y que fueron incluidas en la tesis de Roberto Ramírez [1] y en la de Lourdes Quezada [2]. Destaquemos primeramente una toma de decisiones: la proposición de alguna sustitución; en segundo lugar, ensayar dicha sustitución, y en tercer lugar, valorar —ya sea en el desarrollo, o al obtener una nueva integral— si hubo avance o no con dicha sustitución. En el problema antes mencionado, propuesto a los profesores, hay una decisión de importancia: al elegir la primera sustitución, ¿qué hay que intentar inicialmente? Las opciones principales fueron tres:

En un caso intentar eliminar ambos radicales simultáneamente; en otro, primero eliminar uno, o bien, separar directamente en suma de integrales. Respecto a la última opción se nos hizo la observación siguiente:

[Entrevistador] (al final del cálculo): "¿Por qué nadie hasta ahora habrá separado en suma de integrales?"

[Entrevistado] "...no le veo caso, de cualquier manera me siguen quedando los dos radicales, mejor primero trato de eliminarlos..."

En cambio, preferir la segunda opción a la primera parece basarse en que parece poco razonable esperar eliminar ambos radicales simultáneamente, prefiriendo el ensayo más simple de eliminar un radical y examinar las funciones que resulten.

En algunos cuestionarios aplicados en el nivel medio superior, encontramos evidencias de alumnos que imaginan válida alguna "transformación" falsa que resolvería de inmediato el problema. Nos referimos a transformar, por ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x} \text{ en } \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{4x},$$

o bien

$$\sqrt{x^2 + 4} \text{ en } x + 2$$

En estos casos no es claro si el problema es algebraico o bien de otro tipo. En una entrevista, al preguntar la maestra sobre la validez de una transformación de este tipo, el alumno respondió: "...no, pero si no lo hago, no puedo resolver la integral". ¿Es esto una carencia de control lógico en los pasos? o bien, ¿será un intento por llegar a una solución? (por llegar a una "solución" cualquiera que esta sea, o bien esperando que se la tomen por "buena" al calificar?).

Si distinguimos dos niveles en la ejecución del cálculo:

1. El de planeación, es decir, la elección de la estrategia, decidir qué sería útil para resolver el problema, y además, valorar tanto esta decisión como el progreso que se esté alcanzando al implementarla.
2. El de ejecución y control de las transformaciones específicas que conlleva la estrategia seleccionada.

Nuestra afirmación es que hay interferencia entre estos niveles, el de planeación y el de ejecución y control de las operaciones.

Por ejemplo, en expresiones del tipo $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$ un error frecuente consiste en "sacar la raíz cuadrada" $x + 2$ (es frecuente, ver [1] p. 102 que el error algebraico sea reconocido por el estudiante al pedírsele elevar al cuadrado $x + 2$). Sin embargo, la intención de eliminar la raíz cuadrada es correcta. En efecto, tanto una sustitución trigonométrica $x = 2\tan\theta$ como otros métodos, digamos la llamada sustitución de Euler: $\sqrt{x^2 + 4} = x + 2$ tienen exactamente la misma finalidad, poder eliminar la raíz cuadrada, con la gran diferencia de que en estos casos dicha eliminación es correcta, y que la integral se transforma, respectivamente, en la integral de una función trigonométrica o en la de una función racional.

4. Control operatorio: la atención y la experiencia

Por el término "control", usado en la sección precedente, nos referimos al cuidado puesto en los desarrollos operativos de un problema. Aquí tocaremos dos factores que participan en dicho control: la atención puesta en los cálculos y la experiencia efectiva de que se dispone. Aunque nos importa sobre todo la situación de llevar a cabo una estrategia seleccionada en particular, para efectuar una integración también es aplicable en otros tipos de problemas, por ejemplo: "Desarrolla y simplifica: $5(x^2 + 3)^2$" descritos en [1] p. 92.

En cuanto a la experiencia, hay procedimientos que en formas inmaduras tienden a aplicarse en contextos excesivamente amplios, pues las limitaciones de su aplicabilidad no han sido aún asociadas a los procedimientos [7] p. 276. En este sentido, errores como el llamado "lineal" pueden indicar una experiencia pobre en las limitaciones de ciertos esquemas. Quizás el término "experiencia matemática" de un alumno, frase fácil que empleamos en ocasiones, no sólo pueda aplicarse a una capacidad para asimilar temas relativamente avanzados en "contextos abstractos", sino también en cuanto a tener señales de advertencia de pasos que necesitan justificarse.

Es notable que los profesores entrevistados mostraran una alta capacidad para reconocer los "puntos neurálgicos" al decidir una estrategia, y también un excelente "control"; al parecer lo que perdieron con el tiempo fue principalmente la gama de integrales inmediatas que recordaban, y quizá cierta soltura operatoria que ya no se tiene automatizada.

En las entrevistas de las tesis mencionadas, [1] y [2], se vio que no aparecían cierto tipo de errores que se habían cometido en el cuestionario escrito, ya sea porque el alumno tenía para sí una mayor exigencia de exactitud en sus operaciones en la entrevista, o bien, porque ya había superado la deficiencia. Por otra parte (dato de F. Oseguera), el estudiante propone más fácilmente alguna sustitución, o en general, alguna transformación al estar incorporado a su grupo, que al trabajar frente al pizarrón.

5. "Representación del conocimiento"

En el aula, ¿cómo se enseña a integrar?, ¿cómo se presentan los métodos de integración?, y finalmente, ¿cómo se enseña en qué casos se aplican? En general, se dan indicaciones de cómo proceder; son reglas probabilísticas que en ocasiones son inoperantes. Por ejemplo, al aplicarse a funciones elementales cuya primitiva no es elemental [3]. Estas indicaciones no deben ser muy numerosas ni específicas, puesto que serían una pesada carga para la memoria por su cantidad o por sus detalles particulares. Hay también, como ya hemos indicado en la Sección 2, maneras de efectuar sustituciones que son más adecuadas que otras, y que se aprenden por imitación. Estos son ejemplos de un conocimiento que se busca adquieran los estudiantes, pero que nunca se tratará de evaluar directamente, sino a través de su puesta en práctica en ejercicios específicos. En tal sentido, es un conocimiento no teórico en el sentido usual del término, son *orientaciones metodológicas* que es útil poner en práctica, pero que es inútil memorizarlas.

Veamos, como ejemplo de estas orientaciones, las "instrucciones de empleo" del método de integración por partes, que hemos tomado del capítulo sobre análisis de textos incluido en [2]. Se trata de indicaciones dadas en los textos de cálculo de Leithold, Spivak y Granville, las cuales, como se verá, forman una progresión cada vez más explícita:

1. "Por medio de una selección adecuada de u y v *puede* ser más fácil integrar la segunda ($\int v\,du$) que la primera ($\int u\,dv$)."

"...un par de selecciones para u y dv *puede* servir mientras que otro par no." (Leithold, pp. 512, 515).

2. "La integración por partes *es útil* cuando la función a integrar puede considerarse como producto de una función f, cuya derivada es más sencilla que f, por otra función que se vea claramente que es de la forma g'." (Spivak, p. 459).

3. "Entre las aplicaciones más importantes del método de integración por partes se encuentra la integración de:

a. diferenciales que contienen productos

b. diferenciales que contienen logaritmos

c. diferenciales que contienen funciones trigonométricas inversas". (Granville, p. 269).

En ocasiones, hay indicaciones más específicas para la aplicación de la integración por partes:

"Hay dos artificios especiales que a menudo dan buen resultado en la integración por partes. El primero consiste en considerar la función g' como igual a 1, lo cual siempre es posible... El segundo artificio consiste en utilizar la integración por partes para halla $\int h$ en términos otra vez de $\int h$ y después despejar $\int h$ en la ecuación resultante ..." (Spivak, p. 459).

El establecimiento de una estructura jerárquica de reglas de tipo probabilístico se conoce como una "representación de conocimiento" (un tema importante en el área de sistemas expertos en Inteligencia Artificial [5]). Consideramos de gran utilidad conocer en forma más clara esta estructuración de reglas, puesto que la capacidad para aplicarlas es la habilidad principal que se busca transmitir a los estudiantes.

A pesar de la referencia a la informática en el párrafo precedente, no nos interesan modelos o situaciones ideales, sino principalmente los estudiantes promedio de nuestras escuelas, en cuya actuación coexisten diferentes niveles de desempeño en algoritmos de cálculo; en quienes varía la soltura con que manejan dichos algoritmos, y en quienes también hay un mayor o menor grado de olvido. En este sentido, cualquier modelo o imagen de este sistema de cálculos que no tome en cuenta estas características, será totalmente inadecuado, pues aun con estas deficiencias e imperfecciones se organiza en los estudiantes un sistema operatorio, en el cual en ocasiones hay una recuperación (cuyas causas quisiéramos determinar) de las ineficiencias en los "prerrequisitos", que quizá sea causada por la rectificación de equívocos, o por una comprensión más completa, o en fin, por avances cuya naturaleza deberíamos conocer mejor.

Bibliografía

RAMÍREZ G., Roberto. *Cálculo de primitivas en el bachillerato: Una evaluación previa de algoritmos algebraicos y de cálculo diferencial*. **Tesis de maestría. SME-CINVESTAV. 1986.**

QUEZADA B., Lourdes. *Cálculo de primitivas en el bachillerato: Su correlación con los algoritmos algebraicos y de cálculo diferencial*. **Tesis de maestría. SME-CINVESTAV. 1986.**

BECERRIL, E., José Ventura. *Algunos resultados clásicos en la integración de funciones elementales*. **Tesis de maestría. SME-CINVESTAV. 1987.**

OSEGUERA A., Francisco. *Enseñanza de estrategias en el cálculo de primitivas*. **(Tesis en desarrollo.)**

RICH, Elaine. *Artificial intelligence*. **McGRAW-HILL. 1984.**

GOURSAT, Edouard. *A course in mathematical analysis*. **Dover. 1959.**

DAVIS, Robert. *"Complex mathematical cognition"* **(artículo aparecido en *The development of mathematical thinking*, H. Ginsburg (dir. ed.). ACADEMIC PRESS. 1983.**