ARTICULOS: TEMAS DE MATEMATICAS

El número *e* como límite de sucesiones

Un hecho conocido en el cálculo es que la sucesión $S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge a e; sin embargo, su demostración en los textos es usualmente complicada o larga (confrontar, por ejemplo, [1, pág. 135]). A continuación daremos una demostración que consideramos sencilla.

En 1951 Mendelsohn [2] usando el hecho de que la media aritmética es mayor que la media geométrica, demostró que son convergentes las sucesiones $S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $T_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, aunque sin dar los límites. [Véase apéndice]. Concretamente mostró lo siguiente:

1. S_n es creciente como función de n para n entero positivo.
2. T_n es decreciente como función de n para n entero positivo.
3. $S_n < T_n$ para todo entero positivo n.

De estos tres hechos se concluye que tanto S_n como T_n son convergentes y que

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} T_n \qquad (1)$$

Demostrando dos sencillas desigualdades, veremos que en (1) la igualdad se cumple y el límite es e, obteniendo así no una sino dos sucesiones muy similares (difieren por un factor $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ que tienden a e.

Considérese la función $f(t) = t^k e^{-t}$ con $k \geq 2$. Es claro que $t = k$ es un máximo de f en $(0, \infty)$ ya que

$$f'(t) = (k - t)t^{k-1}e^{-t} = 0 \leftrightarrow t = 0$$

o bien $\quad t = k$

y además

$$f''(t) = t^{k-2}e^{-t}(k^2 - 2kt - k + t^2)$$

de donde

$$f''(k) = -k^{k-1}e^{-k} < 0.$$

Tomando $t = n + 1$ y $k = n$, tenemos entonces

$$f(t) = f(n + 1) < f(n) = f(k)$$

es decir,

$$(n + 1)^n e^{-(n+1)} < n^n e^{-n}$$

o bien

$$\left(\frac{n + 1}{n}\right)^n < e \qquad (2)$$

Ignacio Barradas
Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT)
Guanajuato, México

y tomando $t = n$ y $k = n + 1$

$$f(t) = f(n) < f(n + 1) = f(k)$$

es decir,

$$n^{n+1}e^{-n} < (n + 1)^{n+1}e^{-(n+1)}$$

o bien

$$e < \left(\frac{n + 1}{n}\right)^{n+1} \qquad (3)$$

(2) y (3) se pueden reescribir como

$$S_n < e < T_n = S_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

para toda $n \geq 2$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} S_n = e = \lim_{n\to\infty} T_n$$

Apéndice

Demostración de 1, 2 y 3 (Mendelsohn)

1. Considérese el conjunto de los siguientes $n + 1$ números

$$1, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1, \ldots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Su media aritmética es $1 + \frac{1}{n + 1}$ y su media geométrica $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/n+1}$ y como la media aritmética es mayor que la geométrica, se sigue que

$$\left(1 + \frac{1}{n + 1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es decir, S_n es creciente.

2. Considérese el conjunto de los siguientes $n + 2$ números

$$1, \left(\frac{n}{n + 1}\right)^1, \ldots, \left(\frac{n}{n + 1}\right)^{n+1}$$

Su media aritmética es $\frac{n + 1}{n + 2}$ y su media geométrica $\left(\frac{n}{n + 1}\right)^{\frac{n+1}{n+2}}$ de ahí que $\frac{n + 1}{n + 2} > \left(\frac{n}{n + 1}\right)^{\frac{n+1}{n+2}}$ y tomando recíprocos

$$\left(1 + \frac{1}{n + 1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

3. La demostración de 3 es trivial.

Bibliografía

FERRAR, W. L. *A textbook of convergence*, OXFORD UNIVERSITY PRESS, 1980.

MENDELSOHN, N.S., *American Mathematical Monthly*, Vol. 58, (1951), p. 563.