ARTICULOS

Algunas dificultades en el aprendizaje de las funciones, en el nivel secundario*

El presente artículo apareció publicado en el N° 0 de nuestra revista (agosto 1988). Sin embargo, debido a los problemas de producción y distribución que enfrentó el Comité Editorial para la publicación de este número, los artículos que ahí aparecieron no han tenido la difusión debida. Por este motivo, hemos decidido incluir en éste y en cada uno de nuestros próximos números los artículos publicados en el N° 0, adicionándolos a los artículos que se seleccionaron para cada número.

COMITE EDITORIAL

Las dificultades en el aprendizaje de las funciones que se comentan en este trabajo fueron detectadas a través de un cuestionario aplicado a alumnos de 1o. y 3o. de secundaria de algunas escuelas oficiales de París y del Liceo Franco Mexicano. Este último es una escuela francesa que funciona en México, D.F., con profesores franceses, pero con una población escolar mexicana de un 70%.

El cuestionario fue elaborado en dos modalidades[1]. Las cuestiones fueron seleccionadas, en su mayoría, de los textos actuales para 1o. de secundaria (para Francia 2o. de secundaria, ya que la educación primaria comprende 5 año y la secundaria 4). Cuatro de las doce cuestiones son idénticas en ambas modalidades.

Estos cuestionarios fueron aplicados a 256 alumnos de 1er. año en junio de 1983 y a 305 de 3o. en marzo de 1984, antes de que los alumnos iniciaran el estudio de las funciones lineales. El objeto de la segunda aplicación fue detectar los progresos o las regresiones de los alumnos de 3er. año en relación con los de 1o.

En promedio, los alumnos de 1o. resolvieron bien 20% de las cuestiones y los de 3o., 40%. (Se consideró una cuestión como bien resuelta cuando todos sus item fueron resueltos correctamente).

Cabe señalar que si bien el resultado en 3o. fue mejor que en 1o., el grado de dificultad con que los alumnos de ambos niveles percibieron las cuestiones fue aproximadamente el mismo: las que se referían a proporcionalidad fueron las más sencillas y las concernientes a biyecciones o a biyecciones y funciones simultáneamente fueron las más difíciles[2].

Los resultados obtenidos por los alumnos de 1er. año de las escuelas parisinas no difieren de manera significativa con los obtenidos por los del Liceo Franco Mexicano. En cambio en 3er. año se nota un progreso mayor entre los jóvenes del Li-

Martha Olvera

* Presentado en el VIII Congreso Nacional de Profesores de Matemáticas. Guadalajara, Noviembre 1985.
[1] Anexos 1 y 2.
[2] Anexo 3.

ceo Franco Mexicano que entre los de las escuelas parisinas. Este hecho se puede explicar si se considera que el Liceo Franco Mexicano es una escuela con alumnado muy selecto, en cambio el parisino de la muestra es bastante heterogéneo; por otra parte, dos años de escolaridad han proporcionado a los alumnos del Liceo un mayor dominio del francés.

Hay que considerar que el porcentaje de cuestiones sin respuesta disminuyó notablemente entre los alumnos de 3o., lo que trajo como consecuencia que en ocasiones el porcentaje de respuestas falsas fuera más alto que el de aciertos. Si se considera también el aumento en el porcentaje de errores, el progreso aparente, manifestado por el aumento de porcentajes de aciertos, resulta relativo.

En los cuestionarios de 3er. año hay una diferencia más acentuada entre los alumnos "fuertes" y los "deficientes" en matemáticas, tanto a nivel de expresión como de procedimiento.

Dificultades detectadas en las cuestiones sobre proporcionalidad

Tres de estas cuestiones se presentaron en forma de problemas. En ellas se manifestaron, de manera aislada o simultáneamente, falta de atención en las lecturas y falta de relación entre la realidad y las situaciones que plantean los problemas.

Los errores debidos a la falta de atención en la lectura fueron más frecuentes entre los alumnos de 3er. año. Por ejemplo, en la pregunta 1, confundieron "distancia" con "velocidad" en la 3, contestaron "número de niños" en lugar de su porcentaje o viceversa.

La falta de relación entre la realidad y las situaciones planteadas se manifestó en la cuestión 7, en respuestas tales como:

"*El largo del jardín en el plano es de 2800 m.*"
"*El largo del jardín en la realidad es 1/1400 cm.*"

La cuestión 3 fue la que dio origen a una mayor variedad de procedimientos equivocados. He aquí algunas respuestas bastante originales a la modalidad A (que resultó más difícil que la B).

Alumnos de 1er. año:
"25 − 12 = 13 *número de niños*
13 × 8 = 104
104 : 100 = 10.4% *porcentaje de niños*".

"*niñas* = 12; *niños* = 13 *Sí hay un porcentaje pues en el grupo hay tantos niños como niñas, sólo que hay uno de más*".

Alumnos de 3o.:
"25 − 12 = 13, *hay* 13 *niños*
Sea $f(x) = y$, *número de niños*

Total de alumnos
$f(25) = 13$ $f(25) = a$, $25 = 13$, $a = 13/25$
Para 100 *alumnos* $f(100) = 13/25 \times 100 = 52$"
"25 : 12 = 2.08
2.08 × 100 = 20%"

"*Son en total 37 alumnos, hay 25 niños*
37 × 25 : 100 = 92.5%"

$$\text{"}\frac{25 \times 12}{100} = \frac{300}{100} = 3\%\text{"}$$

En la cuestión 7, la modalidad A presentó mayor dificultad que la B (sobre todo para los alumnos de 1o. del LFM), lo cual se debe, probablemente, a que se practica más el problema tal como se plantea en la modalidad B, o a la dificultad que representa la división. En esta cuestión hubo muchos errores en el manejo de las unidades de longitud. Entre los alumnos de 3er. año fue más frecuente dejar el resultado sin especificar la unidad.

Tanto en esta pregunta como en la 3, el empleo inadecuado de las nuevas notaciones estudiadas en 3er. año, hizo que en algunas respuestas los errores parecieran más sofisticados. Por ejemplo:

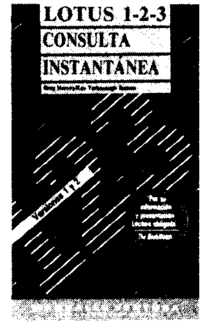
$$\text{"}f(7) = \frac{1}{200}$$

$$f(7) = 7 \times \frac{1}{200} = \frac{7}{200} = 0.035 \text{ km."}$$

Varios estudiantes de 1er año comprendieron y resolvieron bien el problema, pe-

VENTURA
EDICIONES, S.A. de C.V.

¡Lo más nuevo en micro-computación y uso de paquetes de software!

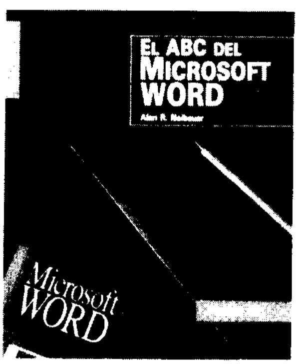


LOTUS 1-2-3 Consulta Instantánea
Manuales Ventura (SYBEX PROMPTER SERIES)
Greg Harvey/Kay Yarborough Nelson

Libro diseñado para usuarios de las versiones 1 y 2. Proporciona información inmediata sobre los comandos del Lotus, las secuencias de teclas y las funciones. Muy práctico y fácil de usar, le resolverá cualquier duda sobre el manejo del programa mientras trabaja con él.

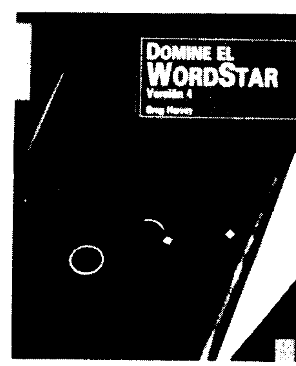
El ABC del MS-DOS
Alan R. Miller

Guía escrita en lenguaje claro y sencillo, destinada a principiantes o usuarios intermedios. Abarca todos los aspectos, desde cómo arrancar el programa hasta cómo adaptarlo a las nuevas aplicaciones que a diario surgen. Incluye las más variadas utilerías, lo mismo que sugerencias para evitar las trampas y cómo reparar los inesperados errores.



El ABC del Microsoft WORD
Alan R. Neibauer

Temas como la edición simple, el formateo, la integración, el ordenamiento, los macros y la administración de la hoja de estilo se explican en forma amena y sencilla en esta obra de la versión 4 del Microsoft WORD, destinada a principiantes para su uso en IBM PC y compatibles.



Domine el WordStar
Greg Harvey **Versión 4**

Adiestramiento práctico y referencia completa de la versión más difundida del WordStar, que abarca desde los fundamentos hasta las innovaciones más avanzadas. Los usuarios expertos encontrarán la explicación de nuevas funciones, ilustradas con ejemplos concretos. Abarca matemáticas, macros, impresoras láser y muchos otros temas.

El ABC del AutoCAD
Alan R. Miller

A los usuarios por primera vez de AutoCAD se da una introducción a CAD y luego a cómo dibujar utilizando los comandos del teclado y el mouse. Las formas, letras, dimensiones y capas se presentan en una explicación clara y detallada, paso por paso.

Pedidos a: Librería Británica, S.A., Serapio Rendón No. 125, Col. San Rafael.

CUPÓN DE SUSCRIPCIÓN

TÍTULO (Lic., M. en, Dr., etc.) NOMBRE(S)

PRIMER APELLIDO SEGUNDO APELLIDO

DIRECCIÓN (PARTICULAR)

COLONIA CÓDIGO POSTAL (O ZONA POSTAL) CIUDAD

ESTADO PAÍS TELÉFONO(S)

INSTITUCIÓN

DIRECCIÓN CÓDIGO POSTAL (O ZONA POSTAL) CIUDAD

ESTADO PAÍS TELÉFONO(S)

CARGO CURSO(S) No. ALUMNOS

FICHA PARA ENVÍO DE ARTÍCULO/NOTAS DE CLASE

NOMBRE ______________________________

DIRECCIÓN ______________________________

______________ CP. ______________

TEL. ______________

INSTITUCIÓN ______________________________

______________ CP. ______________

TEL. ______________

NOMBRE DEL ARTÍCULO ______________________________

NÚMERO DE CUARTILLAS ______________ NÚMERO DE FIGURAS ______________

SE ANEXA CURRICULUM BREVE ☐ SI ☐ NO

FAVOR HACER ENVÍO DE ARTÍCULOS AL APARTADO POSTAL 5-076
MÉXICO 06500, D.F.

La revista Educación Matemática le ofrece el medio y la oportunidad de presentar sus ideas, experiencia e investigación en la enseñanza de las matemáticas.

Estas pueden ser en forma de artículos completos o escritos mas concisos para la nueva sección que aparecerá a partir de Abril de 1990 como "Notas de Clase". También lo invitamos a presentar problemas interesantes y a participar en el Foro del Lector.

Envíe su material, junto con esta ficha cuanto antes ro escribieron igualdades falsas para expresar la relación entre las medidas sobre el plano y las medidas en la realidad.

Por ejemplo:

$1 \text{ cm} = 200 \text{ cm} \quad 2 \times 7 = 14 \quad 14 \text{ m} = 7 \text{ cm}$

$1 \text{ cm} = 2 \text{ m} \quad 1 \text{ cm} \times 7 = 7 \text{ cm}$

A la pregunta 9 correspondieron, en general, los porcentajes más altos de aciertos. Por otra parte, los errores cometidos en ella ponen de relieve algunas desventajas del manejo de series proporcionales para el estudio de la proporcionalidad. Por ejemplo:

En 1er. año los alumnos utilizaron el mismo operador para calcular los 2 números pedidos, como si pertenecieran a la misma serie

x	32	12	60
y	8	48	240

× 4

x	15	48	8
y	60	12	2

: 4

El error más frecuente entre los jóvenes de ambos niveles fue el de considerar las dos series como independientes y las completaron como si se tratara de dos progresiones geométricas.

:5 :5

x	2.4	12	60
y	8	48	288

×6 ×6

Los alumnos de 3er año cometieron una equivocación particular: hicieron intervenir operadores aditivos, ya fuera para relacionar los términos correspondientes en las dos series o al considerar cada serie independiente de la otra como si se tratara de completar progresiones aritméticas.

−48

x	−36	12	60
y	8	48	88

+40 +40

x	−28	12	60
y	8	48	96

+36

Dificultades ligadas al vocabulario

Tanto los alumnos de 1o. como los de 3o. tienen dificultad en interpretar y emplear el lenguaje en general y, en particular, el vocabulario matemático fundamental para el estudio de las funciones. Así, confunden "conjunto de llegada" y "conjunto de salida", "imagen" y "antecedente" (término que afortunadamente no es de uso común en México) "elemento" y "conjunto".

No fue fácil, en ocasiones, distinguir en las justificaciones cuándo hay confusión de vocabulario y cuándo son las nociones las que se confunden.

En la cuestión 4 la interpretación de la tabla no presentó problema, pero sí los *ítems* en que se emplean los términos "función" y "pareja ordenada". Los estudiantes no notaron la contradicción en sus respuestas a los dos primeros *ítems*.

En la cuestión 8 en la que se probó la comprensión de la expresión "...-seguida- de..." se hizo patente la confusión. Muchos alumnos consideraron que dicha expresión quería decir: "calcular primero la imagen de 1.2 por una de las funciones y después calcular la imagen del número 1.2 para la otra función".

En dicha pregunta se detectó también falta de atención en la lectura, ya que a pesar de que se precisa "calcular la imagen del número 1,2 por ..." (en Francia se usa coma en lugar de punto decimal) los alumnos lo consideraron como la pareja ordenada (1,2).

Otra de las fallas más frecuentes fue invertir el orden de las funciones. Dado que ésta se repitió más en la modalidad A, cabe suponer que se debió a un automatismo que llevó a los alumnos a seguir el orden en el cual las funciones se presentan en la cuestión, orden que conviene a la modalidad B pero no a la A.

El aumento del porcentaje de aciertos en 3o. fue muy pobre a pesar de que ellos habían estudiado ya la composición de transformaciones. Este nuevo estudio no hizo en muchos casos más que complicar las respuestas con el empleo erróneo de las notaciones, la utilización inútil e inadecuada de literales y la aplicación casi siempre equivocada, de los productos notables al cálculo de cuadrados. He aquí algunas respuestas de alumnos de 3o.

Modalidad A

"A o $C(x)$
$A(1, 2)^2 = (a + 5)(1.4) = 1.4a + 6.4$"

Modalidad B

"$x \rightarrow (1, 2)^2$
$x \rightarrow 1{,}24 \rightarrow 1{,}24 + 5$ *entonces* $a \rightarrow 5{,}24$"

En esta misma cuestión fue donde se detectó un mayor número de fallas de cálculo, inclusive en 3o. en donde el error del último ejemplo:

$1.24 + 5 = 5.24$ fue muy frecuente.

En la cuestión 2, igual que en las otras en donde se les pide justificar sus respuestas, se detectó la dificultad de muchos alumnos para emplear correctamente el vocabulario, así como una franca confusión del concepto de biyección con otros, principalmente función, intersección y producto cartesiano. He aquí algunos ejemplos de respuestas dadas por estudiantes de 1er. año:

"(*Sí*) *Porque se puede hacer.* $(e; 1)$; $(A, 2)$; $(B, 3)$".
"(*No*) *En E hay dos letras y en F tres cifras*".
"(*No*) *Para que un conjunto sea una biyección es necesario que cada número del conjunto de llegada tenga una imagen*".
"(*No*) *Porque no hay ningún elemento común en los dos conjuntos*".

Y las siguientes son respuestas dadas por alumnos de 3o.:

"(*Sí*) *El conjunto de salida tiene una y sólo una imagen en el de llegada*".
"(*Sí*) *Porque desde el momento en que hay dos conjuntos no vacíos se puede siempre definir una biyección*".
"(*Sí*) *Pues el elemento E puede tener cada antecedente en F y lo contrario*".
"(*No*) *Pues E no tiene elemento en común con F y F no tiene elemento en común con E*".

Un número considerable de alumnos no interpretaron, o no leyeron bien, la cuestión y respondieron "Sí" y a continuación dieron una definición correcta o incorrecta de lo que es una biyección. Esto no es absurdo pero sí contrario al uso en el lenguaje matemático.

Las dificultades en la expresión y las confusiones en los conceptos se deben quizá, al hecho de que en los textos franceses de 1er grado, que son en cierta forma un indicador de la enseñanza, se introducen de 15 a 20 términos nuevos en el estudio de las funciones. Además, en las definiciones se utilizan expresiones que posteriormente no se emplean en los ejercicios.

Dificultades en relación con la representación gráfica de las funciones

En la cuestión 5 se puso de manifiesto que, para los alumnos de ambos niveles, los esquemas de las biyecciones son más fáciles de reproducir que los de las funciones no biyectivas.

Varios estudiantes no dibujaron más que los esquemas de las biyecciones y de ellos, la mayoría las encuadraron, indicando así que, para ellos, son las únicas funciones posibles o bien consideran función y biyección como sinónimos. Hay que hacer notar, que si bien a nivel gráfico la biyección parece ser un concepto más simple que el de función, en cuanto a justificar que una relación dada es una función biyectiva (cuestión 12) es más fácil explicar que es una función, que justificar que es, además, una biyección.

Otros alumnos consideraron los esquemas de las biyecciones como funciones no biyectivas y dibujaron como esquemas de biyecciones cada una de las biyecciones recíprocas, o bien, dibujaron en el mismo esquema cada biyección y su recípro-

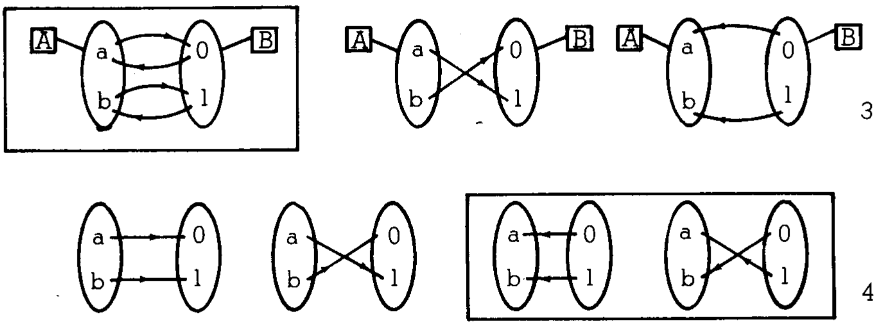


Figura 1

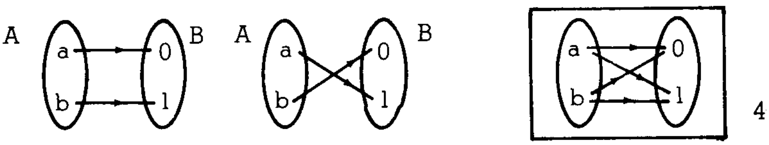


Figura 2

ca. En un número considerable de casos dibujaron como biyección el producto cartesiano A × B; esto fue más frecuente en 3er año.

En la Figura 1 están algunas respuestas de alumnos de 1er año que también se dieron en 3er año. (El número subrayado es la respuesta al *ítem* a).

En la versión del cuestionario para ser aplicado a alumnos de 3er año esta cuestión se modificó en la modalidad B en el sentido de sustituir el conjunto $A = \{a, b\}$ por $A = \{2, 3\}$, hecha con el fin de evitar confusiones debido a que no se aclara que $a \neq b$, esto hizo fracasar a varios alumnos por su afán de encontrar funciones de A hacia B que pudieran expresar numéricamente, no habiendo aún estudiado funciones lineales de la forma $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbf{R})$ no pudieron encontrar más que una.

En la Figura 2 están algunas respuestas de alumnos de 3o. a esta cuestión 5.

Varios alumnos dieron como único esquema el de $A \times B$, pero afirmaron que son 4 las funciones posibles. Cabe suponer que contaron las flechas del esquema $A \times B$.

La Figura 3 muestra un alumno que fue el único que encontró dos funciones y reconoció la primera como biyectiva. En cuanto a la segunda, el hecho de expresar $x \rightarrow \frac{x}{x}$ en lugar de $x \rightarrow 1$ confirma un hecho observado en otro cuestio-

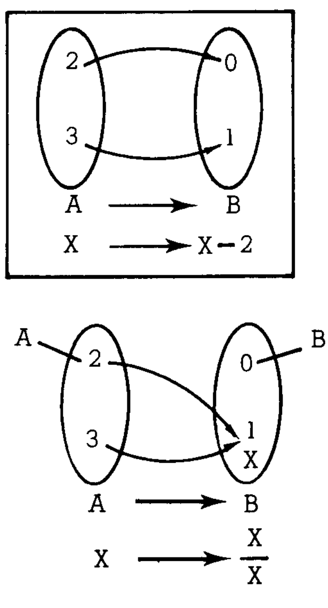


Figura 3

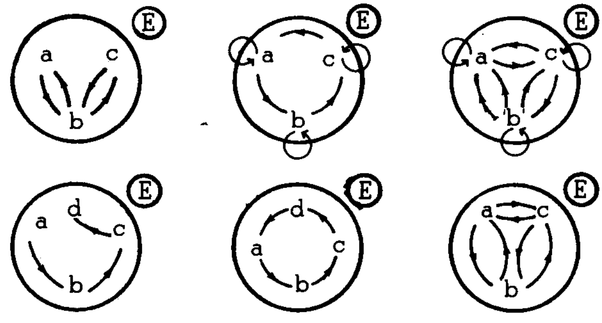


Figura 4

nario para alumnos de 3er. año: el rechazo para aceptar como funciones las constantes.

En la mayoría de las respuestas equivocadas en esta cuestión 5 se nota la influencia de la idea de reciprocidad, idea que está implicita en la noción de biyección y que los alumnos tienden a mezclar en los esquemas.

En la modalidad B de la cuestión 10 se manifestaron otras confusiones en la representación gráfica de una biyección.

Entre los alumnos de París, de ambos niveles, hay una diferencia considerable en el porcentaje de aciertos en las dos modalidades (Ver anexo 1). El tipo de errores fueron semejantes, a pesar del aumento en el porcentaje de aciertos.

En la Figura 4 están algunos ejemplos de respuestas de los dos grados.

En estos casos se nota la influencia del uso de estos diagramas en el estudio de las relaciones simétricas y de equivalencia. Por otra parte la falta de atención en la lectura de la cuestión, en la que claramente se señala el conjunto referencia $E = \{a, b, c\}$, se manifiesta en la introducción de un elemento "d" y a veces también "f".

En un análisis de los textos para 1o. se puede apreciar que las relaciones de un conjunto en él mismo se realiza casi exclusivamente dentro del estudio de las relaciones de equivalencia. No es pues extraño que cuando los alumnos ven representado un solo conjunto, piensen de inmediato que se trata de representar una relación simétrica o una relación de equivalencia.

Dificultades ligadas con la notación simbólica

Las cuestiones 6 y 11, que figuran entre las que tuvieron menos aciertos, son muy parecidas. Su finalidad es constatar si los alumnos saben calcular las imágenes de algunos números por una función sencilla definida de **Z** en **Z**, si saben determinar el antecedente de algunos números por esa función y si pueden explicar si tal función es o no biyectiva.

El cálculo de imágenes fue logrado por la mayoría de alumnos de 3o., pero no todos los de 1o. supieron interpretar la notación $f(x)$; algunos la consideraron como una multiplicación de x por f o de x por su imagen por la función f. Por otra parte, algunos alumnos de ambos grados interpretaron "$3x$" como "$3 + x$" y "$x - 5$" como "$-5x$".

En estas dos cuestiones el principal obstáculo lo presentaron los *ítems* sobre antecedentes, término que felizmente no empleamos en México y que confunden sobre todo con "imagen" y los alumnos de 1o. también con "opuesto" o con "antecesor", o con el idéntico.

He aquí algunos ejemplos de respuestas a los primeros *ítems* de la cuestión 6, dadas por alumnos de 1o.:

"$f(7) = 7f$ $\qquad f(-5) = -5f$
Si $f(x) = -12$, entonces $x = f - 12$"

"$f(7) = (7)(3x)$ $\qquad f(-5) = (-5)3x$
¿Cuál es el antecedente de 12 *por f?* $-12f$
¿Cuál es el antecedente de 5 *por f?* 4"

"$f(7) = +10$ $\qquad f(-5) = -2$".

Las siguientes son respuestas de 1o. a la cuestión 11:

"*Calcule:* $f(7) = -7F$ $\quad f(-3) = +3F$
Determine $y \in \mathbb{Z}$ *tal que* $f(y) = -5; y = 5$

¿Cuál es el antecedente de 4 *por f?* -4"

Calcule: $f(7) = (-35)$ $\quad f(-3) = (+15)$
Determine $y \in \mathbb{Z}$ tal que $f(y) = -5$
$y = (+1)$".

Varios alumnos de 3o. contestaron en la cuestión 6

"$f(7) = 10x$ $\quad f(-5) = -2x$".
o bien "$f(7) = 21x$ $\quad f(-5) = -15x$".

El *ítem* d) de la cuestión 6 fue previsto como un contraejemplo para guiar a los alumnos en los dos siguientes *ítems*. Sin embargo resultó una trampa, sobre todo para los de 3o. que al contestar bien el *ítem* c) mostraron saber qué es el antecedente de un número por una función dada, pero contestaron de manera automática que el antecedente de 5 por *f* es 1.66 o 2/3. (Esta última respuesta fue dada por los alumnos de 3o. ya que los de 1o. aun no han estudiado racionales).

Los que respondieron de esta manera no se fijaron que *f* está definida de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ o bien no conocen el significado de esta notación.

El aumento de respuestas falsas a este *ítem* en los alumnos de 3o. pude deberse al automatismo, ya que es posible que los de 1o. hayan dudado ante la división $5 \div 3$ que los desconcierta por no tener cociente exacto y que hayan vuelto a leer la cuestión. (Varios cuestionarios de 1o. tienen tachada la respuesta y agregado "*imposible*" o "*no hay antecedente*"). Pero los alumnos de 3o. como ya habían estudiado los racionales no tuvieron esa limitación.

Dificultades para comprender las relaciones de un conjunto con él mismo

La cuestión 12 mostró que los estudiantes de ambos grados (sobre todo los de 3o. de las escuelas parisinas) no comprenden bien las relaciones de un conjunto en sí mismo; ni a través de su esquema cartesiano y menos aún a través de su grafo. Reveló también un mal empleo del vocabulario y un desconocimiento de la inclusión de las biyecciones dentro de las funciones. Por otra parte, interpretaron la letra R que indicaba la relación, ya sea como el conjunto de salida o como el conjunto de llegada y mostraron así su necesidad de tener dos conjuntos para poder establecer una relación.

He aquí algunos ejemplos de respuestas de alumnos de 1o. a la modalidad A de la cuestión 12:

"*¿R es una aplicación? No*
¿Por qué? Porque no hay los dos conjuntos
¿R Es una biyección? Sí
¿Por qué? Porque todos los números son pares y no hay dos relaciones por número".

"*¿R es una función? Sí*
¿Por qué? Pues (1, 2) *se encuentra en G:* (3, 4) *también y* (4, 5) *también.*

"*¿R es una biyección? Sí*
¿Por qué? Pues estos números se repiten en el conjunto G y E es una biyección de $E \rightarrow G$".

Y respuestas de alumnos de 3o. a esa misma cuestión.

"*¿R es una función? No*
¿Por qué? Pues cada pareja de G tiene varias imágenes en E.

"*¿R es una biyección? Sí*
¿Por qué? Pues cada elemento de G no tiene más que un solo antecedente en G".

"*¿R es una función? Sí*
¿Por qué? Pues cada elemento de salida tienen un elemento en el conjunto E.

"*¿R es una biyección? No*
¿Por qué? Pues ciertos elementos del conjunto E tienen varios a antecedentes en el conjunto G (Ex. 1 *tiene por antecedente* (1, 2) *y* (5,1).

Las siguientes son respuestas de un alumno de 1o. y de otro de 3o. de la modalidad B:

"¿R es una función? Sí
¿Por qué? Todos los elementos de R tienen elementos de E.

"¿R es una biyección? Sí
¿Por qué? Pues todos los elementos de E tienen una relación.

"¿R es una función? No
¿Por qué? Pues 5 no tiene antecedente.

"¿R es una biyección? Sí
¿Por qué? Pues cada número tiene una imagen.

Conclusiones

1. No es fácil evaluar el aprendizaje de la noción de función en forma aislada, ya que la falta de dominio en el cálculo aritmético o en el manejo del lenguaje algebraico intervienen en forma definitiva en la resolución de las cuestiones.
2. Los alumnos de 3o. muestran progresos respecto a los alumnos de 1o. en algunos aspectos, en otros, más bien manifiestan regresiones. La falta de atención en la lectura y el automatismo no son privilegio de los alumnos de 1o. Por otra parte, la "adquisición" de nuevos conocimientos de matemáticas produjo en las respuestas de algunos alumnos una especie de sofisticación de los errores.
3. Los errores detectados en el cuestionario ponen de relieve que la enseñanza de las funciones no es tarea sencilla. Es por lo tanto inconveniente presentar la noción de biyección en forma casi inmediata, sea antes o después de la función, ya que las dificultades en su aprendizaje se aumentan considerablemente.
4. Las dificultades derivadas de la notación simbólica, del vocabulario y de las representaciones gráficas, aspectos todos de los que no se puede prescindir en el estudio de las funciones, obligan al maestro y a los autores de texto a tener mucho cuidado con su dosificación para no llevar a los alumnos a las confusiones que acabamos de señalar.

ANEXO 1
CUESTIONARIO A

1. El cuadro siguiente muestra los consumos de gasolina de un coche:

Número de Km recorridos	110	80	240
Número de litros consumidos	11	10	21

¿Esta tabla está formada por dos series proporcionales? ________
Justifique su respuesta.

____

____

2. Se tienen dos conjuntos $E = \{a, b\}$ y $F = \{1, 2, 3\}$.
¿Se puede definir una biyección de E hacia F? ________
Justifique su respuesta.

____

____

3. En un grupo de 25 alumnos hay 12 niñas. ¿Qué tanto por ciento hay de niños respecto al conjunto de alumnos del grupo?

____

____

4. Este principio de tabla nos muestra la relación S llamada "suma", entre cada par ordenado de naturales y su suma. Por ejemplo $S(2; 3) = 5$. ¿A todo par ordenado de naturales se puede asociar un solo natural por la relación S?

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	6
3	3	4	5	6	7
4	4	5	6	7	8

¿S es una función? ______
Complete: $S(2;\ 4)$ = ______
$S(3;\ 3)$ = ______
¿Cada natural tiene como antecedente por S *un par ordenado único?*

______

5. Se consideran los conjuntos
$A = \{a, b\}$ $B = \{0, 1\}$
¿Cuántas funciones diferentes de A hacia B se pueden encontrar?
Haga un esquema para cada una de ellas.
Encuadre las que son biyecciones.
6. f es la función de **Z** en **Z** tal que
$x \to 3x$.
Complete: $f(7)$ = ___ $f(-5)$ = ___
Si $f(x) = -12$, entonces x = ___
¿Cuál es el antecedente de 5 por f?
¿f es una biyección? ______
¿Por qué? ______
7. En el plano de una casa la escala es $\frac{1}{200}$. Si el largo del jardín en la realidad es de 14 m, ¿cuál es el largo del jardín en el plano?______
8. He aquí dos funciones de **D** en **D**
C: *"elevar al cuadrado"*   A: *"agregar 5"*
$x \to x^2$ $a \to a + 5$
¿Cuál es la imagen del número 1, 2 por la función A -seguida- de-C?___
9. Complete las listas adjuntas sabiendo que son series proporcionales.
10. En el conjunto $E = \{a, b, c\}$ se considera una biyección f tal que
$f(a) = b$ y $f(b) = c$
Complete: $f(c)$ = ______
11. f es una función de **Z** en **Z**
f: **Z** → **Z**
$x \to x - 5$
Calcule: $f(7)$ = ______
$f(-3)$ = ______
Determine $y \in$ **Z** tal que $f(y) = -5$
y = ______
¿Cuál es el antecedente de 4 por f?
¿f es una biyección?______
¿Por qué? ______
12. $G = \{(1;\ 2);\ (2;\ 3);\ (3;\ 4);\ (4;\ 5);\ (5;\ 1)\}$ es el grafo de una relación R en el conjunto $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
¿R es una función?______
¿Por qué? ______
¿R es una biyección?______
¿Por qué? ______

ANEXO 2
CUESTIONARIO B

1. Un coche al recorrer 110 km consume 11 litros de gasolina; después recorre 80 km gastando 10 litros. ¿El número de kilómetros recorridos es proporcional al número de litros de gasolina consumida?______
Justifique su respuesta.

______

______

2. Se tienen dos conjuntos, $E = \{a, b\}$ y $F = \{1, 2, 3\}$. ¿Se puede definir una biyección de E hacia F?______
Justifique su respuesta.

______

______

3. En un grupo de 25 alumnos hay 48% de niñas. ¿Cuántos niños hay?____
4. Este principio de tabla nos muestra la relación S llamada "suma", entre cada par ordenado de naturales y su suma. Por ejemplo $S(2;\ 3) = 5$. ¿A todo par ordenado de naturales se puede asociar un solo natural por la relación S?______

↱	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	6
3	3	4	5	6	7
4	4	5	6	7	8

¿S es una función? ______

Complete: $S(2; 4) =$ __________
$S(3; 3) =$ __________
¿Cada entero natural tiene como antecedente por S *un par ordenado único?*

____

5. Se consideran los conjuntos
$A = \{2, 3\}$ y $B = \{0, 1\}$
¿Cuántas funciones diferentes de A hacia B se pueden encontrar?
Haga un esquema para cada una de ellas.
Encuadre las que sean biyecciones.

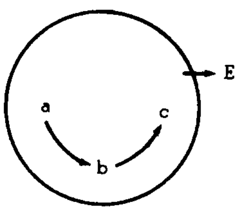
6. f es la función de **Z** en **Z** tal que $x \to 3x$.
Complete: $f(7) =$ ___ $f(-5) =$ ___
Si $f(x) = -12$, entonces $x =$ ___
¿Cuál es el antecedente de 5 por f?
¿f es una biyección? __________
¿Por qué? __________

7. En el plano de una casa, la escala es $\frac{1}{200}$. En el plano, el largo del jardín es de 7 cm. ¿Cuál es el largo del jardín en la realidad?__________

8. He aquí dos funciones de **D** en **D**
C: *"elevar al cuadrado"* A: *"agregar 5"*
$x \to x^2$ $a \to a + 5$
¿Cuál es la imagen del número 1, 2 por la función C -seguida- de-A?__

9. Complete las listas adjuntas sabiendo que son series proporcionales.

10. Esta es la representación incompleta de una biyección f en el conjunto $E = \{a, b, c\}$ complétala.



11. f es una función de **Z** en **Z**.
$f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$
Calcule $f(7) =$ ___ $ff(-3) =$ ___
Determine $y \in \mathbf{Z}$ tal que $f(y) = -5$;
$y =$ __________

¿Cuál es el antecedente de 4 por f?
¿f es una biyección?__________
¿Por qué? __________

12. Este es el esquema cartesiano de una relación R en el conjunto
E: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

5					
4					
3					
2					
1					
	1	2	3	4	5

¿R es una función? __________
¿Por qué __________
¿R es una biyección? __________
¿Por qué? __________

____

ANEXO 3
CUESTIONARIO PARA PRIMERO

Porcientos de aciertos a cada cuestión obtenido por los alumnos de 1o. y de 3o.

			PARÍS A		MÉXICO A		PARÍS B		MÉXICO B	
Temas	*C*	*Asuntos*	*1°*	*3°*	*1°*	*3°*	*1°*	*3°*	*1°*	*3°*
Proporcionalidad	1	Reconocer si dos series de números son proporcionales	28	40	34	75	33	51	41	64
	3	Problema de porcentaje	28	49	34	52	31	54	41	66
	7	Problema de escalas	32	47	13	45	46	58	62	56
	9	Completar dos series de números proporcionales	60	68	44	87	49	64	55	82
Funciones	4	Suma de dos naturales	28	48	24	60	23	45	37	61
	8	"A-seguida-de-C" y "C-seguida-de-A"	18	23	17	20	22	39	27	30
Biyecciones	2	¿Se puede definir una biyección de un conjunto de dos elementos hacia otro de tres?	43	34	27	45	43	39	34	53
	6	$Z \to Z$ $x \to 3x$ ¿Biyección?	5	7	0	17	6	8	3	20
	10	Encontrar $f(c)$ sabiendo que es una biyección en E	52	61	62	75	18	39	58	61
	11	$Z \to Z$ $x \to x - 5$ ¿Biyección?	2	14	6	20	11	16	0	41
Funciones y	5	Representar todas las funciones de A hacia B. Reconocer las que son biyecciones.	13	8	6	60	6	4	10	58
Biyecciones	12	La relación R definida por su grafo o por su esquema cartesiano ¿función? ¿biyección?	16	9	10	45	17	17	17	56