

La factorización de polinomios en un ambiente CAS y lápiz/papel

María Fernanda Mejía Palomino
Estudiante de la Maestría en Educación
Con énfasis en Educación Matemática
Universidad del Valle
Docente Escuela Normal Superior Farallones de Cali
maferme@univalle.edu.co
mafanda1216@yahoo.com.ar

Resumen

Se presentan algunas reflexiones desde la **TAD** (Teoría Antropológica de lo Didáctico) en torno la integración de las Calculadoras Graficadoras Algebraicas en el estudio de la factorización de polinomios reales de una variable en un ambiente **CAS** (Sistema de álgebra computacional) y **L/P** (Lápiz/Papel) producto del desarrollo de un proyecto de Investigación de maestría.. Una de las hipótesis a presentarse se centra en la dialéctica entre las técnicas habituales e instrumentales, necesarias en las actividades matemáticas y en las relaciones con las tareas y la teoría.

Palabras claves: Técnicas instrumentadas, técnicas habituales, factorización de polinomios, calculadoras simbólicas, ambientes CAS y L/P.

Reflexiones de algunas prácticas de enseñanza habituales de la factorización de polinomios

Al revisar los lineamientos y estándares curriculares vigentes, expedidos por el MEN, la factorización de polinomios es considerada como una manera de construir expresiones algebraicas o generar expresiones equivalentes dentro de contextos de variación y cambio. En la mayoría de los textos escolares, la factorización de expresiones polinómicas es uno de los contenidos a enseñar, particularmente para grado octavo de la educación básica secundaria en Colombia.

Generalmente la enseñanza de la factorización en ambientes L/P, requiere de reglas que clasifican los polinomios y necesitan de su manejo sintáctico, que suele ser extraña y de difícil adquisición para la mayoría de los estudiantes. En algunos casos, las reglas se construyen a partir de la manipulación de rectángulos en cartulina, vinculando a tres sistemas de representación, el de las figuras geométricas, el lenguaje natural y las expresiones algebraicas, pero en otros casos, se trabajan con las expresiones algebraicas olvidando otras representaciones y conexiones con otros conceptos y procedimientos, promoviéndose la enseñanza de un álgebra como un conjunto atomizado de conocimientos (Gascón, 1999 p. 84).

Para mirar un poco más a fondo las características de las manipulaciones algebraicas de los estudiantes en los ambientes Lápiz/Papel, se han reportado algunos errores en los trabajos de Sánchez (1997, p. 5), Socas y et. al. (1997, p. 21) y Camacho y et. al. (1996, p. 104) como el inadecuado uso del igual, las falsas generalizaciones, la extensión de propiedades y la tendencia de una enseñanza centrada en algunos



ejemplos típicos, con pocas representaciones semióticas y técnicas específicas. Lo anterior muestra el costo de aprendizaje de los algoritmos de Lápiz/Papel para factorizar expresiones algebraicas y su escasa significación para los estudiantes.

La factorización de polinomios en ambientes cas

Dentro de otros ambientes, como los generados por los Sistemas de Algebra Computacional (CAS), la factorización de polinomios tiene un tratamiento diferente. Estos sistemas dan la factorización de cualquier expresión algebraica, ejecutando uno de sus comandos al ingresar la expresión, ya sea en los racionales, reales o complejos (Ver figura 1). Para ingresar la expresión algebraica es necesario que el estudiante conozca la sintaxis de entrada, que en ocasiones es diferente a la escritura a Lápiz/Papel, por ejemplo para escribir la expresión $x^2 + 2x + 4$, el exponente no se ingresa como superíndice, se necesita de anteponer al número 2 el símbolo ^, es decir la expresión se escribe como $x^2 + 2x + 4$. Sin embargo, la expresión una vez ingresa al sistema se observa de manera similar que en Lápiz/Papel (ver figura 2). Este suceso se conoce como el fenómeno de Pseudo-transparencia, conflicto que se genera con lo que se ingresa y se ve en la pantalla del computador (Artigue, 1997). Este fenómeno está ligado a los procesos de transposición computacional, entendiéndose como las transformaciones que sufre un objeto matemático debido a las decisiones que son tomadas al diseñar un software, tales como la selección de una representación y un conocimiento estructurado o de los algoritmos a aplicar (Balacheff y Kaput, 1996).

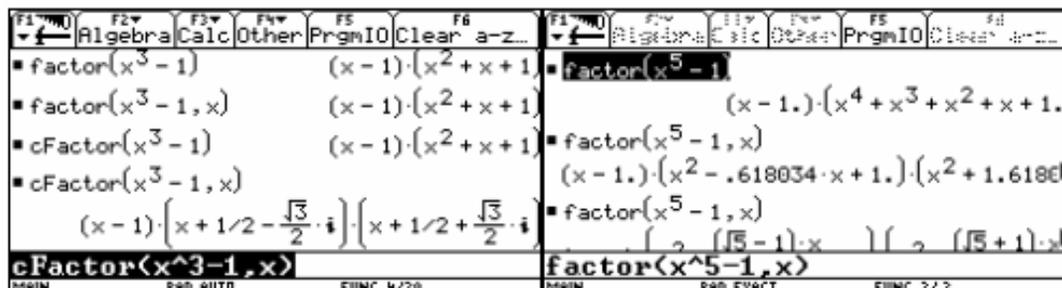


Figura 1. Diferentes factorizaciones de polinomios en una TI-92

Algunos CAS hacen parte de las aplicaciones de las Calculadoras Simbólicas o Calculadoras Graficadoras Algebraicas, cuya característica principal es la portabilidad y la posibilidad de conexión de diversas aplicaciones, permitiendo trabajar con diversas representaciones como lo numérico y lo gráfico.

Al igual que con la aparición de las calculadoras aritméticas, el uso de las Calculadoras simbólicas se considera un riesgo en los grados de escolaridad en donde los estudiantes están aprendiendo a realizar las manipulaciones algebraicas (Ralston, 1999 y Trouche, 2002, p. 21). Algunos creen que el uso de los CAS llevará al desuso de las técnicas¹ de Lápiz/Papel e inclusive se afirma que algunos contenidos

matemáticos encasillados a procesos de difícil aprendizaje como la factorización de polinomios tenderá a su extinción en los currículos de matemáticas, esta concepción ha sido reportado por Demana y Waits (2000 a).

¹ Dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), las técnicas son consideradas como los diferentes modos de hacer o resolver un problema o tarea.

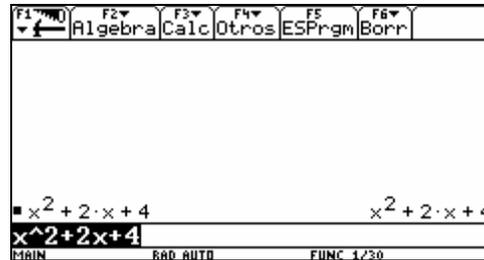


Figura 2. Ejemplo del fenómeno de pseudo-transparencia

Sin embargo, las investigaciones recientes muestran diferentes posibilidades para el aprendizaje de la factorización de polinomios en ambientes que integran **CAS** y Lápiz/Papel (**LP**) (Kieran, 2005 y Lagrange, 2000). Aunque ambos ambientes parecen de difícil combinación, se ha considerado que este es un campo propicio para la integración de las Tecnologías de la Información y Comunicación (**TIC**), problemática poco investigada².

La factorización de polinomios en ambientes cas y l/p

Algunos investigadores como Waits y Demana (2000 b) y Peschek (2005) afirman que no es necesario enseñar los métodos tradicionales del álgebra simbólica (métodos manuales de lápiz y papel) porque los **CAS** permiten la manipulación algebraica más rápida y con mayor exactitud de lo que era posible con los métodos "tradicionales" que eran los únicos existentes, generándose posibilidades para el estudio de la teoría subyacente, como el teorema fundamental del álgebra (p. 197). En concordancia a lo anterior, Vizmanos (2000, p. 191) afirma que en un futuro el interés girará en torno a las estructuras conceptuales del álgebra como medio de representación y de los métodos algebraicos como la resolución de problemas. Por lo que una de las tareas será el planteamiento de ecuaciones que se deducen de la lectura de enunciados diversos aplicados a contextos cercanos e interesantes a los estudiantes (Ibíd., p. 192).

Sin embargo, la investigación realizada por Lagrange (2000, p. 17) reporta que generalmente los estudiantes perciben los **CAS** como herramientas para efectuar cálculos penosos y comprobar los resultados conseguidos. Pocos estudiantes ven los **CAS** como herramientas de comprensión, de aprendizaje, que es el objetivo propuesto por los profesores y una fracción importante de estudiantes consideran que los **CAS** complican notablemente su trabajo matemático, en la puesta en obra del software, a menudo no anticipadas por el profesor. Por otra parte los profesores ven que los **CAS** no suprimen las dificultades calculatorias que ellos esperaban, siendo difícilmente administrados en las actividades de experimentación. Estos resultados son indicios de la poca integración de los **CAS** en las prácticas de enseñanzas.

Usualmente, la mayoría de los artículos relacionados con el uso de **CAS** muestran las potencialidades de su uso (Artigue y otros, 2003). Dejando de lado los problemas y restricciones que generan los ambientes **CAS** y que son necesarios prever para una integración adecuada en el diseño de situaciones de aula. Algunos fenómenos didácticos, pueden generar un contexto enriquecedor para el aprendizaje

² En el artículo de Artigue y otros (2003) se muestra que el 5% de las publicaciones respecto al uso de CAS en la educación matemática se interesa en la integración del CAS y lápiz y papel.



de la factorización de polinomios, como en el caso del fenómeno de doble referencia ligado al proceso de transposición computacional, expuesto en las actividades elaboradas por Mounier y Aldon (1996) en la factorización de expresiones de la forma $x^n - 1$ y reportadas por Kieran (2005) como un ejemplo que ratifica la necesidad de interpretar las respuestas dadas por un **CAS** en ambientes de **LP**.

El desarrollo de las situaciones determinó que las expresiones arrojadas por la calculadora no coincidían con la expresión general de estos polinomios bajo las técnicas de Lápiz/Papel. Esto hace que los estudiantes vean la necesidad de reconciliar los resultados de Lápiz/Papel y **CAS**. Conllevando a conjeturar y probar una regla para factorizar. De esa manera, el uso de **CAS** en las tareas generó la necesidad de entender ciertos aspectos relacionados con la factorización, promoviendo los conocimientos y habilidades operativas y otros procesos como la argumentación, la obtención de reglas de manipulación de expresiones algebraicas y la comunicación. Lo novedoso de las situaciones es que hacen uso de otras funcionalidades de las Calculadoras Simbólicas con relación a las manipulaciones algebraicas. En las investigaciones reportadas por Kieran (2003) las actividades transformacionales como la factorización poco utilizan las **TIC** y sólo en algunos casos se presenta el uso de los aplicativos de graficación de funciones; por lo que las tareas³ de factorización con el uso de HOME de una calculadora TI-92 son una alternativa diferente para el desarrollo de las actividades transformacionales y el uso de **CAS**.

Es importante rescatar que las posibilidades de tratamiento y conversión de representaciones es mucho más rápida con el uso de Calculadoras Simbólicas que con **LP**. Lagrange (2000) menciona que con el uso de las **TIC** se generan unas nuevas técnicas, que denomina como novedosas o instrumentales, que son inmediatas y de menos tiempo que las técnicas habituales (en ambientes **LP**). Por lo cual es necesario aprovechar el sentido y los alcances de estas actividades en el álgebra escolar.

Por otra parte, al considerarse innecesario los conocimientos y habilidades operativas se incurre en un peligro para usar **CAS**, porque el estudiante no está en condiciones para interpretar los resultados que este arroja. Por lo que las técnicas habituales de lápiz y papel no desaparecen de la actividad de los estudiantes, porque pueden ser un soporte para una reflexión teórica sobre los objetos que manipulan. Esto crea las oportunidades para el desarrollo de nuevas praxeologías⁴ (Ibíd., p.27).

La conceptualización y las técnicas en ambientes cas y l/p

La acción experimental no es en ella misma suficiente para lograr progresos en la estructuración de los conocimientos es necesario estudiar el rol de las técnicas al acompañar las tareas- la articulación fundamental para la enseñanza, entre la acción y la conceptualización.

Es tradicional ocultar en la reflexión de la enseñanza de las matemáticas la importancia de las técnicas y su rol en la conceptualización (Lagrange, 2002, p. 153).

Al integrar las calculadoras y los **CAS** se requiere de un análisis más fino y notable en una reflexión para las técnicas que, no son simples habilidades, sino que están ligadas a diferentes representaciones de objetos matemáticos y que juega en si un rol en la conceptualización. Es de interés mirar en las herramientas novedosas los cambios en la actividad matemática cotidiana de los alumnos, desde la utilización de las técnicas más inmediatas como "presionar botón" (Ibíd. p. 155). Las técnicas del tipo "presionar botón" tiende a imponerse por ser simples y eficaces.

³ En la **TAD** corresponde a lo que hay que hacer o resolver, como una situación problema.

⁴ Las praxeologías en la **TAD** se les considera como toda obra humana que surge como respuesta a un conjunto de *cuestiones* y como un medio para llevar a cabo, en el seno de cierta *institución*, determinadas *tareas problemáticas* (Gascón, 1998, p. 11).

Sin embargo los estudiantes tienden a asociar un concepto a su comando correspondiente. Este efecto negativo para la conceptualización puede ser evitado si los estudiantes se reencuentran cotidianamente con situaciones que utilizan otras técnicas de la calculadora asociadas a otras representaciones (Ibíd., p. 156).

Para retardar la utilización de las técnicas “presionar botón”, más no del tratamiento simbólico, se pueden cambiar las situaciones para que los estudiantes las puedan revestir de conocimiento “enactivos”. Este tipo de relación del conocimiento se sitúa en un nivel del conocimiento cotidiano o de construcción anterior, en donde el estudiante lo hace funcionalmente “en acto” como un saber de análisis, que determina sus modos de expresión y razonamiento (Ibíd., p. 157 y 158).

En comparación con las técnicas Lápiz/Papel (L/P) que comportan varios gestos de los cuales cada uno necesita al menos en el período que precede la rutinización al menos de una acción concerniente, las técnicas de una calculadora TI 92 efectúa en un solo comando una reducción completa de estas. Por lo que la conceptualización y la manera de cuales estos podrían tomar no serán las mismas en los dos ambientes (p. 164). Sin embargo las interacciones de las técnicas novedosas (en CAS) y las habituales (en L/P) muestran las ricas potencialidades de las praxeologías que permite las herramientas informáticas. Las funciones de las diferentes técnicas de ambos ambientes y de las situaciones bien construidas pueden ayudar a la emergencia de las comprensiones novedosas (p. 170).

Un CAS muestra que las habilidades manipulatorias, que son técnicas rutinizadas, tiene un mayor lugar en un ambiente de Lápiz/Papel, por lo que se determina que las TIC permite pasar a una enseñanza directamente conceptual. Por lo que se considera que hay una restauración del valor epistémico de las técnicas (p. 165). Generalmente las técnicas parecen abordar un hecho pragmático, como hacer para cumplir con una tarea mientras que la función epistémica se desarrolla cuando los elementos que son manipulados se constituyen en objetos de un ambiente teórico (p. 166).

En cuanto al trabajo del profesor las nuevas técnicas que devienen del uso de los CAS hacen que profundice su enseñanza en función de las nuevas técnicas que dispone. Por otra parte la emergencia de una nueva técnica provoca la necesidad de interpretarla, justificarla y relacionarla con las técnicas ya existentes. En particular con la emergencia de una nueva técnica surge la necesidad de analizar su alcance (el tipo de problemas a los que se puede aplicar) y sus limitaciones (los subtipos de problemas que plantean dificultades a la utilización de la técnica) (Chevallard y otros, 2000, p. 280). De lo anteriores reflexiones y planteamientos surgen algunas preguntas: ¿Cómo son las condiciones que permiten la integración de los CAS en las prácticas de enseñanza de la factorización de polinomios? ¿Cuáles son las tareas y las técnicas que se desarrollan en una ambiente LP y CAS?

Bibliografía

ARTIGUE, M. (1997) Le logiciel ‘Derive’ comme revelateur de phenomenes didactiques lies a l’utilisation d’environnements informatiques pour l’apprentissage. En: Educational Studies in Mathematics, Vol. 33, No 2, pp. 133-169.

ARTIGUE, M. (2002 a). L’intergracion de calculatrices symboliques à l’enseignement secondaire : les leçons de quelques ingénieries didactiques. En : Calculatrices Symboliques transformer du travail informatique : un problème didactique. Grenoble : La Pensée Sauvage, éditions. pp. 277- 349.

ARTIGUE, M.; LABORDE, C; L, LAGRANGE Y TROUCHE, L. (2003) Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. En: Second International Handbook of Mathematics Education, Gran Bretaña: Editorial: Kluwer Academic Publishers. Gran Bretaña. pp. 239–271.



BALACHEFF, N., KAPUT, J. (1996) Computer-Based learning environments mathematics. Citado por Garzón, D. (2006) En: International Handbook of Mathematics Education. VA. Kluwer Academic Publisher. pp. 469-505.

CAMACHO, M.; SOCAS, M. PALAREA, M. y HERNÁNDEZ, J. (1996) Iniciación al álgebra. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial síntesis. p. 104

DEMANA, F. y WAITS, B. (2000 a) El Papel de la Computadora Portátil El Álgebra Simbólica en la Educación Matemática en el Siglo XXI: ¡Un llamado para

DEMANA, F. y WAITS, B. (2000 b) Computadores: en el salón de clase: una mirada hacia al futuro. En: Papel de las calculadoras en el salón de clase. Bogotá: Una empresa Docente. pp. 195-201

GASCÓN, J. (1998). Evolución didáctica de las matemáticas como disciplina científica. En: Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 18/1, nº 52, pp. 7-33.

KIERAN C. (2005) Interpreting and assessing the answers given by the CAS expert: a reaction paper. En: CAME. Virginia. E.U.A. Disponible en Internet: <http://www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4>

LAGRANGE, J. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. En: Educational Studies in Mathematics Vol. 43 No 1, pp. 1-30.

LAGRANGE J. (2002) Les outils informatiques entre "sciences mathématiques" et enseignement. Une difficile transposition? En: Calculatrices Symboliques transformer du travail informatique : un problème didactique. Grenoble : La Pensée Sauvage, éditions. pp.89-116.

MOUNIER, G. Y ALDON, G. "Un problem story: factorizations de $x^n - 1$ ". Citado por Lagrange (2000). En: International Derive Journal Vol. 3 No 3. pp. 51-61.

PALAREA, Mercedes y SOCAS, Martín. (1997) Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. En: Revista Uno. Lenguajes algebraicos. Nº 14. Octubre. p. 21 PESCHEK. W. (2005) The impact of CAS on our understanding of mathematics education. En CAME. Virginia. E.U.A Disponible en Internet: <http://www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4>

RALSTON, A. (1999). Por la Abolición de las Matemáticas de Lápiz y Papel. Disponible en Internet: <<http://tetis.d5.ud.es/edumat/abolición.html>>.

SÁNCHEZ, E. (1997). El graficador como apoyo a la comprensión conceptos algebraicos. Documento no publicado México: CINVESTAV-IPN.

TROUCHE, L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. En: Calculatrices Symboliques transformer du travail informatique : un problème didactique. Grenoble : La Pensée Sauvage, éditions. pp. 187-214.

VIZMANOS, J. (2000) ¿Desaparecerá el álgebra elemental con la utilización de las nuevas calculadoras gráficas? En: En: Papel de las calculadoras en el salón de clase. Bogotá: Una empresa Docente. Pp. 185 - 192.
