ARTICULOS

El porqué de la inducción

"Muchos pocos hacen mucho
Chaucer

Sabemos que existe una "terrible" problemática al tratar de comunicar nuestras ideas, ya sea por falta de información o por un exceso de la misma (tratamos de ser optimistas).

Por lo que a nosotros respecta concentraremos nuestra atención en una rama del conocimiento científico: LA MATEMÁTICA.

Generalmente (en áreas como ingeniería, química, biología, psicología, etc.) al presentar las ideas fundamentales de la matemática se omite la profundidad de algunos conceptos por considerarse irrelevantes para el "nivel académico". Por otra parte existe una marcada tendencia a menospreciar la teoría (pretendiendo ser prácticos) aludiendo que tales personajes en preparación no "necesitarán en el futuro" de un vasto y sólido campo de conocimientos.

Nuestro interés se centra en un tema particular de la matemática: LA INDUCCIÓN.

Creemos que es conveniente mencionar algunos aspectos relevantes de los conceptos "práctico-mecánico" en el trabajo de todo estudiante del área de ciencias (ingeniería, matemáticas, física, etc.) antes de abordar nuestro tema a tratar.

Comúnmente al iniciar un tema se presentan algunas definiciones que entretejen o forman el desarrollo de la teoría en cuestión, desgraciadamente no se enfatiza en la importancia de la formalidad de los conceptos que ellas involucran, quedando relegadas como ideas confusas, poco accesibles y carentes de toda "aplicación".

No tratamos de decir con esto que la mecanización sea dañina, lo que sí lo es, es la forma como llega al estudiante. Si después de que éste ha asimilado el concepto en abstracto (y con esto nos referimos a que no memorice una definición, axioma o teorema, sino que lo haya captado a fondo, que todos aquellos casos que aparentemente no menciona los descubra, que todas sus excepciones que tampoco se encuentran en forma explícita, las evite), mecaniza, no existe ningún problema, pues posee ya las herramientas necesarias para ser creativo y diseñar por su cuenta, de otra forma aunque parezca exagerado un simple cambio de unidad o una variable diferente de lo usual le acarreará situaciones desesperadas. Más aún, si sólo mecanizó, ¡¡jamás! podrá comparar (hacer analogías) diferentes ramas del conocimiento para aplicarlas a la solución de un problema y notemos que esto "es muy práctico".

Ser práctico (bajo nuestro peculiar punto de vista) no sólo significa resolver problemas o recopilar una serie de datos (sistemáticamente). Significa aplicar la teoría, pero ¿cómo aplicarla si se desconoce? Tal vez se hayan resuelto muchos problemas, pero ¿no eran casos particulares de la teoría?, ¿qué hacer cuando no se satisfacen todas las hipótesis para aplicar la mecanización?, ¿cambiamos el problema o extendemos la teoría?, ¿cómo extender una teoría si se desconocen sus cimientos? y ¿cómo conocer sus cimientos si se desecha la idea formal?...

Como es de todos conocido, la génesis del concepto de inducción se manifiesta

Javier Siller Leyva
Silvia Gómez de Siller
Universidad Autónoma de Baja California

a partir de la idea de conjunto inductivo quedando plasmada en el desarrollo de una clase especial: los naturales, lo cual nos sugiere iniciar nuestro trabajo con la construcción de éstos y posteriormente abordaremos la idea central.

La construcción de los números naturales a partir de conjuntos

Se dice que la intersección de todas las ramas de la matemática son los conjuntos, pero al trabajar con los números naturales parece ser que esta afirmación es falsa y por supuesto cualquiera dudaría de su veracidad al observar expresiones del tipo:

$$3 + 5 = 8$$
$$2 + (5 + 3) = (2 + 5) + 3$$
$$(3)(2) = (2)(3)$$

¿En dónde están los conjuntos?

Si alguien nos interrogara con preguntas tales como: ¿el número 1 es elemento del número 2? ó ¿el número 1 es subconjunto del número 2? tal vez nos descontrolemos de pronto, pero al reponernos con toda seguridad desecharemos las preguntas, catalogando de demente al interlocutor... Más aún, si un adulto (porque a un niño lo disculparíamos) nos preguntara ¿cuánto es 1 + 1? Seguramente nos asombraría tanto que pediríamos que lo repitiera y después de convencernos de que habíamos escuchado bien, un poco molestos contestaríamos: ¡es obvio que 2! ...pero permítanos asegurarles que no hay obviedad en la respuesta.

¿Y qué diríamos con respecto a 2 + 9 = 2?

Pues bien todas estas preguntas y afirmaciones que nos parecen tan descabelladas son teorías bien fundamentadas, rigurosamente demostradas y aplicadas (sin siquiera darnos cuenta) por nosotros mismos diariamente.

A continuación trataremos de esclarecer algunas de ellas.

Consideremos la siguiente definición:

Definición 1

Sea A un conjunto. El conjunto sucesor de A lo representamos por A' y está dado por: $A' = A \cup \{A\}$.

Ejemplo 1

Sea $A = \{3, 5\}$. Encontrar A'.

Solución

El conjunto A tiene dos elementos, para formar el conjunto sucesor de A debemos agregar un nuevo elemento, el mismo conjunto A.

Es decir

$$\{3, 5, \quad\} \quad \{3, 5\}$$

obteniendo el conjunto $\{3, 5, \{3, 5\}\}$ el cual es A' (A sucesor). Ahora sigamos paso a paso la definición:

$$A' = A \cup \{A\}.$$

Sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned} A' &= \{3, 5\} \cup \{\{3, 5\}\} \\ &= \{3, 5, \{3, 5\}\} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Sea $A = \phi$

a) Encontrar A'

$$\begin{aligned} A' &= A \cup \{A\} && \text{por definición} \\ &= \phi \cup \{\phi\} && A = \phi \text{ (sustituyendo } A) \\ &= \{\phi\} && \text{uniendo} \\ \therefore A' &= \{\phi\} \text{ ó} \\ \phi' &= \{\phi\} \end{aligned}$$

b) Encontrar el sucesor de ϕ'

$$\begin{aligned} (\phi')' &= \phi' \cup \{\phi'\} && \text{por definición} \\ &= \{\phi\} \cup \{\{\phi\}\} && \phi' = \{\phi\} \\ &= \{\phi, \{\phi\}\} && \text{uniendo} \\ \therefore (\phi')' &= \{\phi, \{\phi\}\} \end{aligned}$$

c) Encontrar el sucesor de $(\phi')'$

$$\begin{aligned} ((\phi')')' &= (\phi')' \cup \{(\phi')'\} \\ &= \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\} \\ \therefore \quad ((\phi')')' &= \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\} \end{aligned}$$

La notación cada vez se complica más. ¡Simplifiquémosla!

Definamos (y esto significa que no se aceptan sugerencias y de ahora en adelante se llamará así).

Definición 2

$\phi = 0$	donde "0" se llama cero
$\phi' = 0' = 1$	donde "1" se llama "uno"
$\phi'' = 1' = 2$	donde "2" se llama "dos" ...

Regresemos a las preguntas.

a) ¿1 es elemento de 2? Analicemos:

tenemos que $1 = \{\phi\}$ y que

$$2 = \{\phi, \{\phi\}\}$$

$\therefore$ 1 es elemento de 2

b) ¿$1 \subseteq 2$?

Observando el análisis del inciso (a) nos damos cuenta que $1 \subseteq 2$.

Definición 3

Sea A un conjunto. Si 0 es elemento de A y siempre que x es elemento de A, tenemos que x' es elemento de A, entonces A es conjunto inductivo.

¿Existe un conjunto inductivo? Recordemos que no hemos definido aún ningún tipo de número, lo que significa "formalmente" que lo desconocemos. Esos garabatos (entes) arriba mencionados, "uno", "dos", "tres", ... son símbolos representativos de una notación engorrosa, pero nadie nos ha dicho que sean números, mucho menos que formen un conjunto e inductivo además.

Supongamos, entonces, la existencia de al menos un conjunto inductivo, porque no es posible demostrarla con la teoría considerada hasta ahora. Matemáticamente esto significa crear un axioma.

Axioma de Infinito: Existe un conjunto inductivo.

Notemos que el axioma no nos indica cuál es el conjunto ni cómo encontrarlo. ¡Busquémoslo!

Supongamos que A es un conjunto inductivo (ese precisamente que dice el axioma). Consideremos todos los subconjuntos de A que son inductivos y formemos un conjunto Q con ellos. Es decir: Q contiene a todos los subconjuntos de A que son inductivos.

Simbólicamente $Q = \{E: E \subseteq A$ y E es inductivo$\}$. Observemos que como Q tiene como elementos conjuntos podemos encontrar la intersección de todos ellos.

Definamos ahora un nuevo conjunto llamado "ene de A" representado por N_A.

Definición 4

$$N_A = \cap Q$$

Aclarando dicha definición tenemos: $\cap Q$ significa la intersección de todos los elementos de Q, es decir el conjunto de todos los elementos comunes a todos los conjuntos que pertenecen a Q.

Pero no olvidemos que para pertenecer al conjunto Q se necesitan dos requisitos:

a) Ser subconjunto de A, y

b) Ser conjunto inductivo.

Simbólicamente: $X \in Q \rightarrow (X \subseteq A$ y X es conjunto inductivo).

La pregunta inmediata sería: ¿N_A es conjunto inductivo? O sea: ¿el conjunto formado por los elementos comunes a todos aquellos subconjuntos de A que son inductivos, es inductivo?. La respuesta es: ¡claro que sí!

Formalicemos la intuición:

Teorema 1

N_A es conjunto inductivo.

Demostración

a) ¿0 es elemento de N_A? Sabemos que $E \subseteq A$ y E es inductivo, luego 0 es elemento de E, para todo E elemento de Q. Pero si 0 es un elemento común a todos los subconjuntos inductivos de A, entonces 0 es un elemento de la intersección de todos ellos.

$$\therefore \quad 0 \in \cap Q$$

y como $\cap Q = N_A$ entonces $0 \in N_A$

b) ¿Si $X \in N_A$ entonces

$$X' \in N_A?$$

Si $X \in N_A$, entonces $X \in \cap Q$.

Entonces $X \in E$ para todo $E \in Q$.

Como E es conjunto inductivo, si $X \in E$ entonces $X' \in E$, para todo $E \in Q$. Entonces $X' \in \cap Q$, entonces $X' \in N_A$.

$\therefore$ Si $X \in N_A$, entonces $X' \in N_A$ y en consecuencia por (a) y (b) N_A es conjunto inductivo.

Con esta idea es fácil demostrar que si A y B son conjuntos inductivos, $A \cap B$ también lo es. Se sugiere que se intente la demostración antes de seguir adelante, por ser ésta la única forma que el lector tiene para descubrir si ha captado el concepto o no...

En seguida damos otra propiedad importante a nuestras necesidades.

Teorema 2

Si A y B son inductivos, entonces $N_A \subseteq B$.

Demostración

A y B son inductivos por hipótesis.

$$\therefore \quad A \cap B \quad \text{es inductivo} \quad \text{(ejercicio)}$$

Además $A \cap B \subseteq A$, entonces $A \cap B$ cumple con los requisitos para pertenecer a Q. $\therefore$ $A \cap B$ es elemento de Q.

Tenemos entonces que por lo menos A y $A \cap B$ son elementos de Q. No olvidemos que $\cap Q$ significa la intersección de todos los elementos de Q:

Si $Q = \{A, A \cap B, X, Y, Z, \ldots\}$

$$\cap Q = A \cap (A \cap B) \cap X \cap Y \cap Z \cap \ldots$$

Generalizando la propiedad de conjuntos $H \cap I \subseteq H$, obtenemos

$$X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n \cap \cdots \subseteq X_m \qquad m = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

Más aún, sea M una familia de conjuntos (no necesariamente enumerable). $\cap M \subseteq X$ para todo X elemento de M.

Con lenguaje ordinario podemos decir: la intersección de una familia siempre es subconjunto de cada uno de sus elementos.

Regresando a la demostración, Q es una familia, pues sus elementos son conjuntos, además $A \cap B$ es un elemento de Q.

$\therefore$ $\cap Q \subseteq A \cap B$ (la intersección de la familia es un subconjunto de cada uno de sus elementos).

$$\therefore \quad N_A \subseteq A \cap B \text{ pues } \cap Q = N_A,$$

y como $A \cap B \subseteq B$ (una propiedad de conjuntos), tenemos $N_A \subseteq B$ por transitividad,

$\therefore$ se cumple el teorema.

Una propiedad más fuerte es la siguiente:

Teorema 3

Sean A y B conjuntos, entonces $N_A = N_B$.

Antes de pasar a la demostración, reflexionemos sobre el alcance de este nuevo teorema: no importa quién sea A ni quién sea B hasta que sean inductivos para que su N_A y N_B (respectivamente) sean iguales.

Demostración

A y B son inductivos por hipótesis, entonces N_A y N_B son inductivos (Teorema 1). Escogemos A y N_B para aplicar el Teorema 2; obtenemos entonces que

$N_A \subseteq N_B$. ¿Por qué? El Teorema 2 dice: si A y B son conjuntos inductivos, entonces $N_A \subseteq B$, es decir se toma "N" del primero y el segundo conjunto queda igual.

Similarmente si tomamos ahora B y N_A y aplicamos el Teorema 2 (lo cual podemos hacer porque B y N_A son inductivos) obtenemos $N_B \subseteq N_A$. $\therefore$ tenemos que $N_A \subseteq N_B$ y $N_B \subseteq N_A \therefore N_A = N_B$.

Bien, pasemos ahora a nuestro objetivo: los naturales a partir de conjuntos.

Definición 5

Números Naturales.

Sea A un conjunto inductivo. El conjunto de los números naturales representado por $\mathbb{N}$, se define como N_A.

Es decir, considere cualquier conjunto inductivo A, forme un conjunto Q que contenga a todos aquellos subconjuntos de A que sean inductivos, ahora encuentre la intersección de todos ellos $(\cap Q)$...

Independientemente del conjunto A que usted seleccione inicialmente, basta que sea inductivo, para que siempre obtenga la misma respuesta: EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS NATURALES.

Una definición fascinante, sofisticada y formal.

El principio de inducción

Empezaremos enunciando los cinco postulados de Peano, pero nos concretaremos a analizar a fondo el tercero que es precisamente el principio de inducción.

Teorema 6

Postulados de Peano:

i) 0 es elemento de $\mathbb{N}$.

ii) Si n es elemento de $\mathbb{N}$ entonces n' es elemento de $\mathbb{N}$. (n' es el sucesor de n).

iii) Si $A \subseteq \mathbb{N}$ y 0 es elemento de A y siempre que n sea elemento de A, entonces n' es elemento de A, entonces $A = \mathbb{N}$.

iv) $n' \neq 0$ para todo n elemento de $\mathbb{N}$ (0 no es sucesor).

v) Si $n' = m'$ entonces $n = m$.

Antes de entrar de lleno a la demostración, asimilemos el postulado (iii). Tenemos por hipótesis:

$A \subseteq \mathbb{N}$ A subconjunto de los números naturales.

$0 \in A$. Si $n \in A$, entonces $n' \in A$.

Y por conclusión, si es que se satisfacen las tres condiciones anteriores entonces nuestro conjunto A es el conjunto de los números naturales.

La idea de la inducción, sobre todo la tercera hipótesis, es hasta cierto punto angustiante. Nos referimos a:

$$n \in A \rightarrow n' \in A,$$

pues esto significa que si tenemos seguridad sobre algún elemento x de A, su sucesor x' también está en A y como x' es elemento de A, su sucesor x'' también lo es de A y entonces su sucesor x''' también y en consecuencia x^{iv}, x^{v}, ...

Con un solo elemento de A del cual tengamos plena seguridad de su pertenencia se inicia una cadena de sucesores infinita, todos ellos elementos de A. Pero no restemos importancia a la primera y segunda parte de la hipótesis. Para aquellos que ya manejan la inducción y se jactan de hacerlo con destreza y además consideran que es suficiente la idea de: "Si n es elemento de A, entonces n' es elemento de A" y que las condiciones restantes $A \subseteq \mathbb{N}$ y $0 \in A$ son meras formalidades y sofisticaciones de la matemática, tenemos una pregunta. ¿Qué pasaría si se omite una sola de las dos primeras condiciones del principio de inducción?

Invitamos también al resto de los lectores que afortunadamente no cayeron en la categoría anterior, a que lo mediten; como sugerencia sólo deben tener presente que la conclusión es $A = \mathbb{N}$.

Pasemos a la demostración de (iii).

Demostración (iii)

$0 \in A$ por hipótesis y $n \in A \rightarrow n' \in A$ por hipótesis.

$\therefore$ A es un conjunto inductivo. Entonces podemos formar el conjunto N_A (recordemos que $N_A = \cap Q$, donde Q es el conjunto que contiene a todos los conjuntos inductivos de A).

Además $N_A = \mathbb{N}$ y $N_A \subseteq A \therefore \mathbb{N} \subseteq A$. Pero por hipótesis $A \subseteq \mathbb{N}$, concluimos que $A = \mathbb{N}$.

Hasta aquí hemos sido formales y por ello podríamos decir que por todo el rigor anterior, la inducción funciona, y que desde el punto de vista matemático es obvio que, después de aplicar el principio de inducción, sea lícito concluir que la propiedad se satisface para toda n elemento de los naturales; pero no nos conformaremos con esto, sino que trataremos de ser explícitos para aquellos que no están habituados a manejar conceptos en abstracto. Para ello nos valdremos de algunos ejemplos.

Ejemplo 3

Imaginemos un conjunto S con tres propiedades:

i) $0 \in S$
ii) $S \subseteq \mathbb{N}$
iii) Si $x \in S$, entonces $x' \in S$.

¿Quién es S? Hagamos el análisis de S, $0 \in S$, entonces $1 \in S$ (prop. (iii)), entonces $2 \in S$ (prop. (iii)), $3 \in S$ ...

Concluimos que por lo menos todos los naturales están en S. ¡Ah! pero como $S \subseteq \mathbb{N}$, entonces S no puede tener elementos que no sean números naturales. En consecuencia como S contiene a todos los números naturales y no puede tener elementos diferentes a éstos, entonces S es precisamente el conjunto de los números naturales.

Notemos que este ejemplo es el principio de inducción manejado informalmente, y aunque fue repetitivo con respecto a la demostración, lo consideramos por ser mucho más aclaratorio.

Ejemplo 4

Cuando nos topamos con problemas del tipo: Demuestre que $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (I) no lo resolvamos por inducción porque nos lo dice una sugerencia o porque tiene "enes" o por ser un ejercicio que pertenece a la sección de inducción o porque se parece a un problema que vimos resuelto por este método, ¡NO!, razonemos, analicemos, preguntémonos: ¿Para qué tipo de números se desea que se cumpla el problema? ¿Exclusivamente números naturales? ¿Qué cantidad de números naturales, unos cuantos, muchos, todos...? Si el problema requiere para satisfacerse exclusivamente números naturales y la cantidad de éstos es el conjunto completo o por lo menos el conjunto completo excepto "los m" primeros, estamos frente a un problema típico cuya solución es por el principio de inducción. Bien, pero ahora ¿Por qué cuando se aplica este conocido método en la resolución de un problema, independientemente de la rama en que se trabaja, el proceso siempre es el mismo? La demostración del problema (I) nos aclarará y complementará el proceso.

Demostraremos que: $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ por inducción sobre n.

Parte I. Se considera el mínimo valor que pueda tomar la variable y se verifica si cumple la propiedad o no.

En este caso tenemos que el mínimo valor es $n = 0$.

a) Si se suma hasta cero, el resultado es cero.

b) ¿Si se sustituye $n = 0$ en la segunda parte de la igualdad el resultado es el mismo?

$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{0(0+1)}{2} = \frac{0(1)}{2} = 0$. Como los dos resultados coinciden, decimos: Se cumple para $n = 0$.

Parte II. Se supone que la igualdad se cumple para $n = k$. Es decir, si sumamos desde cero hasta k podemos aplicar la segunda parte de la igualdad con plena seguridad, o sea:

$$0 + 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Esto se conoce como Hipótesis de inducción.

Y después, apoyándonos en esta suposición, probamos que si sumamos hasta $k + 1$ también es posible aplicar "$\frac{n(n+1)}{2}$", es decir, al tomar n el valor de $k + 1$, el resultado es exactamente igual al de la suma $0 + 1 + 2 + \cdots + k + (k + 1)$. Los pasos usuales son:

$$0 + 1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = ?$$

¿Esta suma a qué es igual?. Si logramos probar que esta suma tiene como resultado $\frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$, que es la sustitución de $n = k + 1$ en $\frac{n(n + 1)}{2}$ el problema queda demostrado. ¡Hagámoslo!

Consideremos $0 + 1 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1)$.

Por Hipótesis de inducción ya sabemos cuál es el resultado al sumar hasta k.

$$= (k + 1)\left(\frac{k}{2} + 1\right)$$

$$= (k + 1)\left(\frac{k + 2}{2}\right)$$

$$= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

¿Y esto qué es?

¡Es exactamente la sustitución deseada!

$\therefore$ por I y II tenemos que:

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

para todo n elemento de $\mathbb{N}$.

Los pasos que seguimos son válidos, pero ahora razonémoslos. ¿Cómo se está aplicando el principio de inducción en el proceso?

Propongamos un conjunto S, el cual contendrá sólo aquellos números naturales que satisfacen el problema (en este caso la igualdad).

Analizando, tenemos: En I probamos que $0 \in S$ y en II, que si $k \in S$, entonces $k + 1 = k' \in S$. Y como S contiene únicamente números naturales, $S \subseteq \mathbb{N}$. En consecuencia $S = \mathbb{N}$. Es decir, todos los números naturales satisfacen el problema. De aquí que se concluya que el problema se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Son muchos los problemas que a pesar de que no satisfacen la primera hipótesis del principio de inducción, es decir "0" no es elemento del conjunto S, conciernen a la inducción. Tales problemas son por ejemplo:

Problema 1. "Un plano se descompone mediante n rectas en recintos que se pueden colorear en blanco y negro, de tal forma que a lo largo de un segmento, recintos colindantes están coloreados por diferentes colores".

Problema 2. "La suma de los ángulos internos de un polígono de 'n' lados está dada por $(n - 2)180°$".

Con respecto al Problema 1 al intentar la demostración por inducción sobre el número de rectas, podemos observar que nuestro primer caso significativo es cuando tenemos una recta, lo cual equivale a señalar que el primer elemento del conjunto S es el número 1 y no el número 0. En otras palabras 0 no es elemento de S.

Analizando el Problema 2 la alteración de la primera hipótesis del principio de inducción es mucho más notable, ya que si intentamos la inducción sobre el número de lados el primer elemento significativo de S es el número 3, con lo que tenemos que 0, 1 y 2 no son elementos del conjunto S.

En ninguno de los casos anteriores podemos aplicar el principio de inducción, debido a que no se satisfacen todas las hipótesis requeridas. Sin embargo detengámonos un momento... observemos... razonemos... y entonces:

Podemos notar que para el Problema 1 si se satisface para $n = 1$, es decir 1 es elemento del conjunto S, y si a partir de que se cumple para $n = k$ se satisface para $n = k + 1$, entonces $S = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

Similarmente para el Problema 2, obtenemos que $S = \{3, 4, \ldots, n, \ldots\}$.

Pero, no podemos ni debemos conformarnos con la sola intuición, demos un segundo paso; ¡GENERALICEMOS!

Sea S el conjunto que contiene a todos los números naturales que satisfacen cierta propiedad P. Si dicha propiedad se satisface de un número natural m en adelante entonces $S = \{x \in \mathbb{N} : x \geq m\}$ es decir la propiedad se cumple para todo número natural mayor o igual que m.

Notemos que si $m = 0$, se trata precisamente del principio de inducción enunciado informalmente. Por esta razón nuestro siguiente paso consiste en la FORMALIZACIÓN.

Dejaremos al margen de nuestro enunciado formal la idea de "propiedad", es decir, olvidémonos, por lo pronto, de cómo fue formado el conjunto S y concentremos nuestra atención en el análisis del conjunto con sus características y propiedades.

Al formalizar nuestro enunciado y demostrar su veracidad, lo que en realidad estamos "creando" es un *teorema*.

Teorema I

Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que si m es elemento de S y si k es elemento de S, entonces k' es elemento de S, entonces S contiene a todos los números naturales mayores o iguales que m.

Demostración

Sea $T = \{x \in \mathbb{N} : x < m\}$

Caso I. Si $m = 0$ entonces $T = \phi$ y el teorema se cumple por el principio de inducción.

Caso II. Si $m \neq 0$ entonces 0 es elemento de T.

Sea $W = S \cup T$. Como 0 es elemento de T, entonces 0 es elemento de W.

Sea k elemento de W. Entonces

$$\begin{cases} k \in S \rightarrow k' \in S \rightarrow k' \in W \\ \text{o} \\ k \in T \rightarrow \begin{cases} k' < m \rightarrow k' \in T \rightarrow k' \in W \\ k' = m \rightarrow k' \in S \rightarrow k' \in W \end{cases} \end{cases}$$

$\therefore\ W = \mathbb{N}$ por el principio de inducción. Entonces $S \cup T = \mathbb{N}$.

$$(S \cup T) - T = N - T$$

pero,

$$\begin{aligned}(S \cup T) - T &= (S \cup T) \cap T' \\ &= (S \cap T') \cup (T \cap T') \\ &= (S \cap T') \cup \phi \\ &= S \cap T' \\ &= S - T\end{aligned}$$

$\therefore\ N - T = S - T$ y como $S - T \subseteq S$, $S - T$ puede ser diferente de S porque $S \cap T$ no necesariamente es ϕ.

$$\therefore\ N - T \subseteq S.$$

Es decir, S contiene a todos los números naturales mayores o iguales que m.

Después de haber formalizado nuestras ideas y demostrado su validez, estamos en posibilidad de resolver problemas del tipo 1 y 2. Notemos también que el teorema I sigue el mismo método de demostración utilizado en el principio de inducción. (Si $k \in S$, entonces $k' \in S\ldots$). La diferencia estriba únicamente en la primera hipótesis, permitiendo dicha similitud utilizar indistintamente la frase "inducción sobre n" para indicar cuál es la variable que tomará valores enteros consecutivos para demostrar la veracidad de la propiedad deseada.

A continuación el desarrollo de la demostración del Problema 1 aparece como el Ejemplo 5.

Ejemplo 5

Un plano se descompone mediante n rectas en recintos que se pueden colorear en blanco y negro de tal modo que a lo largo de un segmento, que los recintos colindantes están coloreados por diferentes colores.

Primero aclararemos la idea de recintos colindantes. Observemos la Figura 1.

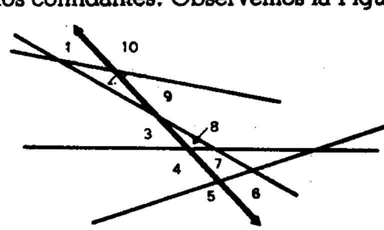

Figura 1

Los recintos colindantes son las regiones formadas por los semiplanos

Consideremos la recta 1 y el semiplano I formado por ella, los recintos colindantes son las regiones numeradas por 1, 2, 3, 4, 5. Similarmente los recintos colindantes del semiplano II son las regiones 6, 7, 8, 9, 10.

Demostración

Notemos que el número de rectas es la idea central, pues debemos demostrar que:

Si $n = 1$, es decir, con una recta se satisface el teorema.

Si $n = 2$, es decir, con dos rectas se satisface el teorema.

Si $n = k$, es decir con k rectas, se satisface el teorema.

$\therefore$ la inducción se hace sobre el número de rectas.

Parte I $n = 1$.

Una recta divide al plano en dos semiplanos, los cuales se pueden colorear uno blanco y otro negro, entonces para $n = 1$, el teorema se cumple.

Parte II Supongamos que se cumple para $n = k$, entonces con k rectas es posible colorear los recintos colindantes alternadamente. Figura 2.

Para demostrar el caso $n = k + 1$, tracemos una recta g diferente a las k rectas existentes de la Figura 2, observe Figura 3.

Notemos que en la Figura 3 aparecen recintos colindantes del mismo color, lo cual evitaremos si tomamos uno de los semiplanos I o II formados por la recta g y cambiamos los colores. Así pues queda demostrado que si se cumple la propiedad para $n = k$ rectas, entonces se cumple para $n = k + 1$.

En consecuencia por I y II (partes de la inducción) el teorema se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$.

Notemos que este ejemplo es válido para naturales mayores o iguales que 1, por lo que se aplicó el teorema 1. La hipótesis de que $0 \in A$, no se satisface (aparentemente). Sin embargo "el método de inducción" no se alteró, sólo debemos tener cuidado al dar la conclusión, que siempre será a partir del mínimo valor de la variable, en adelante (primer valor significativo).

Y sólo para complementar una observación adicional: si $n = 0$, es decir, si el número de rectas fuera cero, el teorema también se cumple, pues de no hacerlo se aseguraría la existencia de recintos que no satisfagan la propiedad y esto es una contradicción, pues no existen tales recintos

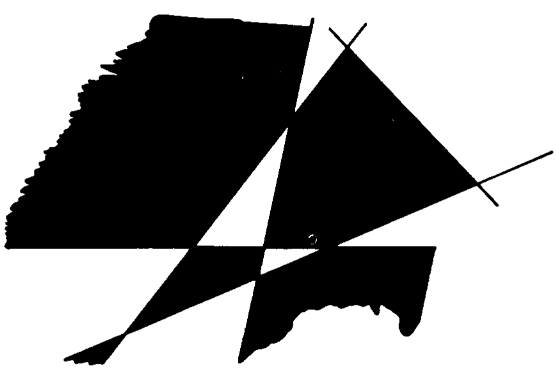

Figura 2

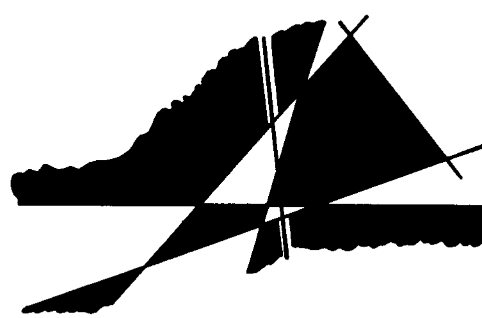

Figura 3

colindantes puesto que no existe el segmento de recta que hace que colinden. Cuando esto sucede se dice que la propiedad se cumple vacíamente.

Ejemplo 6

Demuestre que

$$D_x^{(n)} x^m = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} & \text{si } n \leq m \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}$$

donde m es natural.

Queremos demostrar que al derivar n veces x^m se obtienen ciertos resultados que dependen de la relación de m con n. Notemos que el número de veces que queremos derivar es siempre un número natural.

Haremos la inducción sobre el número de derivadas, es decir, sobre n. Cuando en un mismo problema aparecen dos o más variables que toman sus valores de los números naturales, vale la pena aclarar sobre cuál de ellas se aplicará la inducción.

Insistimos de nuevo en el razonamiento de la prueba por inducción (en el por qué de la inducción). Sea A el conjunto que contiene a los grados de la derivada:

$$D_x^{(n)} x^m \qquad \text{(es decir valores de } n\text{)}$$

para los cuales se satisface la igualdad:

$$D_x^{(n)} x^m = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} & \text{si } n \leq m \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}$$

donde $\qquad m \in \mathbb{N}$

Parte I. Analicemos si $0 \in A$ lo cual es equivalente a preguntarnos: ¿si $n = 0$ (la derivada cero), se satisface la igualdad? Veamos: $D_x^{(n)} x^m = x^m$ (la derivada cero significa derivar cero veces).

Ahora ¿Con qué parte del segundo miembro de la igualdad vamos a trabajar? para tomar la parte adecuada tenemos que fijar nuestra atención en A . Si $n \leq m$ es la primera parte, si $n > m$ es la segunda, como $n = 0$ y m es un número natural, entonces $n \leq m$, pues $0 \leq m$, $\therefore$ nuestro resultado de $D_x^{(n)} x^m = x^m$ debe coincidir con: $\dfrac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}$ y como $n = 0$, obtenemos sustituyendo $\dfrac{m!}{(m-0)!} x^{m-0}$ y esto es igual a $\dfrac{m!}{m!} x^m$ que a su vez es x^m, lo cual nos conduce al resultado deseado. $\therefore$ si $n = 0$ la igualdad se cumple y ¿qué sucede con nuestro conjunto A? Nuestro conjunto A tiene por lo menos un primer elemento, el cero. $A = \{0, ?\}$ ¿Por qué? Porque cuando el grado de la derivada es cero se satisface la igualdad.

Parte II. Supongamos que se cumple para $n = k$, es decir:

$$D_x^{(k)} x^m = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-k)!} x^{m-k} & \text{si } k \leq m \\ 0 & \text{si } k > m \end{cases}$$

¿Se cumple para $n = k + 1$?. Siempre decimos lo mismo (supongamos para $n = k$), siempre hacemos lo mismo (borramos n y escribimos k), siempre nos preguntamos lo mismo (¿Se cumple para $n = k + 1$?). Lo que verdaderamente estamos aplicando es la tercera hipótesis del tercer postulado de Peano: Si $x \in A$ entonces $x' \in A$, entonces...

Si $x \in A$ con toda seguridad y si en base a esto probamos que su sucesor x' también es elemento de A, entonces...

Por eso suponemos que se cumple para $n = k$, ya que al pasar a nuestro conjunto A, esto significa, $k \in A$ y por eso nos preguntamos ¿se cumple para $n = k + 1$?, lo cual es equivalente a decir $k' \in A$, ¿para qué? Ya que sabemos que A contiene únicamente naturales y $0 \in A$ y si $k \in A$, entonces $k' \in A$, por PEANO (principio de inducción) obtenemos $A = \mathbb{N}$. Y traduciendo a nuestro ejercicio en particular $A = \mathbb{N}$ significa que la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, donde n es el grado de la derivada. Bien, terminemos la demostración, ya que entre el análisis de los por qués y para qués, casi la olvidamos.

Ahora ya podemos trabajar en la forma usual. Supongamos que se cumple para $n = k$ y consideremos el caso $n =$

$k + 1$. No olvidemos que "m" es entero arbitrario, pero fijo, entonces pueden pasar 3 cosas:

a) Si $k = m$, entonces $(k + 1) > m$

b) Si $k < m$, entonces $(k + 1) \leq m$

c) Si $k > m$, entonces $(k + 1) > m$.

Caso (a). Análisis de $n = k + 1$. Como $k = m$, entonces

$$D_x^{(k+1)}x^m = D_x(D_x^{(k)}x^m) =$$
$$= D_x\left(\frac{m!}{0!}x^0\right) = D_x(m!) = 0$$

$\therefore$ para $n = k + 1$ y $(k + 1) > m$ la igualdad se cumple.

Caso (b). Análisis de $n = k + 1$. Como $k < m$, entonces $m - k > 0$, entonces

$$D_x^{(k+1)}x^m = D_x(D_x^{(k)}x^m) =$$
$$= D_x\left(\frac{m!}{(m-k)}x^{m-k}\right) =$$
$$= \frac{m!(m-k)}{(m-k)!}x^{m-k-1} =$$
$$= \frac{m!\,(m-k)\,x^{m-(k+1)}}{(m-k)(m-(k+1))(m-(k+2))\ldots 1}$$
$$= \frac{m!\,x^{m-(k+1)}}{(m-(k+1))!}$$ sustituyendo $n = k + 1$ en $\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$ obtenemos igual resultado.

$\therefore$ para $n = k + 1$ y $k + 1 \leq m$ se cumple la igualdad.

Caso (c). Análisis de $n = k + 1$. Como $k > m$, entonces $D_x^{(k+1)}(x^m) = D_x(D_x^{(k)}x^m) = D_x(0) = 0$.

$\therefore$ para $n = k + 1$ y $k + 1 > m$ se cumple la igualdad.

Concentrando la información de los casos a, b y c obtenemos

$$D_x^{(k+1)}x^m =$$
$$= \frac{m!}{(m-(k+1))!}x^{m-(k+1)} \text{ si } k + 1 \leq m$$
$$0 \qquad \text{si } k + 1 > m$$

para m natural.

$\therefore$ como $A \subseteq \mathbb{N}$, $0 \in A$ y si $k \in A$, entonces $k' \in A$ concluimos: La igualdad se cumple para todo n.

Ejemplo 7

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^m$, no todos nulos y tales que $\|x_1 + x_2 + \cdots x_n\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|$. Muestre que dím gen$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = 1$.

Demostración: Inducción sobre n.

Parte I. $n = 1$ (sólo un vector con dichas propiedades).

Por hipótesis $x_1 \in \mathbb{R}^m$ y $\|x_1\| = \|x_1\|$.

Probaremos: dím gen$\{x_1\} = 1$.

Sabemos que el espacio generado por $\{x_1\}$, es decir: gen$\{x_1\} = \{y : y = \alpha x_1$, α es escalar$\}$.

$\therefore$ tenemos que x_1 genera a gen$\{x_1\}$ además como x_1 es único es linealmente independiente, en consecuencia la base para gen$\{x_1\}$ es $\{x_1\}$ $\therefore$ dím gen$\{x_1\} = 1$ $\therefore$ se cumple para $n = 1$.

Aunque no es necesario, para este ejercicio haremos el caso particular de $n = 2$.

Para el lector que se ha desconectado del álgebra lineal, sugerimos demuestre la siguiente propiedad:

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$ y $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$, entonces x_1 y x_2 son linealmente dependientes.

Esta propiedad será aplicada a continuación. Continuemos con la demostración. Analicemos el caso para $n = 2$.

Entonces tenemos dos vectores x_1, x_2 en $\mathbb{R}^m$, tales que $\|x_1\| + \|x_2\| = \|x_1 + x_2\|$.

Probaremos que dím gen$\{x_1, x_2\} = 1$.

Por el ejercicio sabemos que si $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ entonces x_1 y x_2 son linealmente dependientes, es decir $x_1 = \alpha x_2$, α es escalar, $\alpha \neq 0$, (hipótesis no todos nulos).

Probaremos ahora que gen$\{x_1, x_2\}$ = gen$\{x_1\}$ ó gen$\{x_2\}$. Tomemos gen$\{x_1, x_2\}$ = gen$\{x_1\}$.

Sea $y \in$ gen$\{x_1, x_2\}$ entonces y es una combinación lineal de x_1 y x_2. $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.

$$= \alpha_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_3 x_1)$$

pues $x_1 = \alpha x_2 \rightarrow \frac{1}{\alpha}x_1 = x_2 \rightarrow$

$$\alpha_3 x_1 = x_2 \quad \text{donde } \alpha_3 = \frac{1}{\alpha} = \beta x_1$$

$\therefore \; y \in \text{gen}\{x_1\}$

$\therefore \; \text{gen}\{x_1, x_2\} \subseteq \text{gen}\{x_1\}.$

Ahora sea $y \in \text{gen}\{x_1\}$ entonces $y = \alpha_1 x_1 = \alpha_1 x_1 + 0x_2$ entonces $y \in \text{gen}\{x_1, x_2\}$.

$\therefore \; \text{gen}\{x_1\} \subseteq \text{gen}\{x_1, x_2\}$.
En consecuencia x_1 genera $\text{gen}\{x_1, x_2\}$ y como $\{x_1\}$ es linealmente independiente, tenemos que $\{x_1\}$ es una base para $\text{gen}\{x_1, x_2\}$.
$\therefore$ $\text{dím gen}\{x_1, x_2\} = 1$. $\therefore$ se cumple para $n = 2$.

Parte II. Supongamos que se cumple para $n = k$.
$\therefore$ para $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^m$ y $\|x_1 + x_2 + \cdots + x_k\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_k\|$ tenemos que $\text{dím gen}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = 1$.
Probaremos que se cumple para $n = k + 1$.
Consideremos $k + 1$ vectores en $\mathbb{R}^m$, sean $y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}$, con la propiedad de que

$$\|y_1 + y_2 + \cdots + y_k + y_{k+1}\| = \|y_2\| + \cdots + \|y_k\| + \|y_{k+1}\|,$$

probaremos que

$$\text{dím gen}\{y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}\} = 1.$$

Consideremos ahora:

$$\|y_1 + y_2 + \cdots + y_k + y_{k+1}\| = \|y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1} + (y_k + y_{k+1})\| =$$

$$= \|y_1\| + \|y_2\| + \cdots + \|y_{k-1}\| + \|y_k + y_{k+1}\|$$

Considerando $y_k + y_{k+1}$ como un sólo vector, tenemos k vectores que satisfacen la hipótesis de inducción, en consecuencia podemos decir que $\text{dím gen}\{y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k + y_{k+1}\} = 1$.
Además tenemos que:

$\|y_1\| + \|y_2\| + \cdots + \|y_{k-1}\| + \|y_k\| + \|y_{k+1}\| = \|y_1\| + \|y_2\| + \cdots + \|y_{k-1}\| + \|y_k + y_{k+1}\|$ entonces $\|y_k\| + \|y_{k+1}\| = \|y_k + y_{k+1}\| \therefore y_k$ y y_{k+1} son linealmente dependientes.

$$\therefore \; \text{gen}\{y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}\} =$$
$$= \text{gen}\{y_1, \ldots, y_k, \beta y_k\}$$
$$(\text{pues } y_{k+1} = \beta y_k)$$
$$= \text{gen}\{y_1, \ldots, y_k\}$$

Probaremos que

$$\text{gen}\{y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k + y_{k+1}\} = \text{gen}\{y_1, \ldots, y_k\}.$$

Sea $z \in \text{gen}\{y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k + y_{k+1}\}$

entonces

$$\begin{aligned} z &= \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{k-1} y_{k-1} + \alpha_k(y_k + y_{k+1}) \\ &= \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_k(y_k + \beta y_k) \\ &= \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha' y_k \end{aligned}$$

$\therefore \; z \in \text{gen}\{y_1, \ldots, y_k\}$.
Entonces
$\text{gen}\{y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k + y_{k+1}\} \subseteq \text{gen}\{y_1, \ldots, y_k\}$.
Ahora sea $z \in \text{gen}\{y_1, \ldots, y_k\} \rightarrow z = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_k y_k$

$$= \alpha_1 y_1 + \cdots + \left(\frac{\alpha_k}{1 + \beta} + \frac{\alpha_k}{1 + \beta}\beta\right) y_k \quad \beta \neq -1 \; (+)$$

$$\text{pues } \frac{\alpha_k}{1 + \beta} + \frac{\alpha_k}{1 + \beta}\beta = \alpha_k$$

$$= \alpha_1 y_1 + \cdots + \frac{\alpha_k}{1 + \beta} y_k + \frac{\alpha_k}{1 + \beta}\beta y_k$$

$$= \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_k y_k + \alpha_k(\beta y_k)$$

$$= \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_k y_k + \alpha_k y_{k+1}$$

$$\text{pues } y_{k+1} = \beta y_k$$

$$\alpha_k = \frac{\alpha_k}{1 + \beta}$$

$$\therefore \; z \in \text{gen}\{y_1, \ldots, y_k + y_{k+1}\}$$

pues $z = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_k(y_k + y_{k+1})$

$$\therefore \ \text{gen}\{y_1, \ldots, y_k\} \subseteq \text{gen}\{y_1, \ldots, y_k + y_{k+1}\}$$

$\therefore \ \text{gen}\{y_1, \ldots, y_k\} =$ $\text{gen}\{y_1, \ldots, y_k + y_{k+1}\}$ y sabemos que

dím $\text{gen}\{y_1, \ldots, y_k\} = 1$, porque dím $\text{gen}\{y_1, \ldots, y_k + y_{k+1}\} = 1$ y como $\text{gen}\{y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}\} =$ $\text{gen}\{y_1, \ldots, y_k\}$ concluimos que dím $\text{gen}\{y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}\} = 1$.

$\therefore$ se cumple el teorema para todo n elemento de $\mathbb{N}$ y $n \geq 1$.

Ejemplo 8

Si G es una gráfica topológica, planar, conectada, no pivotante, con t mallas internas, a aristas y n nodos, entonces $t = a - n + 1$.

Notemos en este caso que tanto t, n y a toman valores de números naturales. La inducción se podría intentar sobre cualquiera de ellas, el éxito depende de la destreza del lector. Lo que pretendemos dejar en claro es que no podemos decir que una u otra forma sea más fácil pues esto depende de la opinión de cada sujeto.

Nosotros haremos la inducción sobre t (número de mallas internas).

Demostración: Parte I.

Nota: una gráfica G topológica, planar, conectada, no pivotante será representada por G^*.

Como $t = 1$ es nuestro primer caso, tomaremos una gráfica modelo para desarrollarlo. Figura 4.

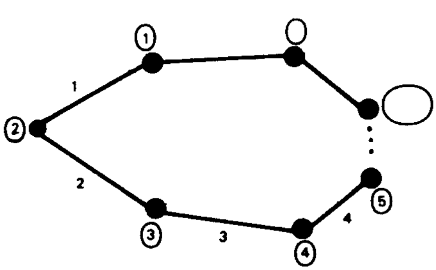

Figura 4

Además una gráfica G^* con una sola malla no posee aristas internas.

Notemos en la gráfica que $n = b$ (Figura 4).

$\therefore \ t = 1 = 0 + 1 = b - n + 1.$

$\therefore$ Se cumple para $t = 1$.

Parte II. Supongamos que para toda gráfica G^* con t mallas internas, satisface $t = b - n + 1$.

Consideremos una gráfica con $t + 1$ lados (aristas).

Notemos que para incrementar el número de mallas en 1, podemos aumentar una arista entre dos de los nodos existentes (recordemos que la nueva gráfica debe ser una gráfica G^*) o bien agregar m aristas en serie las cuales son conectadas a la gráfica ya existente por medio de $m - 1$ nuevos nodos. Figura 5.

M: gráfica con t mallas (contenida en la región con contorno punteado).

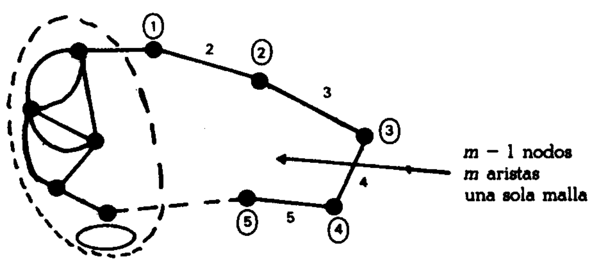

Figura 5

Contemos las mallas: (t mallas de M) + 1 malla $= t + 1$.

Número de nodos: sabemos que la gráfica M tiene n nodos y b aristas, por lo tanto el número de nodos de $G^* = n + (m - 1)$.

Número de aristas de $G^* = b + m$.

Resolvamos

$$(b + m) - (n + (m - 1)) + 1 = b - n + 1 + 1 = t + 1.$$

$\therefore \ t = b - n + 1$ es verdadera para todo t natural, $t \geq 1$.

Ejemplo 9

Sea $u_k(t) = t^k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$, $t \in \mathbf{R}$. Entonces el conjunto

$$S = \{u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$$

es linealmente independiente.

Analicemos el siguiente desarrollo: Inducción sobre el número de elementos de S.

Parte I. S tiene un solo elemento $S = \{u_0\}$. $\therefore$ S es L.I.

Parte II. Supongamos que S tiene k elementos, entonces

$$S \stackrel{*}{=} \{u_0, u_2, \ldots, u_{k-1}\} \text{ y es L.I.}$$

Consideremos S con $k + 1$ elementos, entonces $S = \{u_0, \ldots, u_{k-1}, u_k\}$ y supongamos que es linealmente dependiente.

Sabemos por hipótesis de inducción que si $a_0t^{\circ} + a_1t + \cdots + a_{k-1}t^{k-1} = 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}$, entonces $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$.

Como estamos suponiendo que $S = \{u_0, \ldots, u_{k-1}, u_k\}$ es linealmente dependiente, al menos existe un $u_i \in S$ tal que $u_i = \beta_0u_0 + \cdots + \beta_{i-1}u_{i-1} + \beta_{i+1}u_{i+1} + \cdots + \beta_ku_k$, entonces $t^i = \beta_0 + \cdots + \beta_{i-1}t^{i-1} + \beta_{i+1}t^{i+1} + \cdots + \beta_kt^k\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. En especial, para $t = 0$, sustituyendo tenemos $\beta_0 = 0$. $\therefore\ t^i = \beta_1t + \cdots + \beta_{i-1}t^{i-1} + \beta_{i+1}t^{i+1} + \cdots + \beta_kt^k, \forall\, t \in \mathbb{R}$. Entonces $t^i = t(\beta_1 + \cdots + \beta_{i-1}t^{i-2} + \beta_{i+1}t^i + \cdots + \beta_kt^{k-1}), \forall\, t \in \mathbb{R}$, en especial para $t \neq 0$, entonces $t^{i-1} = \beta_1t^{\circ} + \cdots + \beta_{i-1}t^{i-2} + \beta_{i+1}t^i + \cdots + \beta_kt^{k-1}, \forall\, t \in \mathbb{R}$, entonces $\beta_1t^{\circ} + \cdots + \beta_{i-1}t^{i-2} + \beta_{i+1}t^i + \cdots + \beta_kt^{k-1} = 0$.

Es decir, obtuvimos una combinación lineal de los elementos del conjunto S de la hipótesis de inducción, la cual está igualada a cero y un escalar (el de t^{i-1}) es diferente de cero, esto contradice que S (de H.I) es linealmente independiente.

$\therefore$ Si S tiene $k + 1$ elementos entonces es L.I. (tomando en cuenta las otras condiciones del problema).

¿Es correcto concluir que si $u_k(t) = t^k$, $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$; con $t \in \mathbb{R}$, entonces $S = \{u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots\}$ es linealmente independiente?

La respuesta es ¡NO!, basta recordar que el principio de inducción es exclusivo para números naturales. Algunos de nuestros ejemplos han mostrado que por medio de inducción se puede asegurar que alguna propiedad se cumple para un subconjunto de los números naturales, pero lo que se pretendía probar en este ejemplo, por medio de la inducción, es que se cumple el teorema para un conjunto que contiene a los naturales y que no es el mismo, y esto no es posible.

Retrocedamos para analizar un poco...

Nosotros hicimos inducción sobre el número de elementos del conjunto S. Y S está dado de la siguiente forma:

$S = \{u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots\}$ estos puntos son los culpables de que la inducción no demuestre por completo el teorema.

Después de nuestra demostración lo más que podemos asegurar es: Si $u_k(t) = t^k$, con $k = 0, 1, \ldots, n$ y $t \in \mathbb{R}$ entonces $S = \{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$ es linealmente independiente.

Si formamos un conjunto S con las características mencionadas con un número finito de elementos, no importa que sea "muy" grande, la inducción respalda nuestra conclusión, pero si el conjunto S tiene un número infinito de elementos la inducción ya no es responsable de tan extensa propiedad y aunque es verdadera omitimos su demostración por estar fuera de los intereses del presente trabajo.

A continuación damos las respuestas a algunas de las preguntas formuladas a lo largo del desarrollo.

Alteración de las Hipótesis en el principio de inducción

1. Supongamos que el principio fuera el siguiente:

Si $0 \in A$ y si $n \in A$, entonces $n' \in A$, entonces $\mathbb{N} = A$.

Esto sería falso pues el conjunto A podría ser un conjunto con muchos elementos más, independientemente de los números naturales.

Ejemplo. Sea $A =$

$$\{0, x', 1, x'', 2, \ldots, n, x^{(n+1)}, \ldots\} \quad x \in \mathbb{N}$$

El conjunto A satisface las hipótesis

$$0 \in A \text{ y } \quad m \in A \rightarrow m' \in A$$

según el principio de inducción ALTERADO $A = \mathbb{N}$, lo cual podemos observar es falso.

2. Consideremos ahora:

Si $A \subseteq \mathbb{N}$ y si $n \in A$, entonces $n' \in A$, entonces $\mathbb{N} = A$.

También este nuevo principio sería falso, basta considerar el conjunto $A = \{10, 11, 12, \ldots, n, \ldots\}$, notemos que satisface la hipótesis: $A \subseteq \mathbb{N}$ y $n \in A$, entonces $n' \in A$, sin embargo $A \neq \mathbb{N}$.

3. En el desarrollo del Ejemplo 7 aparece un asterisco que intencionalmente no es mencionado antes que ahora, nos interesamos mucho en que el lector profundice paso por paso por iniciativa propia, no consideramos conveniente dejar "lagunas" en un desarrollo, justificando la poca formalidad diciendo: "el autor lo dice, debe ser cierto", tratemos de convencernos (lícitamente, sin trampas) por nosotros mismos y la mucha ayuda de la teoría. El asterisco aparece para dar una explicación posterior al por qué de la igualdad, aunque claro estamos concientes que algunos lectores la encuentran "obvia" por poseer la información y destreza necesaria para tal desarrollo, pero esperamos que aún éstos tengan viva su curiosidad y al menos se hayan preguntado ¿Y este asterisco por qué? Ahora para aquellos que notaron el asterisco y trataron de explicarse la igualdad sin éxito, tenemos la aclaración:
Si

$$\|a_1 + a_2 + a_3\| = \|a_1\| + \|a_2\| + \|a_3\|,$$

entonces

$$\|a_1\| + \|a_2 + a_3\| = \|a_1 + a_2 + a_3\|.$$

Demostración.
$\|a_1 + a_2 + a_3\| \leq \|a_1\| + \|a_2 + a_3\| \leq$

$\leq \|a_1\| + \|a_2\| + \|a_3\|$ igualando los extremos obtenemos que

$$\|a_1\| + \|a_2 + a_3\| = \|a_1 + a_2 + a_3\|.$$

4. Sea

$y_j, y_i \in \{y_p : p = 1, \ldots, k + 1\}$. Si dado y_j no existiera un y_i $(i \neq j)$ tal que $y_j \neq -y_i$, $i \neq j$, entonces $y_j = -y_i$, i, y también se cumple el teorema. Para nosotros $y_j = y_k$ y $y_{k+1} = y_i$ e hicimos el caso para cuando existe tal $\beta \neq -1$. El resto le corresponde.

Bibliografía

HEINHOLD, Joseph y RIEDMÜLLER, Bruno. *Álgebra Lineal y Geometría Analítica Tomo I.* Reverté S.A. 1980, Cap. I, pp. 22, 23.

APOSTOL, Tom *Cálculo Tomo I.* Reverté S.A. 1980.

GROSSMAN, Stanley I. *Elementary Linear Algebra.* Wadsworth International. 1980. pp. 178, 206.

SILLER LEYVA, J. Javier. *Tésis profesional "Desarrollo matemático de los conceptos de modelos, sistemas lineales y topología de red, como herramienta para diseño y análisis en el campo eléctrico".* Guadalajara, Jal. 1985.

GÓMEZ CALDERÓN, Javier. *Conjuntos Un Enfoque Elemental.* C.E.C.S.A. Segunda edición. 1979.

A. DESOER, Charles y S. KUH, Ernest. *Basic Circuit Theory.* International Student Edition. 1969. pp. 446, 447.