■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 1 - No. 3 • Diciembre 1989 ■ © GEI ■ Pág. 5 ■

ARTICULOS

Un tema de evaluación

¿Qué calificación asignaría usted?

En nuestras vivencias como profesores de matemáticas algunas veces enfrentamos situaciones que nos llevan a cuestionar los procedimientos a través de los cuales evaluamos el rendimiento escolar y con ello la eficacia de nuestra labor docente (la cual generalmente no sale bien librada y muchas veces queda en entredicho).

El caso que presento a continuación reviste particular interés tanto desde el punto de vista de la matemática educativa (específicamente en el terreno de la evalución) como de la matemática pura.

En un grupo de 50 alumnos del segundo semestre de las licenciaturas escolarizadas que en la Unidad Ajusco ofrece la Universidad Pedagógica Nacional, en una evaluación parcial del curso de Matemática II se planteaba un reactivo que consistía en la búsqueda de las soluciones de la ecuación de segundo grado incompleta

$$-\frac{2}{3}x^2 = -\frac{3}{4}x.$$

Previamente se habían estudiado y practicado los métodos de: i) despeje si $b = 0^*$, ii) factorización, iii) completar trinomio cuadrado perfecto, y iv) la fórmula general. Un alumno efectuó el desarrollo siguiente**.

$$-\frac{2}{3}x^2 = -\frac{3}{4}x \qquad (1)$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x = 0 \qquad (2)$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{64} = \frac{9}{64} \qquad (3)$$

$$\left(-\frac{2}{3}x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64} \qquad (4)$$

$$-\frac{2}{3}x + \frac{3}{8} = \pm\sqrt{\frac{9}{64}} \qquad (5)$$

$$-\frac{2}{3}x + \frac{3}{8} = \pm\frac{3}{8} \qquad (6)$$

$$-\frac{2}{3}x = -\frac{3}{8} \pm \frac{3}{8} \qquad (7)$$

$$x = \frac{-\frac{3}{8} \pm \frac{3}{8}}{-\frac{2}{3}} \qquad (8)$$

$$x_1 = \frac{-\frac{3}{8} + \frac{3}{8}}{-\frac{2}{3}} = \frac{0}{-\frac{2}{3}} = \boxed{0} \qquad (9)$$

$$x_2 = \frac{-\frac{3}{8} - \frac{3}{8}}{-\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{6}{8}}{-\frac{2}{3}} = \frac{18}{16} = \boxed{\frac{9}{8}} \qquad (10)$$

Suplico al lector que antes de continuar con el resto de este artículo, adopte la ac-

Eduardo Zárate Salas
Universidad Pedagógica Nacional

* El valor b de $ax^2 + bx + c = 0$.
** Los indicadores (1) al (10) se agregan como referencias.

titud de evaluador y asigne una calificación al reactivo expuesto considerándolo con un valor máximo de un punto. Después de eso, continuamos.

Naturalmente que los primeros miembros de (3) y (4) no son en general expresiones equivalentes, de modo que si se supone que el alumno consideró que en el primer miembro de (3) ha obtenido un trinomio cuadrado perfecto cuya factorización es el primer miembro de (4), seguramente no vacilaremos en deducir que allí existe un claro error y la mala calificación asignada por el profesor no se hará esperar. Sin embargo, podemos notar en (9) y (10) que las soluciones x_1 y x_2 propuestas son las correctas y que además en el resto del desarrollo no existe error alguno.

Es común encontrar desarrollos en los que el alumno comete un error que lo desvía del camino correcto y más adelante comete otro que lo regresa y lo conduce a las soluciones acertadas; sin embargo este no es el caso; aquí no hay un segundo error. ¿Por qué entonces las soluciones que el alumno plantea son justamente las raíces de (1)?

Podría ahora pensarse que por coincidencia, en este caso particular el error cometido por el alumno no lo desvió de las raíces de la ecuación, sin embargo, está usted invitado a que cambie los coeficientes en (1) y que a propósito cometa el supuesto error atribuible al alumno y sin embargo en las expresiones (9) y (10) obtendrá las raíces de la ecuación (1) modificada. Lógicamente, esta observación lo inducirá a intentar la generalización del proceso. Hagámoslo. Sean a y b números reales, con $a \neq 0$.

$$ax^2 = -bx \qquad (1')$$

$$ax^2 + bx = 0 \qquad (2')$$

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} \qquad (3')$$

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} \qquad (4')$$

$$ax + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4}} \qquad (5')$$

$$ax + \frac{b}{2} = \pm\frac{b}{2} \qquad (6')$$

$$ax = -\frac{b}{2} \pm \frac{b}{2} \qquad (7')$$

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \frac{b}{2}}{a} \qquad (8')$$

$$x_1 = \frac{-\frac{b}{2} + \frac{b}{2}}{a} = \frac{0}{a} = \boxed{0} \qquad (9')$$

$$x_2 = \frac{-\frac{b}{2} - \frac{b}{2}}{a} = \frac{-b}{a} \qquad (10')$$

Encontramos en (9') y (10') justamente las raíces de la ecuación (1'). ¿Qué ocurrió entonces? Es fácil percatarse de que, si bien el trinomio cuadrado perfecto que resulta del desarrollo del primer miembro de (4'), que es

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4},$$

no es igual al primer miembro de (3'), que es

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4},$$

es innegable que (4') es equivalente a (1') y por lo tanto a (2') y a (3'). Para convencerse de ello basta el siguiente desarrollo:

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$$

$$a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4}$$

$$a^2x^2 + abx = 0$$

y luego, dividiendo por a tendremos

$$ax^2 + bx = 0, \quad \text{de donde}$$

$$ax^2 = -bx, \quad \text{que es } (1').$$

Por todo lo anteriormente expuesto, desde el punto de vista de la matemática pura, formal y rigorista, el alumno en cuestión, en su desarrollo, no ha cometido error alguno, ya que ha seguido una secuencia irrefutable de ecuaciones equivalentes.

Sin embargo, como mencioné en el segundo párrafo de este artículo, desde la óptica de la matemática educativa el asunto no queda en el nivel de esas simples conjeturas frías y rigoristas; sobre todo tratándose de evaluación. Aquí fue indispensable la entrevista al alumno para definir explícitamente cuál fue el razonamiento que aplicó en el paso de (3) a (4), entrevista en la cual quedó de manifiesto que había considerado el primer miembro de (3) como un trinomio cuadrado perfecto cuya factorización era el primer miembro de (4). Convencido el alumno de su error y habiendo retroalimentado la información que tenía en torno a la aplicación del procedimiento de completar el trinomio cuadrado perfecto, se tuvieron los elementos suficientes para asignar una calificación.

Sin embargo, bien pudo haber ocurrido que el alumno hubiese estado convencido de la equivalencia de las ecuaciones y de que no había trinomio cuadrado perfecto. ¿Cómo procedería usted, paciente lector, al calificar ese reactivo si en ello estuviera la decisión de aprobar o reprobar a un alumno en un curso semestral o anual? Suponga que la entrevista ya no es posible porque el alumno ya se retiró y la calificación debe ser entregada a la oficina ese mismo día; o porque el sistema es abierto y el alumno volverá dentro de 15 días; o porque el sistema es de educación a distancia y el paquete de exámenes se hizo llegar a usted a través del correo, o por cualesquiera otros motivos.

Tratando de ahondar en el asunto, apliqué una encuesta a 33 profesores de matemáticas de los niveles medio y superior, en la que se presentaba la secuencia (1) a (10) y se pedía que se asumiera la actitud de evaluador. Lo que sigue es el resumen de los resultados:

a) nueve de los encuestados no asignaron calificación, limitándose a hacer comentarios o a marcar errores en el desarrollo.

b) Las 24 calificaciones registradas son las siguientes:

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.4, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.6, 0.7, 0.75, 0.75, 0.8, 1, 1, 1, 1, 1,

cuyo promedio es 0.48.

c) Algunos comentarios resultan interesantes, por lo que se sintetizan a continuación:

— "...una de las respuestas es correcta, por eso asignó 0.5...".
— "...(3) y (4) no son equivalentes. Le presentaría al alumno otro ejercicio para que se dé cuenta de que el procedimiento seguido no funciona...".
— "...la combinación de símbolos ± es un error de escritura...".
— "...comete un grave error y de casualidad le sale el resultado...".
— "...hay error en los pasos (3) y (4)...".
— "...hay error en el paso de (3) a (4)...".
— "...es coincidencia que llegue a las raíces; se pueden construir casos similares en que esto no ocurra...".
— "...le asigno calificación de 1, pero le pediría que justifique el proceso que siguió...".
— "...las fallas son fáciles de subsanar...".
— "...está mal factorizado...".
— "...la solución $x = 0$ fue por pura casualidad...".
— "...ninguna de las soluciones que propone es correcta...".
— "...todo el desarrollo está equivocado...".
— "...el resultado es equivocado...".
— "...la respuesta es correcta tomando en cuenta el enunciado del reactivo...".
— "...le asigno calificación de 1, pero entrevistaría al alumno...".