

Desempeño y estrategias en la estimación en operaciones aritméticas

De alumnos de quinto de primaria y segundo de secundaria en México

Los autores desean agradecer el apoyo brindado por las siguientes instituciones: University of Missouri Research Council, Fulbright Fellowship Program, y el Centro de Investigación en Matemáticas. También agradecemos el apoyo brindado por Martha Fabiola Carrillo, de la Secretaría de Educación Cultura y Recreación del Estado de Guanajuato, para hacer posible la recolección de los datos.

Los siguientes alumnos de la Facultad de Matemáticas dieron ayuda invaluable para recolectar y revisar datos: Ramón Cedillo, Livier Guzmán, José Luis Laguna, Jovita Lerma, César Mirabal, Francisco Mirabal, Rubén Pérez Lara, Fernando Ponce.

Especial reconocimiento a Alicia de la Macorra, quien ayudó de muchas maneras a lo largo de toda la investigación.

Introducción

Antecedentes

El objetivo de la estimación en operaciones aritméticas o estimación computacional es obtener de manera mental y rápida un resultado aproximado cuando sea

más apropiado que realizar un cálculo exacto. La importancia de la estimación computacional ha sido reconocida en varios países, incluyendo Estados Unidos, Inglaterra, y Japón. Ha sido enfatizada por organizaciones profesionales importantes en recomendaciones curriculares (National Council of Teachers of Mathematics,

Alfinio Flores Peñafiel
Centro de Investigación en
Matemáticas

Apartado Postal 402
Guanajuato, Gto. México

Barbara J. Reys

Robert E. Reys
University of Missouri
Columbia, Mo. USA

1989; National Council of Supervisors of Mathematics, 1989; Conference Board of the Mathematical Sciences, 1982). Sin embargo, en las escuelas mexicanas no se enseña la estimación en operaciones aritméticas, ni ha sido un área de investigación explorada en este país. Es nuestro deseo que esta investigación con alumnos mexicanos contribuya al conocimiento internacional acerca de este tipo de estimación. Además, comprender los procesos de estimación computacional de los estudiantes mexicanos puede ayudar al desarrollo de materiales de enseñanza apropiados y la inclusión de la estimación en operaciones aritméticas en cursos de actualización para profesores de matemáticas, así como a ayudar a influir en programas nacionales y estatales en México.

Investigaciones previas. Hay que realizar investigaciones para construir una teoría acerca de cómo realizan los alumnos la estimación computacional y cuáles son las técnicas exitosas. Es difícil diseñar una teoría general que describa completamente los complejos procesos mentales que utilizan los alumnos al hacer estimación computacional. Tal vez sea más fructífero sugerir una serie de teorías parciales que describan y pronostiquen razonablemente un conjunto limitado de observaciones.

Investigaciones anteriores en Estados Unidos proporcionaron el principio de una teoría acerca de cómo realizan estimaciones los buenos estimadores (Reys, Bestgen, Rybolt y Wyatt, 1982). Se identificaron características de los buenos estimadores, y una serie de procesos cognitivos generales utilizados por ellos, como los de reformulación, traducción, y compensación. También se identificaron y clasificaron estrategias específicas, pocas de las cuales se enseñan en los programas de matemáticas, y que en su mayor parte han sido desarrolladas o descubiertas por los mismos alumnos. Se encontró que las estrategias y los procesos de estimación usados son similares en todos los grados. Posteriormente, un estudio semejante realizado en Japón (Reys, Reys, Nohda, Ishida, Yoshikawa y Shimizu, 1989), arrojó resultados similares.

Elementos teóricos. Los siguientes son los procesos cognitivos generales usados en la estimación computacional (Reys *et al.*, 1982):

La reformulación consiste en un cambio de los datos numéricos dejando intacta la estructura del problema. Los procedimientos más usados son: operación frontal, enfocarse sobre los dígitos principales y determinar luego el valor posicional; redondear al más próximo múltiplo de diez, cinco, cien; sustituir números, tal como usar un número compatible con otros datos, para operar fácilmente; usar una forma equivalente del número.

Ejemplos:

Datos originales	reformulados
87 419	8
92 765	9
90 045	9
81 974	8
+ 92 102	+ 9
	44 ó 45, la suma es 450 000
8 127 $\overline{474257}$	8 000 $\overline{480 000}$
	(48 es compatible con 8)
347 • 6/43	350 • 6/42
	(42 es compatible con 6)

La traducción consiste en cambiar la estructura matemática del problema, por ejemplo: procesar los valores numéricos en un orden diferente al dado, que sea matemáticamente equivalente; cambiar los números; cambiar las operaciones dadas en el problema para formar un problema equivalente.

347 • 6/43	→	347 • (6/43)
31 • 68 • 296	→	30 • 70 • 300 → 21 • 30 000
87 419		
92 765		
90 045	→	5 • 90 000
81 974		
+ 98 102		

La compensación son los ajustes hechos para reflejar variaciones en los números debidas a reformulación o traducción. Hay

dos tipos, la compensación final y la compensación intermedia. En el primer caso, el estimador ajusta al terminar el proceso, en la compensación intermedia los ajustes se van haciendo durante el proceso, para corregir de manera sistemática los errores.

Características de los buenos estimadores: recuerdan rápida y exactamente los resultados básicos para todas las operaciones; tienen un buen sentido de cómo el valor posicional es afectado por las diferentes operaciones aritméticas; cambian los datos numéricos a una forma manejable mentalmente; hacen uso rápido y eficiente de cálculos mentales para producir información numérica precisa con la cual formular estimaciones; tienen habilidad y persistencia para ajustar una estimación inicial para reflejar variación numérica debida a traducción o reformulación; realizan cambios tanto en los números como en la estructura matemática del problema; conocen y usan propiedades tales como la conmutativa, asociativa, distributiva; conocen el orden de las operaciones; escogen rápidamente de entre varias estrategias; comprenden el concepto de estimación, lo que les permite estar cómodos con cierto error; muestran confianza en sí mismos (Reys *et al*, 1982).

En el estado de Guanajuato aproximadamente un tercio de los alumnos están en el sistema estatal. El índice de deserción es todavía elevado. Sólo 65% de los alumnos terminan la primaria. Aproximadamente 70% de los que terminan la primaria continúan con la secundaria y sólo 70% de éstos la terminan. El sistema estatal ha implantado cerca de 400 tele-secundarias, en donde un sólo maestro enseña todas las materias en un grado, incluyendo matemáticas, ciencias naturales, ciencias sociales, español, inglés. Cerca de 85% de los maestros en las tele-secundarias no cuentan con una preparación especial como maestros de matemáticas.

Propósito

Son dos los propósitos de este estudio. Uno es explorar y determinar las habilidades de estimación computacional que

tienen los alumnos mexicanos. El segundo es contribuir al desarrollo de un marco conceptual que caracterice los procesos de pensamiento usados por los alumnos para hacer estimación computacional. Se pensó que si un estudio similar realizado en México, que es muy diferente tanto cultural como educativamente de Estados Unidos y de Japón, arrojaba resultados similares, esto contribuiría a la generalizabilidad del marco anterior. Específicamente, este estudio fue diseñado para identificar y describir los procesos de estimación computacional usados por los mejores estimadores en los grados 5o. de primaria y 2o. de secundaria, y caracterizar las estrategias de pensamiento y técnicas que usan estos alumnos al estimar. El marco conceptual construido a partir de estas entrevistas con alumnos mexicanos, fue comparado con el modelo teórico anterior propuesto para describir los procesos usados por los buenos estimadores en los Estados Unidos y en Japón.

Método

Procedimientos

El diseño básico de investigación está tomado del modelo usado en las investigaciones anteriores (Reys *et al*, 1962; Reys *et al*, 1989). Se aplicó un examen de estimación, en días regulares de clase a 432 alumnos para buscar alumnos que tienen buenas habilidades de estimación. El 5% de los alumnos de segundo de secundaria (8 alumnos) que obtuvieron las mejores calificaciones fueron considerados los "buenos estimadores" y fueron los escogidos para las entrevistas en las que se basa el reporte. Se pretendía usar el mismo criterio con los alumnos de 5o. de primaria, pero su desempeño en el examen de estimación fue demasiado bajo, y en consecuencia las entrevistas en este grado se limitaron a dos alumnos. Todas las entrevistas se condujeron en las tres semanas siguientes a la aplicación del examen de estimación.

Sujetos

Doce diferentes escuelas (6 primarias y 6 secundarias), y un total de 255 alum-

nos de 5o. de primaria y 177 de segundo de secundaria participaron en esta investigación. Todas las escuelas están dentro del estado de Guanajuato, y pertenecen al sistema estatal. Se seleccionaron distritos escolares de manera que estuviera representada una amplia gama de estratos socio-económicos. La tercera parte de las escuelas están en la ciudad de Guanajuato, capital del estado y sede de la Universidad del estado y de dos instituciones para profesores. Otro tercio de las escuelas fue escogido en León, que tiene una población superior al millón de habitantes y es la mayor concentración urbana y el centro industrial más grande en el estado. El tercio restante fueron escuelas rurales situadas en Silao. Todas las escuelas están a una distancia menor de 60 km de la ciudad de Guanajuato. La mitad de las secundarias escogidas son tele-secundarias, y la otra mitad secundarias directas. Se escogieron escuelas tanto matutinas como vespertinas. Las escuelas fueron seleccionadas al azar en cada distrito. Una vez seleccionada la escuela, se escogió aleatoriamente un grupo en la escuela para que participara en la investigación. El tamaño de los grupos varió de 31 a 54 alumnos en 5o. de primaria, y de 20 a 43 en segundo de secundaria. Las edades de los alumnos variaron entre 10 y 12 años en 5o. de primaria, y entre 12 y 17 en 2o. de secundaria.

Instrumentos

Examen de estimación. Se utilizaron 38 preguntas de respuesta abierta. 25 son ejercicios de operación directa (con sólo datos numéricos) y fueron tomados directamente del examen de estimación computacional (Reys *et al*, 1980). Trece son problemas de aplicación (aquellos que contienen datos numéricos inmersos en un contexto de la vida real) y fueron modificados ligeramente para adecuarlos a los alumnos mexicanos (por ejemplo cambiar precios de dólares a pesos), y se agregaron otros que los investigadores consideraron particularmente interesantes, tal como el reactivo $12/13 + 7/8$ del segundo estudio nacional hecho en los Estados Uni-

dos (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist y Reys, 1980).

Las 38 preguntas se pusieron sobre transparencias de 35 mm y se mostraron con un proyector. De esta forma se pudo aplicar el examen en grupo y controlar el tiempo de respuesta (12-15 segundos) para cada pregunta. Aunque se incluyen las cuatro operaciones aritméticas, la mayoría de las preguntas involucran multiplicación y división. Unos ejercicios involucran fracciones y decimales, pero la mayoría involucra números naturales.

Para el formato de respuesta abierta se construyeron intervalos de respuesta aceptables, discutiendo cada pregunta. Los intervalos varían en tamaño y fueron adecuados para cada pregunta. En todos los casos los intervalos contienen la respuesta exacta.

Al finalizar el examen de estimación, las siguientes dos preguntas que se enfocan en la percepción que tienen los alumnos de sí mismos como estimadores: "¿Eres un buen estimador?", "¿Consideras que la estimación es importante?" En cada una de estas preguntas había tres opciones (sí, no, no sé), y se pidió a los alumnos escogieran la que mejor reflejara sus sentimientos.

En cada escuela se usó un conjunto estándar de instrucciones para la aplicación del examen. A los alumnos se les dijo que se trataba de un examen de estimación. El significado de la palabra estimación fue explicado cuidadosamente, usando palabras o frases equivalentes tales como "aproximar", "obtener un resultado aproximado", "no la respuesta exacta, sino más o menos". Se les dijo a los alumnos que tendrían entre 12 y 15 segundos en cada problema para hacer su estimación y 5 más para apuntar la respuesta. También se les dijo a los alumnos que no copiaran el problema y que hicieran la estimación mentalmente. Antes de empezar el examen se proporcionaron dos ejemplos para ayudar a los alumnos a familiarizarse con el formato y con la restricción de tiempo para cada pregunta. Después de cada ejemplo se les dio a los alumnos el intervalo de respuestas aceptables y se les dijo que cualquier respuesta dentro del intervalo sería

considerada una respuesta aceptable. No hubo enseñanza alguna de procesos de estimación durante la explicación del examen, ni discusión de los criterios usados para establecer los intervalos aceptables. Los ejemplos permitieron que los alumnos se ubicaran de modo que pudieran ver claramente la pantalla y aclarar cualquier duda con respecto al examen.

Protocolos de entrevista. Diez problemas, cuatro de cálculos directos y seis aplicados, fueron formulados para la entrevista, cinco de los cuales aparecieron en el examen de estimación. Los diez problemas aparecen en la Tabla 1. Estas preguntas fueron revisadas para ver la concordancia con los programas nacionales de matemáticas y fueron juzgadas apropiadas para 5o. de primaria y 2o. de secundaria. Se permitió todo el tiempo necesario para que los alumnos entrevistados formularan su estimación y describieran cómo la habían realizado, a fin de entender el proceso de pensamiento de cada alumno tanto como fuera posible.

Para asegurar consistencia en las entrevistas, se desarrollaron preguntas específicas para los entrevistadores, las que fueron conjuntadas en un paquete. Se realizaron sesiones de entrenamiento con los entrevistadores usando entrevistas video-grabadas con alumnos, así como discusión de técnicas de entrevista. Los entrevistadores también condujeron entrevistas piloto las que se discutieron y clarificaron antes de conducir las entrevistas.

Se condujeron entrevistas individuales con 10 de los mejores estimadores (dos de 5o. grado y ocho de 2o. de secundaria), a fin de indagar las estrategias y procesos usados al estimar. Se pidió a los alumnos que describieran tanto como fuera posible las estrategias y procesos de pensamiento que usaron para llegar a sus estimaciones en cada una de las diez preguntas de la entrevista. Después de dos entrevistas de prueba con los alumnos de 5o. grado se decidió no continuar con las entrevistas en este grado. Los alumnos de 5o. tuvieron dificultades con cada una de las preguntas del examen y carecían de conocimiento conceptual suficiente para establecer técnicas de estimación.

TABLA 1
PREGUNTAS
DE LA ENTREVISTA

Cálculos directos:

1. $87\ 419$
 $92\ 765$
 $90\ 045$
 $81\ 974$
 $+ 98\ 102$
2. $8\ 127 \mid 474\ 257$
3. $12/13 + 7/8$
4. 486×0.24

Cálculos aplicados:

5. ¿Como cuánta área tiene este rectángulo? (Dibujo de un rectángulo marcado 28 por 47).
6. Si 30% de los aficionados compran un refresco, ¿como cuántos refrescos se venderán? (Letrero: ASISTENCIA: 54,215).
7. Las concesiones de la Serie Mexicana de Beisbol tuvieron ingresos por \$21 319 908. Si esto se divide en partes iguales entre los 26 equipos, ¿como cuánto recibe cada equipo?
8. Esta es una nota de una tienda que no ha sido sumanda. Estima el total.

79
79
44
130
34
105
57
29
65
30
31
429
11
34
8

9. Estima el descuento para esta chamarra. (Letrero: 15% descuento, precio: \$28,000).
10. El alumno se equivocó en dos de estos problemas. ¿Cuál respuesta es razonable?

$$\frac{4}{9} + \frac{5}{10} = 1 \frac{5}{90}$$

$$\frac{5}{8} + \frac{4}{7} = \frac{8}{15} \quad \frac{8}{15} + \frac{11}{20} = 1 \frac{1}{12}$$

La duración de las entrevistas fue de 35 a 80 minutos por alumno. Las entrevistas fueron video grabadas y se transcribieron los comentarios de los alumnos particularmente interesantes e iluminadores. Después de la entrevista los investigadores se reunieron con los entrevistadores para revisar las cintas, discutir y categorizar las técnicas y estrategias usadas en cada pregunta, y completaron la forma de reporte de la entrevista.

Resultados

Examen de estimación

Las Tablas 2 y 3 resumen las calificaciones totales del examen de estimación de 38 preguntas para los alumnos de 2o. de secundaria y 5o. año de primaria, respectivamente. El examen fue muy difícil para ambos grados. En el 5o. grado las calificaciones variaron entre 0 y 7, con una media de 1.1, y desviación estándar de 1.5. En 2o. de secundaria las calificaciones variaron entre 0 y 18, con una media de 4.0, y desviación estándar de 3.2. Hubo una diferencia significativa ($p < 0.01$) entre los grados.

TABLA 2
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS
2o. SECUNDARIA

Calificación	Frecuencia	Por ciento
0	14	7.9
1	26	14.7
2	35	19.8
3	19	10.7
4	23	13.0
5	14	7.9
6	9	5.1
7	15	8.5
8	6	3.4
9	8	4.5
10	1	0.6
11	0	0
12	3	1.7
13	2	1.1
14	0	0
15	0	0
16	1	0.6
17	0	0
18	1	0.6

TABLA 3
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS
5o. DE PRIMARIA

Calificación	Frecuencia	Por ciento
0	121	47.5
1	58	22.7
2	39	15.3
3	12	4.7
4	10	3.9
5	12	4.7
6	2	0.8
7	1	0.4

No hubo diferencias significativas ($p > 0.4$) en el desempeño entre alumnos y alumnas, en contraste con diferencias encontradas en desempeño en estimación entre sexos a lo largo de diferentes edades en estudios conducidos en Estados Unidos (Reys, Bestgen, Rybolt y Wyatt, 1982; Rubenstein, 1985).

El examen de estimación fue la herramienta utilizada para identificar buenos estimadores. Aunque el foco de este artículo son las entrevistas, los resultados del examen proporcionan una rica fuente de información. Hubo muchos patrones de desempeño similares entre los grados 5o. de primaria y 2o. de secundaria. Hay una correlación de 0.87 entre las dificultades de las preguntas entre los grados en el examen de estimación. Los alumnos de ambos grados se desempeñaron mejor en los problemas aplicados que en los de cálculos directos. Por ejemplo, cuatro de las preguntas más fáciles para 5o. de primaria y 2o. de secundaria fueron problemas aplicados.

Cuatro preguntas no fueron contestadas correctamente por nadie en 5o. grado, lo mismo que una pregunta en 2o. de secundaria. Ninguna pregunta fue contestada correctamente por una mayoría de alumnos. Los niveles de desempeño en cinco de las preguntas más difíciles se muestran en la Tabla 4, los de cinco de las más fáciles en la Tabla 5, y las preguntas mismas se muestran en las Tablas 6 y 7, respectivamente. Se incluyen diferentes operaciones con números naturales, frac-

TABLA 4

PORCENTAJE DE
RESPUESTAS
CORRECTAS EN CINCO
DE LAS PREGUNTAS
MÁS DIFÍCILES DEL
EXAMEN DE ESTIMACIÓN

Pregunta	5o. primaria	2o. secundaria
A.	0	0
B.	0	2.2
C.	0.8	0.6
D.	0.8	3.4
E.	1.6	3.4

ciones y decimales en las Tablas 6 y 7 que proporcionan una perspectiva global del desempeño de los alumnos. Las tres preguntas que fueron contestadas correctamente por más del 10% de los alumnos de 5o. y las tres preguntas que fueron contestadas correctamente por más del 25%

TABLA 5

PORCENTAJE DE
RESPUESTAS
CORRECTAS EN CINCO
DE LAS PREGUNTAS
MÁS FÁCILES DEL
EXAMEN DE ESTIMACIÓN

Pregunta	5o. primaria	2o. secundaria
F.	10.2	37.8
G.	20.0	37.3
H.	12.6	30.0
I.	4.7	22.0
J.	2.4	16.4

de los de secundaria se muestran en la Tabla 5. El intervalo para estimaciones aceptables para cada pregunta se muestra también.

Un resumen de las respuestas a las preguntas: "¿Eres tú un buen estimador?" y "¿Piensas que la estimación es importan-

TABLA 6

CINCO DE LAS PREGUNTAS MÁS DIFÍCILES CON LOS
INTERVALOS USADOS PARA ESTIMACIONES
ACEPTABLES

A. 87 419 92 765 90 045 81 974 + 98 102 (430 000 - 460 000)	B. $0.7 + 0.002 + 0.81$ (1 - 2)	C. 98.6×0.041 (3.5 - 4.1)
D. $12/13 + 7/8$ (1.5 - 2)	E. Estima el número de km por litro Recorrido: 1322 km. Usado: 48 l de gasolina. (20 - 30)	

TABLA 7

CINCO DE LAS PREGUNTAS MÁS FÁCILES CON LOS
INTERVALOS USADOS PARA ESTIMACIONES
ACEPTABLES

F. Estima la distancia total $\frac{39}{99} \frac{37}{200}$ (160 - 200)	G. 8) 713 (70 - 100)
H. 4×7.47 (28 - 32)	I. 61.3×0.8 (48 - 61.3)
J. Estima la diferencia en habitantes. (8000 - 9000)	Paracho 12 367 Mitla 3 788

TABLA 8

PORCENTAJES DE LAS RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS A LAS PREGUNTAS DE ACTITUDES RELACIONADAS CON ESTIMACIÓN

Pregunta	Grado	Si	No	No sé	Sin respuesta
¿Eres un buen estimador?	5o. Prim.	31.0	20.8	28.4	20.8
	2o. Sec.	15.2	28.8	53.7	2.3
¿Piensas que la estimación es importante?	5o. Prim.	70.6	10.2	4.7	14.5
	2o. Sec.	91.0	4.5	2.3	2.2

te?" se muestra en la Tabla 8. Es interesante que un porcentaje alto de estudiantes en cada grado dijo que la estimación es importante, y que sólo unos cuantos se calificaron a sí mismos como buenos estimadores.

Se definió operativamente como buenos estimadores a aquellos alumnos cuyas calificaciones en el examen estuvieron en el 5% más alto. Debido a las bajas calificaciones en ambos grados, se debe entender que el término "buen estimador" usado para describir a los alumnos entrevistados en este estudio es relativo a este grupo de alumnos y a este cuestionario.

Los investigadores decidieron entrevistar al 5% de los alumnos de segundo de secundaria con las mejores calificaciones, lo que dio como resultado ocho entrevistas con alumnos que obtuvieron 10 o más en el examen de estimación. Como se mencionó antes, las entrevistas con los alumnos de 5o. de primaria no fueron productivas, por lo que sólo se discuten los datos de las entrevistas con los buenos estimadores en 2o. de secundaria.

Entrevista

Observaciones generales. Después de las entrevistas se estudiaron las formas de resumen de la entrevista de cada alumno, y se compiló una lista de estrategias para cada una de las diez preguntas. Usando las formas de resumen de cada alumno y el resumen por pregunta, se compiló una lista de observaciones generales:

- El redondeo fue usado rara vez como estrategia para estimar.

- La operación frontal fue la técnica más común. Esta estrategia se aplicó en todas las preguntas con números naturales (suma, multiplicación y división) por al menos uno de los alumnos.
- La idea de números compatibles nunca fue verbalizada pero fue revelada ocasionalmente en las entrevistas.
- El uso de puntos de referencia fue evidente en muchas entrevistas, en especial en las preguntas relacionadas con porcentaje.
- Varios alumnos hicieron cálculos mentales para obtener una respuesta exacta en vez de una estimación. Errores frecuentes, tanto de procedimiento como de cálculo, ocurrieron al calcular mentalmente.
- Concepciones erróneas sobre decimales y fracciones frecuentemente conducían a basarse en procedimientos algorítmicos de papel y lápiz aplicados mentalmente para dar una estimación.
- Fue evidente la comprensión conceptual de por ciento lo que condujo a un eficiente uso de puntos de referencia al estimar con porcentos.
- Los alumnos consistentemente tuvieron dificultades para responder a la pregunta: "¿Puedes pensar en otra forma de dar una estimación para este problema?"
- Se evidenciaron la reformulación, la traducción y la compensación en grados diversos durante las entrevistas.
- Los alumnos rara vez reflexionaron sobre sus estimaciones y por tanto rara vez se dieron cuenta de estimaciones poco razonables.
- Según los alumnos la estimación no se enseña, no se aprende, ni se usa en la

escuela, sino más bien en situaciones de tipo comercial fuera de las escuelas.

Estas observaciones generales serán discutidas usando ejemplos de las entrevistas para clarificar cada observación. Debido a limitaciones de espacio, sólo los reactivos que mejor describen y resaltan algunos de los procesos generales observados en las entrevistas se resumen y discuten aquí.

Uso de estrategias

Las entrevistas se caracterizaron por una limitada variedad de estrategias de estimación. Operación frontal, redondeo, números compatibles y uso de puntos de referencia fueron descritas por los alumnos, aunque ellos rara vez tenían un vocabulario conciso para discutir las técnicas utilizadas. La estrategia más común fue la de operación frontal. Por ejemplo, en la pregunta #1 (ver Tabla 1), un alumno describió la estrategia de esta manera: "Suma la primera columna, esto es $9 \times 3 + 8 + 8$ ó 43 así que es 430 000 pero en realidad un poco más, digamos 450 000". Como se ilustra, el alumno ajustó la estimación inicial de operación frontal. No parece que hubiera un procedimiento específico para hacer este ajuste, sino que refleja la intuición del alumno acerca del error de su estimación.

Sólo uno de los ocho alumnos dio una estimación dentro del rango aceptable. Las estrategias usadas y las estimaciones resultantes están resumidas en la Tabla 9.

Cuatro de los siete errores son de orden de magnitud, mientras que los otros 3 están ligeramente fuera del intervalo aceptable y probablemente deban ser tratados como estimaciones razonables.

La estrategia frontal fue también la más común para estimar el total de la nota de la tienda (pregunta #8), aunque tampoco dio como resultado un alto grado de éxito.

Sorprendentemente el redondeo fue una estrategia poco usada en las entrevistas. En la pregunta 1, ninguno de los 8 alumnos usó la estrategia de redondear cada sumando a la centena de millar o decena de millar más próxima. La pregunta 5 de la entrevista (estimar el área de un rectángulo de 28 por 47) es un candidato muy viable para usar redondeo. Sin embargo, sólo 3 alumnos emplearon esta estrategia (todos con éxito), mientras que 4 alumnos usaron cálculos mentales con los datos exactos para dar su "estimación" (tres sin éxito, uno con éxito). Un alumno interpretó el área como perímetro. En general la falta de uso de la estrategia de redondeo durante estas entrevistas contrasta con datos similares recolectados tanto en Estados Unidos como en Japón, donde los alumnos utilizaron ampliamente esta técnica enseñada en la escuela. Esto puede ser debido a que aunque el redondeo como habilidad es parte de los programas de México, la estimación sólo se ve en una lección en cuarto año, y para esta lección no se enseña ninguna estrategia específica. Así, a diferencia de los alumnos de Estados Unidos y de Japón, los de México no

TABLA 9

RESUMEN DE LOS DATOS DE LA ENTREVISTA PARA LA PREGUNTA 1

Estrategia	Frecuencia	Estimación	Tiempo (seg)
Frontal con ajuste	5	500 000	25
		450 000*	76
		42 000	30
		475	26
		500 000	24
Promediar	3	45 000	109
		550 000	16
		45 000	27

* Denota estimación dentro del intervalo aceptable establecido por los investigadores.

TABLA 10

**EJEMPLOS DE USO DE PUNTOS DE REFERENCIA
COMO ESTRATEGIA PARA ESTIMAR**

Pregunta de entrevista	Estimación	
7 21,319,908 ÷ 26	- 750 000	Si hubiera \$26 millones cada equipo obtendría \$1 millón, pero es menos así que obtienen menos de \$1 millón, cerca de 3/4 de millón.
9 15% DE 28,000	5000	100% es 28 000; 50% es la mitad ó 14 000 25% es otra vez la mitad ó 7000. 15% es menos así que se ajusta a 5000.
10 $\frac{4}{9} + \frac{5}{10} = 1 \frac{5}{90}$ $\frac{5}{8} + \frac{4}{7} = \frac{8}{15}$ $\frac{8}{15} + \frac{11}{20} = 1 \frac{1}{12}$		La primera respuesta no es razonable porque sumar algo menor que 1/2 a 1/2 debe dar algo menor que 1.

se sienten motivados a usar la estrategia de redondeo en problemas que perciben pueden ser estimados más fácilmente con otras técnicas.

El uso de puntos de referencia como una estrategia para estimar esta ilustrada con ejemplos presentados en la Tabla 10.

Cinco de los ocho alumnos entrevistados usaron esta idea de puntos de referencia en la pregunta 7, comparando el divisor (26) con los dígitos frontales del dividendo (21) y diciendo que debía ser menos que un millón. Los cinco continuaron dando una estimación ajustada menor que un millón.

Una de las estrategias más comunes para dar una "estimación" fue la de aplicar mentalmente un algoritmo de lápiz y papel. Este proceso fue la primera elección para algunos alumnos. De hecho el alumno que obtuvo la máxima calificación en el examen de estimación usó consistentemente esta estrategia en la entrevista. Para otros alumnos esta estrategia era el último recurso cuando no encontraban ningún otro método. Los alumnos tuvieron poco éxito con esta estrategia, en parte porque los problemas de la entrevista eran muy tediosos y en parte por su propia falta de habilidad para calcular mentalmente. En vez de aplicar un algoritmo mental eficiente, estos alumnos trataron de usar

mentalmente un algoritmo para lápiz y papel. En varios casos fue difícil determinar si el alumno era un buen estimador o no, ya que el alumno estaba mostrando su habilidad para calcular mentalmente más que su habilidad para estimar.

Comprensión conceptual de porciento, decimales y fracciones

El uso de puntos de referencia al hacer una estimación en los dos problemas que tratan con porciento (#6 y #9) resalta la comprensión conceptual de estos alumnos con respecto al porciento. Uno de los alumnos explicó el uso de puntos de referencia de la siguiente manera: "100% es 54 215, así que 50% es como 25 000. 30% es menos, como 18 000". Cuando se le preguntó que si podía hacer el problema de otra forma, el alumno respondió que se podía encontrar 1% y luego multiplicarlo por 30 pero que sería más difícil. Después del problema #6 se preguntó a los alumnos lo que sabían acerca del número 30%. Todos menos uno respondieron que era menos que 1/2 (ó 50%) y más que 1/4 (ó 25%). Aunque la mayoría de los alumnos reconocieron y verbalizaron estas relaciones, no las usaron al estimar. Por ejemplo, un alumno produjo una estimación inicial de 1500 usando operación frontal ($30 \times 5 = 150$) y luego le anexó un

TABLA 11

RESUMEN DE LOS DATOS PARA LA PREGUNTA #3
 Problema: $12/13 + 7/8$

Estrategia	Frecuencia	Estimación(es) producidas	Tiempo (seg)
Usa la idea de "números especiales" (cada sumando cerca de 1)	1	$1 \frac{3}{4}$	49
Aplica correctamente el algoritmo de lápiz y papel (con y sin errores computacionales)	4	193/104*	120
		103/204	38
		100/104	29
		160/104*	129
Aplica incorrectamente el algoritmo de lápiz y papel (mentalmente)	3	20/20	50
		90/100	32
		9/21	15

* Denota estimación dentro del intervalo aceptable establecido por los investigadores.

cero), luego ajustó a 2000 como estimación final. Este alumno nunca se dio cuenta del error en el orden de magnitud aunque cuando se le preguntó dijo que 30% podía ser representado por una fracción, cerca de $\frac{1}{4}$, también que es menos que $\frac{1}{2}$ pero más que $\frac{1}{4}$. Esta falta de reflexión sobre las estimaciones fue común.

Mientras que la comprensión conceptual ayudó en el proceso de estimar con porcentajes, la falta de comprensión conceptual limitó severamente la habilidad de los alumnos de estimar con decimales y fracciones. Las Tablas 11 y 12 proporcionan un resumen de los resultados de las preguntas de la entrevista #3 (suma de fracciones) y #4 (multiplicación decimal).

En el problema #3 de fracciones un alumno notó la proximidad de cada su-

mando a 1 y estimó la suma como $1 \frac{1}{2}$. Es interesante que le llevó al alumno casi 50 segundos notar y verbalizar esta relación. De hecho durante el examen de estimación, donde el tiempo estuvo limitado a 12 segundos, el alumno recurrió a un método algorítmico de sumar los numeradores y denominadores para dar una estimación de $19/2$. Para este alumno, y tal vez otros, se necesitó tiempo para examinar cuidadosamente los valores antes de que se diera una estimación. Por otro lado, 7 de los 8 alumnos aplicaron mentalmente el algoritmo de lápiz y papel enseñado en las escuelas o una versión errónea de él para dar su "estimación". Por ejemplo, una alumna dio la estimación de $193/104$ después de más de dos minutos de trabajo mental (la respuesta exacta es $187/104$ ó

TABLA 12

RESUMEN DE LOS DATOS PARA EL PROBLEMA 4
 Problema: 486×0.24

Estrategia	Frecuencia	Estimación(es) producidas	Tiempo (seg)
Operación frontal (24×4 ó 2×4)	1	960	69
Redondeo compatible ($1/4$ de 486)	1	450	39
Aplicó algoritmo lápiz papel (mentalmente)	4	98.64	37
		486	58
		$\times 0.24$	25
			45
No se entendió la estrategia verbalizada	2	27	156
		35	57

Nota: Ninguna de las estimaciones producidas está dentro del intervalo de respuestas aceptables fijado por los investigadores.

183/104). Ella describió su estrategia como aplicar mentalmente el algoritmo escrito aprendido en la escuela ($ad + bc$)/ bd . Esta alumna nunca dio ninguna señal de que viera que cada sumando estaba cerca de 1 o de 2 que su respuesta estuviera cerca de 2.

De manera similar en el problema #4 ninguno de los alumnos dio una estimación razonable ni en el examen de estimación ni durante la entrevista. La técnica más común usada para este problema fue aplicar mentalmente un algoritmo escrito. Esta estrategia fracasó en todos los casos. Una de las preguntas de indagación para este problema fue "cuando ves el número decimal 0.24, ¿en qué piensas?" Cuatro de los alumnos dijeron que 0.24 es aproximadamente $\frac{1}{4}$, sin embargo los otros cuatro expresaron claramente su preocupación por el punto decimal. Un alumno respondió que al terminar su respuesta tenía que mover el punto decimal. Otro respondió que tenía que recordar separar dos números para colocar el punto decimal.

Flexibilidad y posesión de estrategias alternativas

Después de responder a las preguntas 1, 4, 6 y 9 se les preguntó a los alumnos si podían pensar en otra forma de hacer una estimación. La respuesta más común fue enunciar otra vez la estrategia usada o alguna extensión de ella, por ejemplo usar dos dígitos en la operación frontal en vez de usar sólo el dígito principal, o que se podía obtener una estimación usando lápiz y papel. En la pregunta 9 que se presta para estrategias múltiples, cinco de los alumnos respondieron que no podían pensar en ninguna otra forma de hacer la estimación. Cada uno de los tres restantes dio una estrategia alternativa. Ocasionalmente un alumno mostraba flexibilidad enunciando una variedad de estrategias alternativas. Por ejemplo para el problema 1, después de aplicar una estrategia de promediar ($5 \times 90\,000$), la alumna dijo que se podían agrupar pares de sumandos y luego sumar esos pares para hacer una estimación (agrupación compatible), sumar los números de enfrente y determinar el valor posicional (operación frontal),

o aplicar la estrategia de promedio multiplicando $5 \times 100\,000$ luego ajustando hacia abajo (variación de la estrategia original). La habilidad de esta alumna para formular estrategias de estimación alternativas muestra su sentido numérico y es una de las características principales de los buenos estimadores (Reys, *et al*, 1982). Desafortunadamente esta flexibilidad fue rara en las entrevistas. La misma alumna que describió estas estrategias alternativas frecuentemente prefería aplicar mentalmente técnicas de papel y lápiz al hacer estimaciones. Ella era una calculadora mental capaz pero no parecía estar dispuesta a usar técnicas más eficientes cuando el problema requería una estimación. El proceso de estimar requiere de una variedad de habilidades y actitudes y sólo cuando éstas se desarrollen y ejecuten será la estimación una herramienta poderosa para el alumno.

Procesos generales de estimación

Los tres procesos generales reformulación, traducción y compensación que fueron caracterizados anteriormente con una muestra en Estados Unidos (Reys, *et al*, 1982) fueron evidentes en estas entrevistas. La reformulación fue evidente en un grado limitado conforme los alumnos truncaban números para aplicar la operación frontal. El alumno que cambió 0.24 a $\frac{1}{4}$ en la pregunta #4, también estaba exhibiendo este proceso. Como se mencionó antes, el redondeo, la aplicación más común de reformulación fue usada rara vez durante las entrevistas. La traducción fue exhibida por tres alumnos en la pregunta 1 cuando aplicaron la estrategia de promediar. Uno de estos tres alumnos exhibió otra vez el proceso de traducción en la pregunta #6 conforme describía su estrategia de cambiar 30% a $\frac{1}{3}$ y luego dividir 54 000 entre 3. La traducción es una técnica más sofisticada que la reformulación, sin embargo fue evidente en estas entrevistas en un número limitado de alumnos.

La compensación fue utilizada por todos los alumnos al menos una vez y en todas las preguntas por al menos un alumno, excepto la pregunta #4. Por ejemplo,

un alumno usó la estrategia de puntos de referencia para reconocer inicialmente que el cociente $\$21\,319\,908 \div 26$ (pregunta #7) debe ser menor que un millón (comparó 26 con 21), luego ajustó la estimación a menos de 900 000 multiplicando mentalmente 26 por 9 y comparando el resultado con $213(9 \times 26 = 234)$. Finalmente dio una estimación de 800 000. Mientras que dio una razón matemática para el ajuste inicial (menos de 900 000) el ajuste final refleja su intuición acerca de una estimación razonable.

Un alumno claramente mostró y verbalizó el proceso de compensación intermedia en la primera pregunta de la entrevista. El explicó su estrategia de la siguiente manera: hacer el primer sumando 90 y el segundo 90, estos se compensan. Luego el tercero lo dejamos como 90 y los dos últimos cada uno 90, esos se compensan. Luego toma 90×5 ó 450 así que es 450 000.

Reflexionar sobre las estimaciones

Al igual que los alumnos de Japón y Estados Unidos, los alumnos mexicanos rara vez reflexionaron sobre sus estimaciones por iniciativa propia y rara vez reconocían estimaciones no razonables. Las ocasiones en que cambiaron su estimación fue cuando estaban describiendo oralmente su estrategia al entrevistador y se daban cuenta de su error. Es irónico que estos alumnos, tal vez los más capacitados para identificar resultados que no son razonables por su habilidad para estimar, no utilicen esta habilidad.

Conclusiones

Limitaciones

Uno de los propósitos de este estudio fue replicar investigaciones anteriores conducidas en Estados Unidos y en Japón en un país que fuera diferente tanto su cultura como en su sistema educativo, con el fin de ayudar a validar y generalizar el modelo que describe los procesos, estrategias y características de los buenos estimadores. Los resultados fueron alentado-

res, algunas de las estrategias y procesos descritos por el modelo fueron de hecho encontrados en alumnos mexicanos. Sin embargo, las observaciones y los resultados indican claramente que es necesario diseñar procedimientos e instrumentos de medición que estén de acuerdo con las costumbres escolares y la cultura de México.

El bajo desempeño de los alumnos en el examen de estimación, especialmente en 5o. de primaria, refleja el énfasis en los algoritmos para lápiz y papel y en respuestas exactas. El bajo desempeño también indica que los alumnos no desarrollan estrategias de estimación por sí mismos.

Esta investigación también resalta las dificultades que hay para medir las habilidades de estimación de los alumnos. Las observaciones y los resultados del examen sugieren muchos factores que pudieron afectar los bajos resultados de los alumnos mexicanos:

- Algunos de los alumnos no entendieron lo que significaba "estimar". Muchos alumnos trataron de usar mentalmente algoritmos escritos para obtener una respuesta exacta. Esto se reflejó en la cantidad de cifras "significativas" que muchos de los alumnos usaron para reportar sus respuestas.
- Los alumnos en México no están acostumbrados a exámenes en los que el tiempo disponible por pregunta es muy corto. En el examen de estimación sólo tenían de 12 a 15 segundos por pregunta.
- Los alumnos tampoco están acostumbrados a exámenes en los que los problemas no se pueden revisar. En el examen de estimación cada problema se proyectó en la pantalla sólo una vez.
- Muchos de los alumnos seguían trabajando en un problema durante más tiempo del permitido, perdiendo así los siguientes problemas.
- Muchos de los alumnos se sintieron frustrados por la rapidez con la que se sucedían las preguntas y su incapacidad de contestar. La frustración y el desaliento se manifestaron de varias maneras, algunos alumnos simplemente ya no intentaron contestar.

- Los alumnos no habían tenido antes un examen con un proyector de transparencias. Para muchos de ellos, esta era la primera vez que usaban uno en la escuela.
- Los alumnos no están acostumbrados a la presencia de visitantes en sus escuelas. El examen de estimación fue conducido por un equipo de tres o más personas, ninguna de las cuales era personal de la escuela.

El hecho de que algunos de los alumnos fueron capaces durante la entrevista, donde no hubo restricciones de tiempo, de contestar correctamente problemas que contestaron incorrectamente en el examen de estimación, apoya el hecho de que la restricción de tiempo fue un factor importante en el examen de estimación.

Modelo teórico

A pesar del bajo desempeño de los alumnos en el examen de estimación, éste fue útil para identificar a los mejores estimadores entre los alumnos de segundo de secundaria. Las entrevistas con estos buenos estimadores revelaron algunas de las mismas características, estrategias y procesos cognitivos que se encontraron en buenos estimadores en países con culturas y sistemas educativos tan distintos como Estados Unidos y Japón (Reys *et al*, 1989). Esta investigación proporciona una validación del marco general hipotético usado anteriormente para describir el proceso de estimación (Reys *et al*, 1982). Usando este modelo como base, se pueden desarrollar modelos más refinados que describan los procesos de estimación computacional de grupos específicos de alumnos (edad, talento, desempeño matemático). El modelo puede también ser enriquecido para tratar de predecir habilidades computacionales y desempeño de los alumnos de acuerdo con sus características de desarrollo (Sowder y Wheeler, 1989).

Implicaciones

El hecho de que las mismas características de los buenos estimadores que se encontraron en otros países, se encontraran

también en los alumnos mexicanos es importante. Esto significa que la experiencia que se ha obtenido en otros países en la enseñanza de la estimación puede ser usada en México.

Los resultados indican claramente que la estimación no se enseña ni se aprende en la escuela. Con respecto al currículum de matemáticas, se debe hacer un esfuerzo de proporcionar un mejor balance en la componente computacional en la primaria. Se debe dedicar menos tiempo a los algoritmos tradicionales escritos, y prestar atención cuidadosa a enseñar a calcular mentalmente y a estimar. No es suficiente que se prescriba calcular mentalmente y estimar. Los maestros deben contar con materiales educativos adecuados para la enseñanza de estos temas. Los libros de texto actuales, tanto de primaria como de secundaria deben ser revisados para reflejar un balance apropiado de alternativas computacionales. Se debe prestar cuidadosa atención a la preparación de maestros. Los maestros deben familiarizarse con diferentes estrategias de estimación y aprender a integrarlas de manera natural durante la enseñanza. No se sugiere que se enseñe estimación como un tema aparte, sino que sea integrada sistemáticamente para proporcionar experiencias de estimación regulares antes de la enseñanza de algoritmos escritos. Los maestros deben ayudar a los alumnos a decidir cuáles alternativas computacionales son apropiadas en ciertas situaciones (cálculo mental, algoritmo escrito o estimación). Los maestros deben también ayudar a los alumnos a aceptar respuestas aproximadas y a reconocer que en la estimación computacional no hay sólo una respuesta correcta.

Investigación adicional necesaria

Es necesario realizar investigación a lo largo de varias líneas. Se deben obtener mejores procedimientos de medición para obtener mediciones válidas del desempeño en estimación. Un examen con restricciones de tiempo tan estrictas como el que se usó en el presente estudio, puede no ser la mejor forma de medir el desempeño en estimación computacional en

México. Se deben explorar métodos alternativos. Sería también interesante investigar el efecto del tiempo en el desempeño y estrategias de estimación.

También es importante conducir investigación con alumnos mexicanos en otros grados, incluyendo alumnos menores que 5o. grado y mayores que 2o. de secundaria. Tal investigación puede proporcionar comprensión valiosa del crecimiento y desarrollo de las habilidades y los procesos de estimación de los alumnos en un periodo de tiempo. Otras direcciones de investigación que pueden ayudar a entender los procesos de estimación es estudiar más a fondo las técnicas que usan los alumnos con ciertas clases de números, tales como

números naturales, decimales, fracciones; así como las técnicas usadas con estos números con operaciones específicas.

Investigación relacionada con cálculo mental puede también arrojar luz sobre los procesos de estimación computacional, tales como determinar si hay una correlación entre el desempeño para calcular mentalmente y el desempeño en estimación; o investigación encaminada a identificar las estrategias de cálculo mental utilizadas por los alumnos.

Este estudio es sólo un primer paso para la comprensión de los procesos de estimación usados por los buenos estimadores, y para tratar de describir sus características.

Bibliografía

- CARPENTER, T.P., CORBITT, M.K., KEPNER, H.S., LINDQUIST, M.M. & REYS, R.E. (1980). Results and implications of the second NAEP mathematics assessment: Elementary school. *Arithmetic Teacher*, 27(8), 10-12, 44-47.
- CONFERENCE BOARD OF THE MATHEMATICAL SCIENCES. (1982). *The mathematical sciences curriculum K-12: what is still fundamental and what is not*. Washington, D.C.: National Science Foundation.
- NATIONAL COUNCIL OF SUPERVISORS OF MATHEMATICS. (1989). Essential mathematics for the twenty-first century: The position of the National Council for Supervisors of Mathematics. *Mathematics Teacher*, 82, 388-391.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- REYS, R.E., BESTGEN, B.J., RYBOLT, J.F., y WYATT, J.W. (1980). *Identification and characterization of computational estimation processes used by in-school Pupils and out-of-school adults*. (Reporte No. 79-0088). Washington, D.C.: National Institute of Education.
- REYS, R.E., BESTGEN, B.J., RYBOLT, J.F., y WYATT, J.W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, 183-201.
- REYS, R.E., REYS, B.J., NOHDA, N., ISHIDA, J., YOSHIKAWA, S., y SHIMIZU, K. (en prensa). Computational estimation performance and strategies used by fifth and eighth grade Japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education*.
- RUBENSTEIN, R.N. (1985). Computational estimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 106-119.
- SOWDER, J.T., WHEELER, M.M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 130-146.