

Método para analizar tareas multiplicativas tipo producto cartesiano

RESUMEN

Este artículo presenta el método general de análisis de tareas, aplicado al caso particular de tareas multiplicativas tipo producto cartesiano, desarrollado en la investigación "Patrones de Solución de Problemas Multiplicativos en Niños de 7 a 12 años", con la cual se intenta avanzar en la comprensión de las formas cómo los niños resuelven dichos problemas.

1. Introducción

Los conceptos y problemas que definen los contenidos de interés en una actividad investigativa, relacionada con el aprendizaje y la enseñanza de la matemática en la escuela primaria, deben considerarse desde tres puntos de vista, en forma integrada, a saber: desde el punto de vista práctico de la didáctica, desde el punto de vista cognitivista de la Psicología del Desarrollo y desde el punto de vista teórico y epistemológico de la Matemática.

De acuerdo con esto, en la investigación, "Patrones de Solución de Problemas Multiplicativos en Niños de 7 a 12 años", con la cual se intenta avanzar en la comprensión de las formas como los niños resuelven problemas multiplicativos, hemos considerado una clasificación, de las distintas tareas de carácter multiplicativo que deben resolver los niños en la escuela. Esta

clasificación se ha hecho con propósitos de análisis, desde un punto de vista teórico-matemático y de acuerdo con las estructuras que caracterizan y reúnen en categorías, que denominaremos "problemas tipos", las diferentes tareas multiplicativas que el niño enfrenta en la escuela.

En una investigación precedente, Vergnaud *et al.* (Vergnaud, 1979) bajo un enfoque matemático, identificaron dos estructuras multiplicativas principales, que consideraron relevantes para el aprendizaje de la multiplicación y la adquisición de habilidades para resolver tareas multiplicativas. Estas estructuras, las cuales denominaron "isomorfismo de medidas" y "producto de medidas", respectivamente, tienen un carácter más general que las estructuras identificadas por nosotros.

Vergnaud *et al.*, trabajaron con niños de 7 a 16 años, correspondientes a la escuela primaria y secundaria, debieron manejar un espacio de tareas más amplio y por consiguiente consideraron estructuras

Evelio Bedoya Moreno
Depto. de Matemática
Universidad del Valle
Cali, Colombia

más generales, además se interesaron en el "qué enseñar" y analizaron e intentaron resolver este problema desde una perspectiva matemática.

En nuestra investigación, trabajamos con niños de 7 a 12 años, correspondientes al nivel de la escuela primaria y nuestro interés se centró en el reconocimiento de los patrones de solución de problemas multiplicativos, buscando respuestas al "qué enseñar" y especialmente al "cómo enseñar" a resolver dichos problemas. En consecuencia, las tres estructuras identificadas por nosotros, al consultar directamente las tareas concretas que el niño resuelve en la escuela resultan ser de un carácter más específico que las estructuras de Vergnaud.

2. El método de análisis

A partir del análisis estructural de las diferentes tareas multiplicativas, que el niño enfrenta en la escuela primaria, encontramos tres grandes categorías de tareas o "problemas tipos", cuyos enunciados generales damos a continuación:

Problema tipo función lineal

"A un objeto cualquiera f se le ha asignado un valor o medida $v = v(f)$. ¿Cuál es el valor o medida correspondiente a un conjunto F de objetos semejantes?"

Problema tipo proporcionalidad simple

"A un conjunto F de objetos cualesquiera, con más de un elemento, se le ha asignado un valor o medida $v = v(F)$. ¿Qué valor o medida le corresponde a otro conjunto F' de objetos semejantes?"¹

Problema tipo producto cartesiano

"Dados dos conjuntos F y C de objetos cualesquiera, hallar el cardinal o la medida del conjunto producto cartesiano $F \times C$ ".

Por tarea multiplicativa se debe entender, una tarea tal que para resolverla es necesario utilizar una o más multiplicaciones y/o divisiones.

La tipificación de las tareas se ha hecho de manera independiente de sus contenidos cualitativos y numéricos, y conscientes que éstos producen diferentes enunciados y diferentes niveles de dificultad.

Las estructuras específicas que caracterizan los diferentes tipos de problemas están sugeridas implícitamente por los enunciados de las tareas, por sus respectivos esquemas de representación y por el correspondiente algoritmo de solución. Sin embargo, debe quedar claro que los enunciados, los esquemas y los algoritmos de solución no constituyen per se, la estructura de la tarea, de la misma manera que el numeral 3 o la palabra tres no constituye el número tres.

El método de análisis de las tareas propuesto, considera los siguientes niveles diferenciados de enfoque:

Cualitativo. El cual corresponde con el análisis de los diferentes enunciados y objetos físicos involucrados en la tarea.

Matemático. Corresponde al análisis de todos los objetos matemáticos que explícita o implícitamente intervienen en la tarea.

Estructural. Corresponde específicamente al análisis de la estructura que caracteriza y permite tipificar la tarea.

Aunque el nivel de análisis estructural propuesto, desde la perspectiva del ambiente de la tarea, constituye también un cierto tipo de análisis matemático, por su relevancia categórica con respecto al espacio de la tarea, o más concretamente con respecto a los procesos cognitivos del niño al resolver las tareas, se considera y presenta como un nivel de análisis especial.

En este artículo, nos limitaremos a presentar, con el propósito de ejemplificar el método, el análisis de las tareas experimentales correspondientes al problema multiplicativo tipo producto cartesiano.

El análisis que presentaremos de este problema y de sus correspondientes tareas

¹ Nota: Los conjuntos F y F' en los dos problemas anteriores, pueden ser de naturaleza discreta o continua. De hecho, las tareas experimentales respectivas, son unas de comparativa y otras de mezcla, para cada uno de los problemas.

experimentales será de carácter descriptivo, lo cual constituye un primer nivel de análisis. En este sentido, el enfoque estructural consistirá en la descripción del esquema de la tarea y de su respectivo algoritmo de solución.

Para estas descripciones, se ha adoptado un lenguaje simbólico que consulta no sólo el lenguaje formal de la matemática, sino también una simbología apropiada que facilite el posterior análisis cualitativo, matemático y estructural, tanto de las tareas como de los comportamientos y producciones de los niños al resolverlas.

3. Análisis descriptivo de tareas experimentales correspondientes al problema tipo producto cartesiano

3.1 *Análisis cualitativo.* — Componentes de la tarea.

Enunciado:

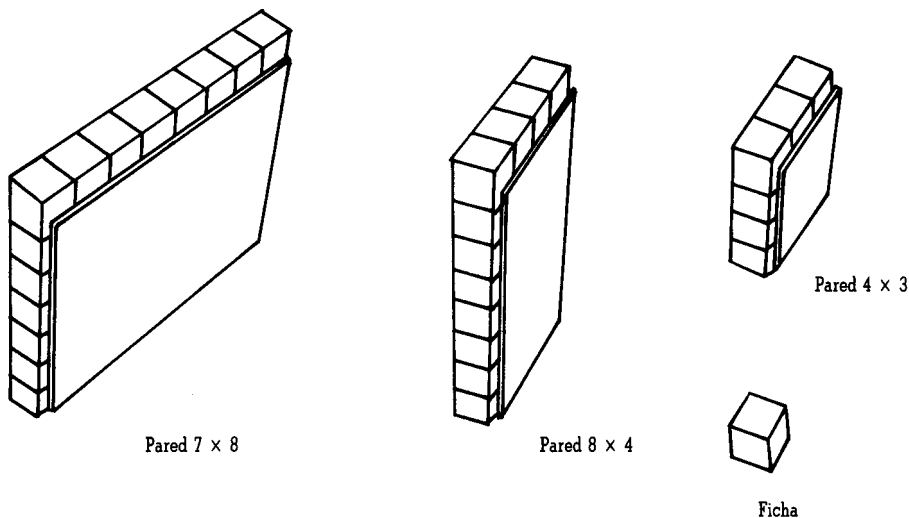
El entrevistador presenta verbalmente al niño el siguiente texto y la correspondiente secuencia de acciones:

— “Con fichas como esta (el entrevistador muestra al niño una ficha cúbica, ver Figura 1) he construido esta “pared” (se muestra al niño una “pared” como la de la Figura 1). ¿Cuántas fichas necesitarías para construir una pared igual a ésta?”.

Objetos físicos:

- Una ficha cúbica, como la de la Figura 1, la cual ejemplifica la colección de fichas con que ha sido construida la “pared”.
- Un paralelepípedo, denominado “pared”, construido con fichas cúbicas, dispuestas de tal modo que configuran columnas y filas.

Aunque la “pared” es de naturaleza tridimensional, las diferencias de sus dimensiones le dan una apariencia bidimensional para el niño. Este es, precisamente, el carácter de las tareas multiplicativas trabajadas en esta investigación. Con el fin de conservar éste carácter, los dos lados paralelos de área mayor han sido cubiertos con cartulina, de tal modo que de-



Diseños de las “paredes” para las tareas del problema tipo producto cartesiano

jen visibles solamente las fichas de los bordes de éstos lados. Este hecho fuerza al niño a utilizar o elaborar un método de solución distinto al de contar una a una las fichas de la "pared".

3.2 Análisis matemático.

Descripción simbólica de las colecciones y objetos físicos:

f_{ij} : ficha en la i -ésima fila y j -ésima columna.

F_i : i -ésima fila de fichas, de acuerdo con el orden abajo-arriba.

C_j : j -ésima columna de fichas, de acuerdo con el orden derecha-izquierda.

$\#f_{ij}$: número ordinal de la ficha f_{ij} con respecto a la i -ésima fila (o j -ésima columna).

$\#F_i$: número cardinal de la colección de fichas en la fila F_i .

$\#C_j$: número cardinal de la colección de fichas en la columna C_j .

Parámetros y asignaciones numéricas respectivas

m : número de fichas en cada fila. Coincide por lo tanto con el número total de columnas. Desde un punto de vista geométrico, constituye uno de los datos —la base— de la pared.

$m = 3, 4$ y 8 respectivamente para cada tarea.

n : número de fichas en cada columna. Coincide con el número total de filas. Constituye el otro dato —la altura de la pared.

$n = 4, 8$ y 7 respectivamente para cada tarea.

De acuerdo con lo anterior, se infiere que en cada una de las tres tareas, $m \neq n$. Además que, $\#F_i = m, i = 1, 2, 3, \dots, n$ y $\#C_j = n, j = 1, 2, 3, \dots, m$.

Una observación importante es que en ningún caso se da explícitamente el valor de m ni el de n con el enunciado de la ta-

rea. Este hecho define a m y a n , como datos o incógnitas parciales en el proceso de solución de la tarea.

Otros objetos matemáticos involucrados en el problema

Las filas y columnas, que en forma genérica simbolizaremos por F y C respectivamente, constituye, como conjuntos, unidades de categorías diferentes que la unidad simple constituida por una ficha o que la unidad de carácter bidimensional constituida por la "pared". Estas diferencias cualitativas implican a su vez, dos productos de naturaleza diferentes, los cuales están presentes de manera implícita en el ambiente de la tarea. Uno de estos productos es el producto cartesiano $F \times C$ que describe la pared como un todo y el otro es el producto de los números cardinales respectivos:

$$(\#F) \times (\#C) = \#(F \times C) = m \times n.$$

La definición de $\#F$ ó $\#C$, exige previamente la operación de igualación de los cardinales de todas las filas o de todas las columnas.

El objeto matemático $\#X$, léase "cardinal de conjunto X ", está definido mediante la siguiente condición de igualdad:

$\#X = \#Y$ si y sólo si existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de X y de Y .

3.3 Análisis descriptivo estructural

Esquema del problema.

| | |
|--------------|-------|
| F | $\#F$ |
| C | $\#C$ |
| $F \times C$ | X |

Algoritmo de solución.

- Definir la incógnita:

$$X = \#(F \times C) =$$

Número de fichas en la "pared".

- Obtener uno de los datos:

$$\#F = m.$$

- Obtener el otro dato:

$$\#C = n.$$

- Identificar la incógnita X con el producto $m \times n$:

$$X = m \times n.$$

- Calcular el producto $m \times n$:

$$m \times n = p.$$

- Dar la respuesta asignándole el valor p a la incógnita:

$$X = p.$$

Bibliografía

GÓMEZ-GRANEL, Carmen. El niño y la resolución de problemas multiplicativos. Tesis de grado, Universidad de Barcelona, Barcelona, 19XX.

PASCUAL-LEONE, Juan. Análisis metasubjetivo de tareas. Conferencia pronunciada en I Encuentro de Egresados, Departamento de Psicología. Universidad del Valle, Cali, 1988.

PIAGET, Jean y BETH, E.W. Epistemología, matemática y Psicología. Grijalbo, Barcelona, 1980.

SIMON, Herbert y HAYES, J.R. The understanding process: problem ISOFORMS. Cognitive Psychology, 8, pp. 165-190, 1976.

NEWELL, A. Information Processing in computer and man. American Scientist, 52, 1964.

VERGNAUD, G., ROUCHIER, A., RICCO, G., MARTHE, P., METREGISTE, R., GIACOBBE, J. Didactics and Adquisition of "Multiplicative Structures" in Secondary Schools, Cognitive Development Research Seminar, University of Leeds, 1979.

El libro que más claramente explica la teoría y aplicaciones de las ecuaciones en diferencias a partir de ejemplos interesantes.



ECUACIONES EN DIFERENCIAS con Aplicaciones



Takehito Takahashi

Grupo Editorial Iberoamérica 

CARACTERÍSTICAS:

- Explica conceptos básicos como diferencia y suma en ecuaciones en diferencias de manera clara.
- Presenta aplicaciones a diversas áreas cuidadosamente desarrolladas.
- Expone en forma sencilla la teoría y aplicaciones de los sistemas de ecuaciones en diferencias incluyendo procesos de Markov.
- Desarrolla con detalle ejemplos de todos los tipos de ecuaciones en diferencias.
- Contiene una amplia explicación de problemas de valor inicial y de frontera.

ADQUIÉRALO EN SU LIBRERÍA PREFERIDA.

Grupo Editorial Iberoamérica

Río Ganges No. 64 - 06500 México, D.F. - Tels. 5112517.

