ARTICULOS

Propuesta metodológica sobre la enseñanza de las fracciones en la educación básica*

1. Un nuevo paradigma educativo en la enseñanza de las fracciones

El programa de matemáticas en España está en proceso de cambio. La nueva propuesta curricular insiste en la consecusión de procesos y las aplicaciones más que en la enumeración de conceptos. El aprendizaje de las matemáticas tiene un aspecto formativo y otro instrumental. Los conceptos matemáticos deben ser comprendidos, interiorizados, expresados, aplicados. Sin embargo, al hablar de los números fraccionarios, parece que se insiste únicamente en la adquisición de algoritmos y de situaciones de aplicación. Se dice que se deben aplicar correctamente los números fraccionarios y los automatismos operatorios adquiridos, de forma razonada en la resolución de situaciones problemáticas.

Cuando se dan ejemplos, aun cuando se indica "...en otros casos que puedan presentarse", se centra en los elementos clásicos (parte de un todo, cociente de dos números) con la única mención nueva a la probabilidad y aproximación de una medida (Reforma Ciclo Superior, 1984).

El presente artículo apareció publicado en el N° 0 de nuestra revista (agosto 1988). Sin embargo, debido a los problemas de producción y distribución que enfrentó el Comité Editorial para la publicación de ese número, los artículos que ahí aparecieron no han tenido la difusión debida. Por este motivo hemos decidido incluir en éste y en cada uno de nuestros próximos números los artículos publicados en el N° 0, adicionalmente a los artículos que se seleccionaron para cada número.

COMITÉ EDITORIAL

2. Un marco teórico, basado en la investigación didáctica

Hasta el momento actual, han sido muchos los que han apostado por la derrota

Joaquín Gimenez i Rodriguez
Dept. Educació i Psicologia de Tarragona. Divisió VII
Universitat de Barcelona, España

* Presentada en la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigadores en Matemáticas Educativas, Guatemala, marzo, 1988.

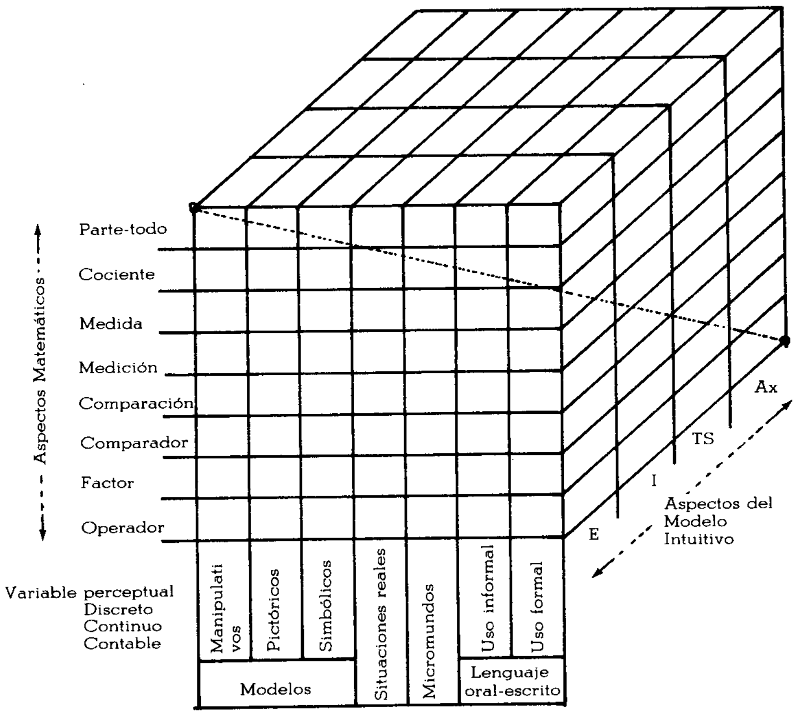


FIGURA 1

de las fracciones en la confrontación con los decimales. En España, donde no existen decimales de la unidad de moneda y se da un uso cotidiano bastante frecuente de algunas fracciones, éstas siguen siendo importantes y su uso es espontáneo en el caso de las mediciones (Gimenez, 1988).

En este contexto, realmente distinto del de nuestros vecinos franceses (basta leer Brousseau, 1981), no se menosprecia el análisis epistemológico que sitúa los decimales en un lugar privilegiado (Dousdy, 1980), aunque se piense que seguir las directrices de la propuesta oficial actual (Pert. C. Superior, 1984) lleva a un planteamiento distinto.

Un marco teórico que parece adecuado surge de la consideración de tres elementos fundamentales (Giménez, 1988): los aspectos matemáticos a considerar, las variables referentes (modelos, situaciones y lenguaje) y los aspectos del modelo intuitivo (Kieren, 1988). Podemos observarlo en la Figura 1.

Esos tres componentes deben posibilitar un entramado de situaciones que provoquen la adquisición progresiva de los distintos aspectos del constructo (Kieren, 1987).

3. Elementos de una propuesta metodológica

En cuanto a la metodología, se dice (MEC, 1984) que el aprendizaje debe ser cíclico, asimilable, adaptable a las características de los alumnos, activo, motivador, participativo, creativo, que posibilite la interdisciplinariedad y que se inicie en el medio. Parece que esto último es muy bueno para las fracciones: "Empezar por el medio". Pero, el medio natural utiliza un medio, un tercio, un cuarto, y pocas fracciones más.

Aquí se propone el uso de situaciones didácticas que parten del uso de materiales manipulativos estructurados y juegos de fácil construcción. Dichos materiales y juegos empezaron a ser utilizados en 1977, y han sido elaborados por el equipo de profesores: D. Barba, I. Batlle, C. Burgues, J. Giménez y J. Partegas.

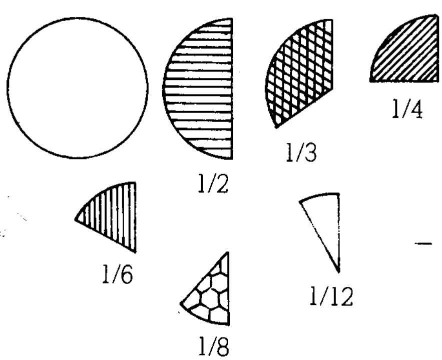
Con dichos materiales se proponen diversas situaciones que pretenden provocar y resolver conflictos cognitivos (en el sentido de Haseman, 1986) y mostrar la adquisición de algoritmos de cálculo. Todo ello se hace de forma lúdica, de tal forma que consiga cambiar la actitud negativa frente a las matemáticas (Gainn, 1987) y de forma que tenga en cuenta la adquisición de un conocimiento de los números racionales (en la línea de Kieren, 1988). Algunos materiales han sido comercializados.

Veamos algunos ejemplos, en momentos clave del aprendizaje, con sus objetivos diferenciados:

Círculos de colores*

MATERIAL: 6 círculos partidos cada uno en: medios, tercios, cuartos, sextos, octavos y doceavos, respectivamente.

DESCRIPCIÓN: Cada círculo es de un color —según el número de partes en que se encuentra dividido—, para poder facilitar la distinción de cada parte, no únicamente por su medida. Se han tomado los denominadores 2, 3, 4, 6, 8 y 12, ya que —aún siendo sencillos— permiten establecer bastantes relaciones de equivalencia entre las partes.



* Taskmaster, ha sido comercializado posteriormente (1984) un juego parecido, aunque no igual.

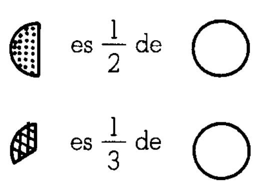
OBJETIVOS:
- Introducir la noción de partición en partes iguales.
- Ver la relación entre las partes y el círculo unidad completo.
- Identificar la representación con el nombre correspondiente (denominador) así como el símbolo.
- Reconocer la relación de orden entre las partes fraccionarias.
- Conocer algunas relaciones de equivalencia.
- Introducción de la idea de numerador sumando partes iguales.
- Introducir la adición y sustracción de partes diferentes en algunos casos posibles.

1. Partes de la Unidad

Identificar la fracción que representa cada pieza por separado.

1.1 Observación y clasificación de las piezas.
- Contar cuántos trozos hay de cada color. Comprobar que todos los trozos son iguales.
- Unir piezas para formar círculos completos.
- Comprobar que los círculos obtenidos son del mismo tamaño aunque se encuentran divididos en distinto número de partes.
- Escribir estas observaciones. Ejemplo: El círculo verde se encuentra partido en 2 partes. El círculo rojo está partido en 4 partes, etc.

1.2 Expresión verbal y simbólica.
- Nombrar cada una de las piezas, medio, media, mitad; tercio, tercera parte; cuarto, etc.
- Escribir simbólicamente la relación entre cada pieza y círculo completo. Ejemplo:



2. Ordenación

— Ordenar las piezas según su tamaño.
— Dibujar las piezas de forma que se observe dicha ordenación. (Para dibujar una pieza basta delinear su contorno.)
— Escribir la fracción correspondiente a cada pieza manteniendo el orden del gráfico.
— Observar que las fracciones menores tienen los denominadores mayores.

NIVEL DE APLICACIÓN. Estas dos actividades pueden realizarse a partir de 4o. (9-10 años) pero es conveniente que los alumnos tengan experiencias anteriores de partición de objetos de 3 dimensiones. También antes de dichas actividades debemos ver la necesidad de nombrar las fracciones: mitad, cuarto y tercio por lo menos.

Comentario

Los objetivos que se pretenden, se encuentran más en la línea de proponer situaciones micromundo (como se entiende en Kieren, 1988) que en el simple hecho que con los materiales se "muestren" los algoritmos. En este sentido nos alejamos del uso de los manipulativos que se extiende en EUA, popularizado fundamentalmente mediante artículos de Arithmetic Teacher (monográfico, 1984, etc.).

Hasta el momento se trata de proponer situaciones de reconocimiento, y transcribir las observaciones realizadas. Dichas observaciones no es inmediato plasmarlas en la recta numérica, pues se trata de un trabajo sobre la superficie, pero si se plantea el problema de la ordenación de las piezas, la representación lineal surge casi espontáneamente. En etapas sucesivas, el objeto es suscitar elementos más complejos, que van a dar lugar a los algoritmos de las operaciones.

Puede realizarse un trabajo similar de mayor dificultad con tangramas o cartones de colores (Barba, Batlle, Giménez, Partegas 1978). Con la ayuda de diagramas rectangulares, podemos sistematizar las observaciones de las relaciones de superficie entre las piezas (Foix, 1979). A partir de ahí, habremos materializado dos aspectos fundamentales: la medición en su sentido dinámico (Giménez, 1988), y la fracción como parte de un todo, que puede surgir de un reparto (Kieren, 1981).

Convenimos con Brousseau (1981) que la división debe reinterpretarse, accediendo a modelizar todo tipo de situaciones y problemas, en todo tipo de campos numéricos. Así, la misma noción de fracción como parte de un todo debe ampliarse a la idea de reparto (fracción-cociente en Kieren, 1976). Con ello aparece el problema de la subdivisión de lo discreto y lo continuo (variabilidad perceptual en Dienes 1971; Freudenthal, 1983; Behr et al 1983, etc.)

Si bien este aspecto aparece en muchas situaciones cotidianas (Streefland 1985), quisimos tenerlo en cuenta también para facilitar y agilizar el nivel de cálculo mental, bastante precario (Giménez, 1985).

Cartones discretos y juegos de mecanización

MATERIAL: Cartulinas con objetos dibujados. Juegos de la Oca, siguiendo una representación lineal.

OBJETIVOS: Favorecer el cálculo mental y el conocimiento de la fracción como operador de reparto.

NIVEL DE APLICACIÓN: A partir de 10 años, según ejercicios propuestos.

Fracción – Aproximación y porcentajes

MATERIAL: Una tabla de resultados estadísticos de una encuesta cualquiera.

MÉTODO:

— Representar en forma de histograma la situación, mediante cartulinas de colores distintos. Ordenar los distintos tipos de respuestas de mayor a menor,
— interpretando los resultados.
— Unir los cartones.
— Asignar a cada rectángulo (frecuencia absoluta) un número respecto al total

(frecuencia relativa). Dicho número es una fracción, aproximación del valor relativo.
— Cambiar la "escala" asignando 100 al total de porcentaje.

OBJETIVOS:
— Aplicar y comprender la fracción como aproximación de la frecuencia relativa de un suceso.
— Aplicar la propiedad de densidad de las fracciones vinculada a la aproximación de situaciones estadísticas concretas.

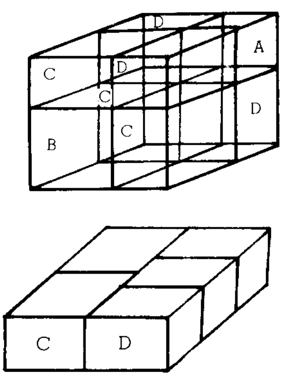
NIVEL DE APLICACIÓN: Puede realizarse perfectamente en un 6o. nivel (12 años), gracias a la ayuda del material.

Juegos de arquitectura

MATERIAL:
— Material correspondiente a la descomposición de (2 + 3)
— Un juego de construcción clásico en madera con sus distintas piezas.

METODOLOGÍA: Buscar las relaciones de volumen entre las distintas piezas.

OBJETIVOS:
— Mostrar y aplicar un proceso de conmensuración mediante fracciones.
— Observar la necesidad de tomar unidad, como punto de referencia para una ordenación.



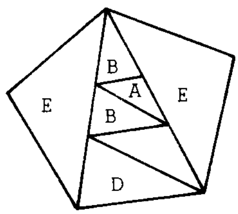
$D = 2/3C$

NIVEL DE APLICACIÓN: Las dificultades con las representaciones espaciales de las fracciones (Filloy et. al. 1985, 1986) y el concepto de volumen (Vernaud 1984), hacen pensar en el aprovechamiento máximo de estas actividades hacia los 12-13 años (6o.-7o. nivel en España). Y aunque ejercicios de tipo similar se hayan podido realizar con regletas de colores (Gattegno, 1958) en cursos más bajos, las investigaciones de Ratsimba y Brousseau (1981) corroboran nuestra afirmación.

El pentagram de J. Partegas

Aproximación de proporciones no racionales mediante racionales

MATERIAL: Un pentágono regular subdividido en cinco tipos de triángulos. (Ver figura.)



E = C + D
D = B + C
C = A + B

MÉTODO: Ordenar distintas piezas. Encontrar relaciones de adición entre ellas. Procurar asignar un número a la menor de ellas, y representar numéricamente la medida de las demás tomando la menor como unidad.

OBJETIVOS:
— Descubrir las relaciones de Fibonacci, aplicar el valor de la fracción como aproximación de medidas no racionales.
— Fomentar un razonamiento algorítmico, y su equivalente algebraico a partir de un proceso histórico.

NIVEL DE APLICACIÓN: A partir de 8o. nivel (14 años).

4. La ordenación de Q+. Un problema espacio-temporal

En los ejemplos anteriores se ha obtenido un estudio cada vez más profundo de la importancia del orden y la densidad en

Q y su aplicación a la idea de aproximación. La representación del número áureo (pentagram) mediante fracciones tiene su origen en los métodos algorítmicos griegos. Métodos similares de aproximación se pueden aplicar también al conocimiento fraccionario aproximado por parte de los babilonios, o por conmensurabilidad aproximada en la relación circunferencia-diámetro. Así por ejemplo, se comprendería más con 22/7 que 3.1416.

¡No olvidemos que la consideración de inconmensurabilidad de dichos números es muy posterior! Con todo ello, densidad y aproximación en Q+, aparecen como elementos que conforman el concepto de número real como límite de una sucesión de racionales.

Si bien en el caso de las medidas (incluso la probabilidad), podemos establecer un orden de forma clara sin más que considerar como punto de referencia una misma unidad, no es realmente tan fácil mostrar la relación de orden entre fracciones en el caso de las proporciones. De ahí que nuestras aportaciones no completen todo lo que debe trabajarse sobre fracciones.

En ese caso deberíamos tomar un cierto punto de referencia, pero... ¿en qué consiste? La expresión de número racional que surge de las sombras necesita tener en cuenta una misma hora como punto de comparación, ... ¡a un mismo día!

Así, el problema de aplicar los números racionales a situaciones cotidianas, se convierte en problema "temporal" además de problema "espacial".

Referencias bibliográficas

BEHER, et al (1983): Rational number concept in Lesh-Landau (eds.). Acquisition of mathematical concepts and processes.

BROUSSEAU (1981): Problemes de didactique des décimaux. Recherches des Didactiques de mathematiques, Vol. 2, No. 1, 1.

BROUSSEAU (1983): La división a l'école élémentaire, Doc. IREM Bordeaux.

BROUSSEAU (1986): Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques Vol. 7, No. 2, pp. 33-115.

BARBA, et. al. (1978): Material per l'ensenyement dels trencats. L'Escaire, No. 1, Barcelona, pp. 11-27.

DIENES (1971): Fracciones, Ed. Celde, Barcelona.

DOUADY (1980): Approche des nombres réels en situation d'aprentisage scolaire. Recherches En Didactique Des Mathématiques, Vol. 1, No. 1.

FIGUERAS, FILLOY, VALDEMOROS (1985): Imaginación espacial y enseñanza de los racionales. Secc. de Matemática Educativa del CINVESTAV del IPN, México.

FILLOY, FIGUERAS, VALDEMOROS (1986): Algunos significados asignados por los niños al modelo egipcio: fracciones de la unidad. Reporte de Trabajo. CINVESTAV, IPN, México.

FOIX (1981): La importancia de la unitat de mesura. L'Escaire, No. 7, Barcelona, pp. 10-15.

FREUDENTHAL (1983): Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel. Dordrecht.

BAIRIN (1985): Las actitudes de Educación. Un estudio sobre Educación Matemática. Ed. PPU, Barcelona.

GIMENEZ (1985): Sobre dificultats en el càlcul mental amb enunciat a la 2a. Etapa d'EGB. Una aproximació descriptiva a l'extrarradi urbà.

GIMENEZ (1986): Una aproximación didáctica a las fracciones egipcias. Números (revista de la SCPM N. 14).

GIMENEZ (1988): The use of fractions on capacity measures by young children. ICME VI. Budapest.

HASEMANN (1986): Analysis of fraction errors by a model of cognitive science. European Journal of Psychological Education. Vol. 1, No. 2, pp. 57-66.

KIEREN (1976): On the mathematical cognitive and instructional foundations of rational numbers. Number and Measurement. Lesh (ed.) ERIC/SMEAC, Ohio.

KIEREN (1988): Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal develoment. Beher, Hiebert (eds.). Rearch Agenda Project. NCTM, Reston, Virginia.

MEC (1984): Reforma del Ciclo Superior, Matemáticas. Vida Escolar.

PARTEGAS (1984): Pentagram l'Escaire. Barcelona.

STREEFLAND (1985): How to teach fractions as to be useful. IOWO. Utrecht.