ARTICULOS

¿Aprovechamos nuestros cursos de geometría analítica?

Después de escuchar *"Algunas ideas generales para la enseñanza de la Geometría Analítica"*[1], varios compañeros maestros me pidieron que me extendiera más en el tema, proporcionando ejemplos. Aquí pretendo responder a ese interés, insistiendo en la necesidad de replantear los objetivos y las estrategias de enseñanza de nuestros cursos de Geometría Analítica para que no se conviertan en meros catálogos de fórmulas y técnicas para determinar las partes relevantes de las curvas y superficies. Sugerimos al lector que intente responder las preguntas y resolver los problemas que vayamos planteando, antes de leer nuestras respuestas.

1. ¿Qué es la Geometría Analítica?

La Geometría Analítica tiene como objetivo fundamental la solución de problemas geométricos utilizando como herramienta el Álgebra. En otras palabras, el fin es la Geometría y el Álgebra es solamente el medio. Esto significa que debemos tratar de plantear los problemas en términos geométricos y buscar las soluciones guiándonos por las ideas geométricas. Tomemos el ejemplo siguiente:

Problema 1. Dados tres puntos Q, R, S, determine la circunferencia que pasa por ellos.

Solución. *a*) Una solución geométrica consiste en tomar dos segmentos (cuerdas), por ejemplo QR y RS, encontrar sus mediatrices y localizar su intersección, que será el centro de la circunferencia. *b*) Una solución analítica se obtiene al traducir al Álgebra los pasos geométricos anteriores. *c*) Otra solución analítica, pero de origen algebraico, consiste en plantear tres ecuaciones con tres incógnitas, sustituyendo las coordenadas de los puntos dados en la ecuación de la circunferencia, y resolverlas simultáneamente.

La solución *a*) no es analítica, pero las soluciones *b*) y *c*) sí lo son. Generalmente es más fácil obtener una solución analítica siguiendo un razonamiento geométrico, como en *b*), que recurriendo a un razonamiento algebraico, como en *c*), pues el razonamiento geométrico resulta menos abstracto.

Estas soluciones para un mismo problema nos muestran que la palabra *"analítica"* no se refiere a un tipo de problemas, ni a la fuente de inspiración de la solución, sino a un método general para plantear los problemas geométricos: el método presentado por Descartes en su *Geometría*, de 1637, y que llamamos *"método de coorde-*

Marco Antonio Valencia Arvizu
Universidad Autónoma de Sonora
Sonora, México

nadas". Teniendo esto en mente, no debemos confundir a la Geometría Analítica con la Geometría Sintética, ni con el Álgebra Elemental, ni con el Álgebra Lineal.

Debido a las dificultades que les plantearon los números irracionales, los griegos se concentraron en la Geometría y utilizaron métodos geométricos para resolver problemas que ahora consideramos de naturaleza algebraica, como por ejemplo la resolución de ecuaciones de segundo grado. A este método griego de trabajo, donde el Álgebra es el fin y la Geometría el medio, se le llama Álgebra Geométrica. De nombre muy parecido, la Geometría Algebraica estudia propiedades de las figuras que pueden expresarse por medio de ecuaciones algebraicas, tanto en espacios cartesianos como proyectivos, por lo que podría considerarse como una continuación de la Geometría Analítica que trabaja con espacios, transformaciones y clases de figuras más generales.[2]

2. Geometría a partir de coordenadas

La piedra angular sobre la que se construye la Geometría Analítica es la existencia, una vez establecido un sistema de coordenadas (un origen, una unidad de medida y un sentido positivo), de una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y los puntos de una recta. Esta recta, llamada *recta numérica*, resulta un modelo geométrico excelente para todo el sistema de los números reales. De igual manera, gracias a la función tangente, es posible establecer una correspondencia biunívoca entre los ángulos de inclinación de las rectas en el pla-

Correspondencia entre entes geométricos y algebraicos
(Después de establecer un sistema de coordenadas cartesianas)

Geometría	*Álgebra*
1. Punto en la recta Punto en el plano Punto en el espacio	1. $P(x)$ (número real) $P(x, y)$ (par ordenado) $P(x, y, z)$ (terna ordenada)
2. Distancia de un punto al origen Distancia entre dos puntos	2. $\lvert P\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$
3. Rectas en el plano: Inclinación Pendiente Ángulo entre dos rectas	3. α (ángulo) $m = \tan\alpha$ (número real) $\theta = \text{angtan}\,[(m_2 - m_1)/(1 + m_1 m_2)]$
4. Rectas en el espacio: Ángulos directores Cosenos directores Ángulo entre dos rectas que pasan por el origen	4. α, β, γ (ángulos) $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ (números) $\theta = \text{angcos}\,\dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\lvert P\rvert\lvert Q\rvert}$
5. Recta en el plano	5. $ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0$
6. Plano en el espacio	6. $ax + by + cz + d = 0,$ $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$
7. Distancia de un punto a un plano	7. $d(P, \varrho) = \dfrac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
8. Lugar geométrico	8. Ecuación(es)

no y el conjunto de los númros reales extendido; esta correspondencia preserva el orden.

Esta idea de correspondencia entre entes geométricos y algebraicos una vez que se ha fijado un sistema de coordenadas, extendida al plano y al espacio tridimensional, debe ser el hilo conductor de nuestros cursos, como principio unificador y como medio para mostrar la capacidad del método de coordenadas para *"traducir"* del lenguaje geométrico al algebraico, y recíprocamente. Esto lo podemos conseguir si vamos construyendo un cuadro como el que se presenta (Cuadro 1) a medida que avance nuestro curso.

La insistencia en esta idea central de correspondencia a partir de un sistema de coordenadas, contribuye a fijar en el estudiante la esencia del método analítico de la Geometría.

3. ¿Para qué sirve la Geometría Analítica?

Al terminar un curso de Geometría Analítica, es común que los estudiantes no tengan la menor idea de los alcances y limitaciones de la herramienta matemática que acaban de adquirir, puesto que no poseen elementos de comparación; incluso llegan a pensar que la Geometría que se trabaja en la Geometría Analítica no es Geometría Euclidiana. Hemos señalado, con el Problema 1, que se trata de la misma Geometría, y que lo que cambia es el método de solución (analítico o sintético, respectivamente). Los dos problemas siguientes nos permitirán hacer una clasificación.

Problema 2. Tome una circunferencia y un punto interior Q distinto del centro C. Considere ahora todas las circunferencias tangentes a la primera que pasan por Q. ¿Qué lugar geométrico describen sus centros P?

Problema 3. Dadas las longitudes de los dos semiejes, a y b, construya la elipse correspondiente.

El Problema 2, por tratarse de la identificación de un lugar geométrico, parece un problema típico de Geometría Analítica, en cambio el Problema 3 pide una construcción y esperaríamos resolverlo con el método sintético de la Geometría Euclidiana. Sin embargo, veamos que ocurre lo contrario.

Solución del Problema 2. La situación descrita está representada en la Figura 1. Si r es el radio del círculo inicial, $\overline{CP} + \overline{PQ} = \overline{CR} = r =$ constante; luego, los centros de los círculos forman una elipse de focos C y Q cuyo eje mayor es r.

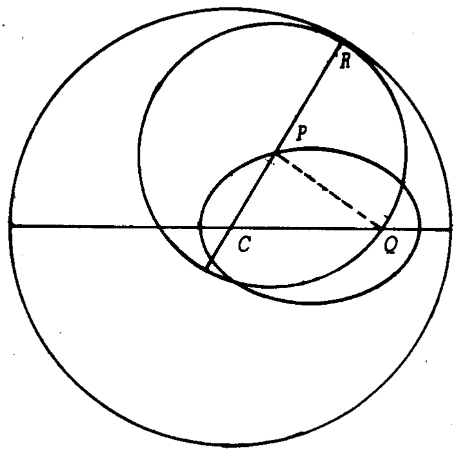

FIGURA 1

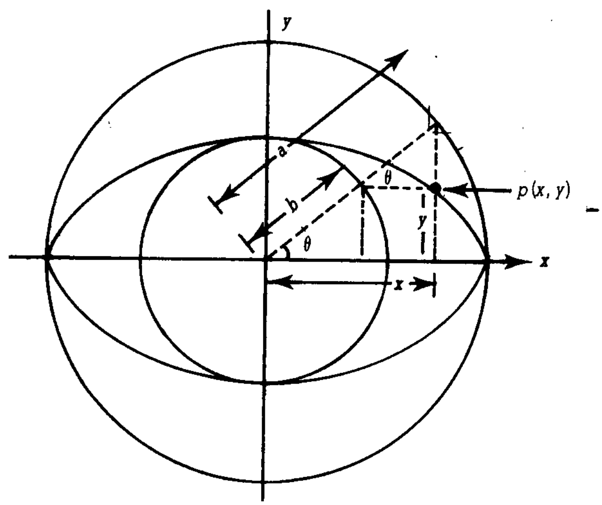

FIGURA 2

Solución del Problema 3. Tomando los semiejes como radios de dos circunferencias concéntricas centradas en el origen de coordenadas, podemos construir la elipse trazando los puntos P de acuerdo al procedimiento sugerido en la Figura 2, ya que las coordenadas de P son

$$x = a\cos\theta,\ y = b\operatorname{sen}\theta,$$

y entonces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1,$$

lo que significa que los puntos $P(x, y)$ están sobre la elipse que deseábamos construir.

De los ejemplos anteriores podemos concluir que hay tres tipos de problemas en la Geometría Euclidiana:

i) Problemas que pueden resolverse sintéticamente, para los cuales es muy difícil o imposible encontrar una solución analítica, como el Problema 2.
ii) Problemas que pueden resolverse analíticamente, para los cuales es muy difícil o imposible encontrar una solución sintética, como el Problema 3.
iii) Problemas que pueden resolverse sintética y analíticamente con aproximadamente el mismo grado de dificultad, sin descartar la imposibilidad de solución con ambos métodos; de este tipo es el Problema 1.

Es importante hacer esta distinción para comprender que el método analítico no sustituye al sintético, sino que lo complementa, facilitando y sistematizando la solución de muchos tipos de problemas geométricos. Esto también nos enseña que no debemos obstinarnos en resolver todos los problemas geométricos con el método de coordenadas, pues en algunos casos este camino podría ser muy complicado o podría no conducir a una solución, y en cambio pudiera existir una solución sintética sencilla.

4. Que la historia lo diga

Para distinguir mejor los métodos analítico y sintético, es recomendable iniciar cada tema, hasta donde sea posible, con un tratamiento sintético, pues esto permite concentrar más la atención sobre los aspectos geométricos, ya que cuando se empieza directamente con coordenadas es frecuente que la atención se distraiga con los procedimientos algebraicos. Por ejemplo, para estudiar la elipse, podemos empezar por presentarla como una sección cónica, demostrando enseguida la propiedad focal que la define como lugar geométrico, y después de familiarizados con ella mediante construcciones y aplicaciones, podemos proceder a su tratamiento analítico.

Problema 4. Demuestre que la curva cerrada (elipse) que resulta al cortar una superficie cónica circular recta con un plano inclinado respecto a su eje de rotación, es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es una constante.

Solución. Trazamos dos esferas (esferas de Dandelin) tangentes interiormente a la superficie cónica y tangentes al plano inclinado Π, una de cada lado de éste, los puntos de contacto con Π, F_1 y F_2, son los puntos fijos (focos), como se muestra en la Figura 3.

Para probarlo, hay que recordar que cualesquiera dos tangentes trazadas a una circunferencia desde un punto exterior son de igual longitud. Ya que $\overline{AP}$ y $\overline{PF_1}$ son tangentes a la esfera S_1, son tangentes a la circunferencia que resulta al cortar S_1 con el plano determinado por A, P y F_1, y entonces

$$\overline{PF_1} = \overline{AP}.$$

De manera semejante,

$$\overline{PF_2} = \overline{PB}.$$

Por lo tanto,

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB} = \text{Cte}.$$

La Historia justifica este orden de presentación puesto que la Geometría Sintética precedió a la Analítica; la Historia nos muestra también los hombres que contribuyeron al desarrollo de esos conocimien-

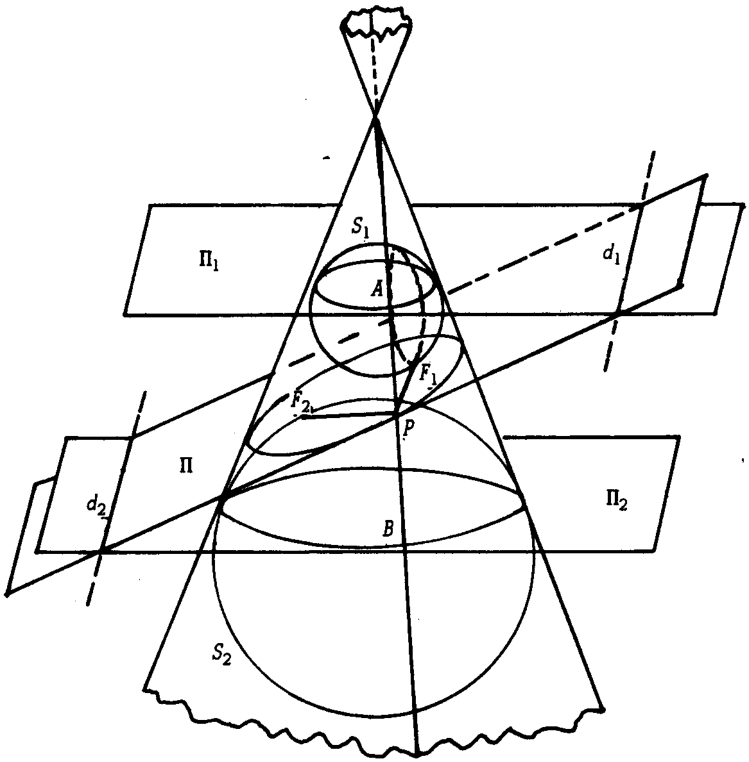

FIGURA 3

tos y el momento en que éstos surgieron. Por eso, una dosis adecuada de Historia hace más amena la clase, desmitifica los temas, los integra más a la cultura del estudiante y ayuda a apreciar mejor su grado de dificultad. A manera de ejemplo, podemos citar algunos datos interesantes relacionados con la elipse:

***Menecmo (siglo IV A.C.)** obtenía la elipse cortando un cono recto de ángulo agudo con un plano perpendicular a una de las generatrices.
***Apolonio (262-190 A.C. Aprox.)** llama ya a la elipse por su nombre, ελλειψις, que significa "le falta", porque al cuadrado construido sobre la ordenada le falta área para igualar la del rectángulo construido sobre el lado recto y la abscisa (en notación moderna, podemos escribir la ecuación de la elipse en la forma $y^2 = 4px - \frac{2p}{a}x^2$). También Apolonio habla ya de los focos de la elipse.

***Pappo (siglo IV D.C.)** es el primero que trabaja con las directrices de la elipse. En la Figura 3, las directrices d_1 y d_2 son las rectas donde el plano Π de la elipse intersecta a los planos Π_1 y Π_2 de las circunferencias de tangencia de las esferas de Dandelin con la superficie del cono.
***Kepler (1571-1630)** descubre que los planetas giran alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas en las que éste ocupa uno de los focos (Primera Ley de Kepler).
***Newton (1642-1727)** demuestra la Primera Ley de Kepler a partir de sus leyes del movimiento y de la gravitación universal.
***Quetelet (1796-1874)** y **Dandelin (1794-1847)** demuestran el enunciado del Problema 4 usando las esferas tangentes, como lo hicimos aquí.

De los datos anteriores podemos observar, por ejemplo, el medio milenio transcurrido entre la introducción de los focos de la elipse y la de sus directrices, y el descubrimiento tardío, por los belgas Quetelet y Dandelin, de la ubicación de ambos cuando se secciona un cono.

5. ¿Cuándo hablamos de las aplicaciones?

Usualmente dejamos para lo último la utilización de nuestros conocimientos, pero lo más común es que consumamos nuestro tiempo en la teoría, que nunca lleguemos a las aplicaciones y que el interés de nuestros alumnos se agote en algún punto del camino. El desarrollo histórico de la Matemática nos muestra que esta posición es errónea: el propio Menecmo resolvió el problema de la duplicación del cubo mediante la intersección de dos cónicas.

Cada tema puede iniciarse planteando uno o varios problemas de aplicación que se resuelvan al terminar el tema. Después de presentar las ideas geométricas, incluyendo posiblemente algunas propiedades obtenidas con el método sintético, y de adquirir alguna familiaridad con ellas, por ejemplo realizando construcciones con regla y compás, con hilos, clavos, alambre, madera o papel, se puede hablar un poco más de las aplicaciones, aunque algunas demostraciones se dejan para el final, cuando se haya desarrollado el método de coordenadas.

Así, tratándose de la elipse, podemos plantear el problema de las órbitas planetarias, en seguida introducir la elipse como una sección cónica, para luego encontrar que la suma de distancias a los focos es constante. Después construimos elipses con el método del jardinero, y con otros métodos como los sugeridos en los Problemas 2 y 3. Podemos también generar elipses mediante sombras de aros y pelotas.

Incluso podemos demostrar la propiedad reflexiva de la elipse usando un esquema parecido al de la Figura 3 y mencionar sus aplicaciones. Se puede abordar de nuevo el tema del movimiento planetario y las fuerzas centrales. Pueden abordarse otras aplicaciones[4].

De este modo familiarizado con la elipse e interesado en ella, el estudiante apreciará la ventaja de estudiarla con el método de coordenadas para poder regresar a las aplicaciones con el fin de demostrar algunos resultados.

6. Al final, o tal vez nunca

Además de las aplicaciones, también postergamos innecesariamente la integración de los conocimientos. Un caso típico se da en la enseñanza de las cónicas, donde nos lanzamos a un estudio caso por caso, a veces sin siquiera mencionar lo mucho que estas curvas tienen en común, dejando para lo último su unificación en un solo tema. Esta tendencia a atomizar y encapsular los conocimientos obstaculiza el aprendizaje; sin embargo, la tenemos muy arraigada. Integrar un conocimiento significa, en este caso, relacionarlo con otros conocimientos, buscando semejanzas y diferencias, tratando de incluirlo en estructuras más generales; la búsqueda sistemática de esta integración de conocimientos constituye una auténtica fuente de pensamiento matemático que debemos procurar. Considere el ejemplo siguiente.

Problema 5. Dado el trazo de una elipse, encuentre su centro.

Solución. Supongamos que no tenemos la ecuación, ni los focos, pues entonces la solución sería obvia. Busquemos un problema parecido: el Problema 1, donde encontramos el centro de un círculo intersectando las mediatrices de dos cuerdas. Si intentamos lo mismo con la elipse, no obtenemos el centro. ¿Por qué no pasan las mediatrices por el centro? Reflexionando, llegamos a descubrir que son las medianas las que pasan por el centro, y que en el caso del círculo coinciden con las mediatrices. Entonces resolvemos nuestro problema trazando dos medianas, tal como se muestra en la Figura 4.

$\overline{PQ}$ paralela a $\overline{RS}$
L punto medio de $\overline{PQ}$
M punto medio de $\overline{RS}$
$\overline{TU}$ paralela a $\overline{VW}$
N punto medio de $\overline{TU}$
O punto medio de $\overline{VW}$
C centro de la elipse.

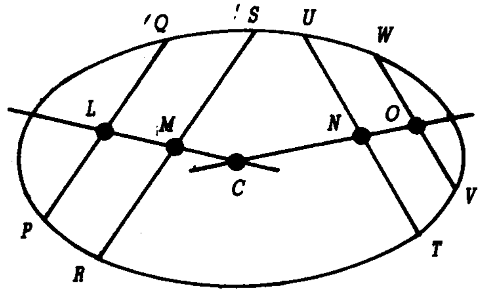

FIGURA 4

Resulta muy difícil resolver este problema si no lo relacionamos con el problema del círculo, pero resultaría mucho más fácil de resolver si en el caso del círculo hablásemos de medianas desde un principio. Por lo general, la dificultad de un problema matemático se reduce cuando lo podemos comparar con otros problemas parecidos, ya resueltos; sin embargo, ocasionalmente el problema de referencia puede convertirse en obstáculo para la solución del otro por estar mal planteada o mal entendida la semejanza entre ambos, como sucedió al tomar las mediatrices.

7. ¿Qué habilidades podemos impulsar?

Los cursos de Geometría Analítica pueden utilizarse de diferentes maneras con fines propedéuticos y formativos. En el aspecto propedéutico, podemos preparar el camino para el estudio del Cálculo, el Álgebra Lineal y la Programación Lineal. En el aspecto formativo, además de fortalecer el pensamiento matemático mediante la búsqueda sistemática de la integración de conocimientos, como lo hemos planteado en la sección anterior, podemos también contribuir a desarrollar la imaginación geométrica impulsando una concepción geométrica dinámica y ejercitando la imaginación espacial.

Al decir concepción geométrica dinámica, me refiero a dejar de pensar en las figuras, curvas y superficies, como si fueran fotografías, rígidas, inmóviles; visualicémoslas mejor como si fueran parte de una película, en movimiento. Así, cortando un cono podemos pasar de una circunferencia a una elipse, de ésta a una parábola, y de ésta a una hipérbola; lo mismo si observamos adecuadamente la sombra de un aro. Veamos lo que pasa cuando modificamos los parámetros de una ecuación, cómo va cambiando la gráfica. Al hacerlo, estamos preparando el concepto de función, de transformación, y estamos integrando las figuras en familias. El uso de una computadora resulta muy valioso en este sentido pues existen actualmente muchos paquetes para graficar.

La imaginación espacial es una habilidad importante para muchos profesionistas, como arquitectos e ingenieros, quienes tienen que imaginar cómo quedará un edificio o estructura, cuidando sus aspectos estético y funcional; o como los geólogos, quienes necesitan imaginar la forma y disposición de los cristales de un mineral, o la forma y dimensiones de un yacimiento. La Geometría Analítica nos brinda la oportunidad de desarrollar esta habilidad al representar tres dimensiones en dos, al imaginar una misma figura en diferentes posiciones, trasladando o rotando, al seccionar superficies con planos, al intersectar superficies. En esto, la computadora es también un auxiliar muy valioso.

Para desarrollar la imaginación geométrica, podemos también plantear problemas como los siguientes.

Problema 6. Se tiene un tanque cilíndrico para almacenar petróleo, ¿cómo construye una escalera externa para ir del punto A al punto B, mostrados en la Figura 5?
Solución. La manera de hacerlo resulta evidente si imaginamos que el cilindro está hecho de papel y lo recortamos y extendemos como se indica en la Figura 6. En el plano, la escalera estaría sobre una recta, y sobre el cilindro circular formaría

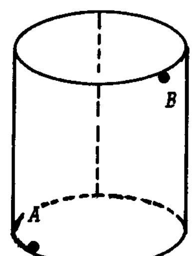

FIGURA 5

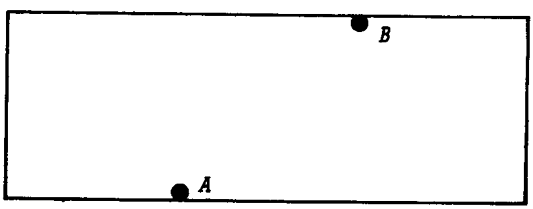

FIGURA 6

parte de una hélice circular cuyas ecuaciones paramétricas son de la forma

$$x = a\cos\theta,\ y = a\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = bt,$$

si escogemos adecuadamente el sistema de coordenadas.

Problema 7. Tome usted un conjunto de tiras de madera con ranuras perforadas cerca de cada extremo, como se observa en la Figura 7. Tomando en seguida dos aros de madera, forme con las tiras una superficie cilíndrica; para ello, fije las tiras a los aros por medio de clavos que puedan girar y deslizarse por las ranuras. ¿Qué ocurre cuando giramos los aros en sentidos opuestos, como se indica en la Figura 8?

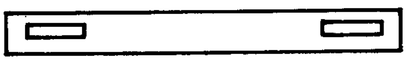

FIGURA 7

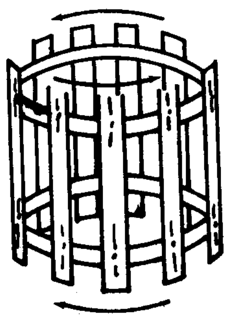

FIGURA 8

Solución. La superficie cilíndrica se adelgaza en la parte central, ensanchándose en los extremos, para formar un hiperboloide de revolución de una hoja, que es, por consiguiente, una superficie reglada.

Resumen

Para la enseñanza de la Geometría Analítica, es importante tener siempre presente que se trata de un método —el método de coordenadas— para resolver problemas geométricos, y que para poder apreciar sus alcances y limitaciones, necesitamos compararlo con el método sintético de la Geometría Euclidiana.

Proponemos iniciar los temas planteando problemas interesantes, introducir las ideas geométricas sin coordenadas, después construir las curvas o superficies, luego hablar de las aplicaciones, y finalmente hacer el estudio con coordenadas, formalizando algunas de las aplicaciones y resolviendo los problemas iniciales.

Recomendamos recurrir con más frecuencia a la Historia, como un recurso para animar la clase, desmitificar los contenidos e integrarlos a la cultura del estudiante.

Finalmente, destacamos el potencial formativo y propedéutico que tienen nuestros cursos de Geometría Analítica: la búsqueda sistemática de la integración de conocimientos ofrece un rico filón de entrenamiento matemático. También podemos contribuir a desarrollar una concepción dinámica de la Geometría, a ejercitar la imaginación espacial, y a preparar cursos más avanzados como Cálculo, Álgebra Lineal y Programación Lineal.

Bibliografía

1. Algunas ideas generales para la enseñanza de la Geometría Analítica. *Marco Antonio Valencia Arvizu*. Memoria del IX Congreso Nacional de la ANPM; Xalapa, 1987.
2. La Geometría Algebraica. *Solomon Lefschetz*. Revista Matemática, No. 5, enero de 1959.
3. Las Cónicas. *Juan José Rivaud*. Revista Matemáticas y Enseñanza, No. 10, mayo de 1978.
4. The standup conic presents: the ellipse and applications. *Lee Whitt*. The UMAP Journal, Vol. 4, No. 2, 1983.
5. A history of greek mathematics. *Sir Thomas Heath*. Dover. 1981.
6. Geometría a partir de coordenadas. *Schools Council*. CECSA, 1985.
7. Geometría Analítica Moderna. *Wooton, Beckenbach, Fleming*. Publicaciones Cultural, 1978.
8. Geometría Analítica. *Lehmann*. UTEHA, 1978.
9. Curso breve de Geometría Analítica. *N. Efimov*. Edit. Mir, 1981.
10. Problemas de Geometría Analítica. *D. Kletenick*. Edit. Mir, 1981.