ARTICULOS

Los comienzos de la geometría deductiva

Los descubrimientos que se atribuyen a Tales de Mileto se refieren a propiedades generales de rectas y ángulos, a la igualdad y semejanza de triángulos, geometría de líneas por completo ajena a los conocimientos geométricos de los egipcios.

En su comentario sobre Euclides, mil años después de Tales, Proclo le atribuye el conocimiento de las cuatro proposiciones siguientes:

1. *Que el diámetro divide al círculo en dos partes iguales*.
2. *Que los ángulos opuestos por el vértice son iguales*.
3. *Que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales*. Es decir: *en todo triángulo isósceles son iguales los ángulos opuestos a los lados iguales*.
4. *Que un triángulo está determinado cuando conocemos uno de sus lados y los dos ángulos en sus extremos*. Es decir: *son iguales dos triángulos que tienen un lado igual, adyacente a ángulos respectivamente iguales*.

Las figuras que siguen ilustran estos cuatro enunciados. Y es digno de consignar que las cuatro proposiciones citadas son demostrables por superposición de las figuras consideradas.

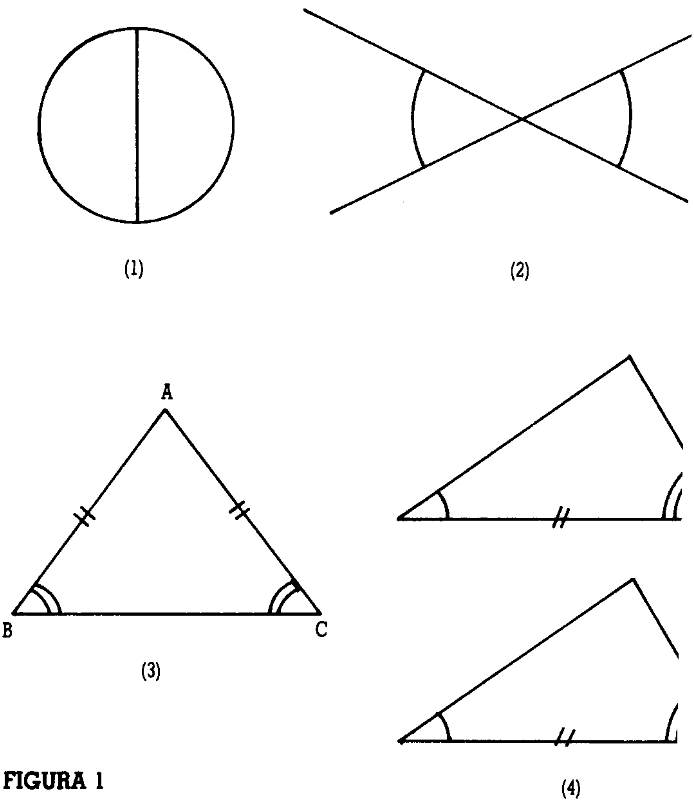

FIGURA 1

La noción de igualdad o congruencia de dos figuras planas supone la posibilidad teórica de superponerlas, sin defor-

Prof. Francisco Zubieta
Prof. de matemáticas

marlas, de modo de hacerlas coincidir punto por punto. Según esta definición, *ninguna figura puede ser igual o congruente con una parte de ella misma*.

Esta definición lleva implícita una técnica de demostración geométrica basada en la superposición de las figuras. Así, por ejemplo, las cuatro proposiciones de Tales de Mileto son demostrables de este modo:

1. *El diámetro divide al círculo en dos partes iguales*.

Fácil de demostrar por superposición de medio círculo sobre la otra mitad. Simetría con respecto al diámetro considerado.

2. *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales*.

Simetría con respecto al vértice común, porque un giro de media vuelta en torno del vértice común lleva a uno de esos ángulos a coincidir con el otro.

3. *En todo triángulo isósceles son iguales los ángulos opuestos a los lados iguales*.

Porque basta voltear el triángulo de manera que el ángulo en el vértice venga a coincidir consigo mismo, permutando sus posiciones los lados iguales, para que la base se sobreponga a sí misma, pero invertida; de modo tal que los ángulos en la base vienen a coincidir el uno con el otro, lo que prueba que son iguales.

O, como dice Papo de Alejandría: El triángulo ABC es igual al triángulo ACB, Figura 1(3), por tener un ángulo igual ($A = A$) formado por lados respectivamente iguales. Y como, en triángulos iguales, son iguales los ángulos opuestos a los lados iguales, concluimos que $C = B$ y $B = C$.

Llama la atención el hecho de que Euclides, después de haber demostrado por superposición que *"Son iguales dos triángulos que tienen un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales"*, prop. I-4 (proposición 4 del libro I), no haya aplicado el mismo razonamiento al triángulo isósceles para demostrar que son iguales los ángulos opuestos a los lados iguales, prop. I-5.

En vez de hacerlo así, Euclides nos da una demostración muy complicada, basada, no obstante, en el mismo caso de igualdad de triángulos que acabamos de mencionar.

4. *Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual, adyacente a ángulos respectivamente iguales*.

Demostrable por superposición, haciendo coincidir el lado igual de ambos triángulos y los ángulos respectivamente iguales.

El propio razonamiento se aplica al triángulo que tiene dos ángulos iguales para demostrar que es un triángulo isósceles, porque hacemos coincidir consigo mismo, invirtiéndolo, el lado adyacente a los ángulos iguales, para que éstos permuten sus posiciones y los lados opuestos a estos ángulos vayan a coincidir el uno con el otro, lo que prueba que son iguales.

Los otros dos casos de igualdad de triángulos (cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales y cuando tienen iguales dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos, respectivamente, props. I-8 y I-26 de Euclides) se reducen, como es sabido, a los dos casos que acabamos de establecer por superposición de los triángulos considerados.

Las primeras proposiciones de la geometría fueron sugeridas por la experiencia; casi todas demostrables por superposición de las figuras, como acabamos de verlo. Esta técnica, nacida en los comienzos de la geometría deductiva, es en verdad muy poderosa; la encontramos también al principio de las geometrías no-euclidianas, particularmente en la obra de Gerolamo Saccheri y de Nicolai Ivanovitch Lobatchevski. Las proposiciones que se establecen de este modo, válidas tanto para la geometría euclidiana como para las no-euclidianas, forman una especie de geometría universal métrica, la que Lobatchevski denominó *pan-geometría*.

Agrega Proclo que Tales descubrió muchas proposiciones, usando a veces el método deductivo, pero valiéndose también con frecuencia de la observación. Y le atribuye el conocimiento de la proporcionalidad de los lados homólogos en triángulos semejantes, que tienen sus ángulos respectivamente iguales. Plutarco le atribuye el mismo teorema, diciendo que

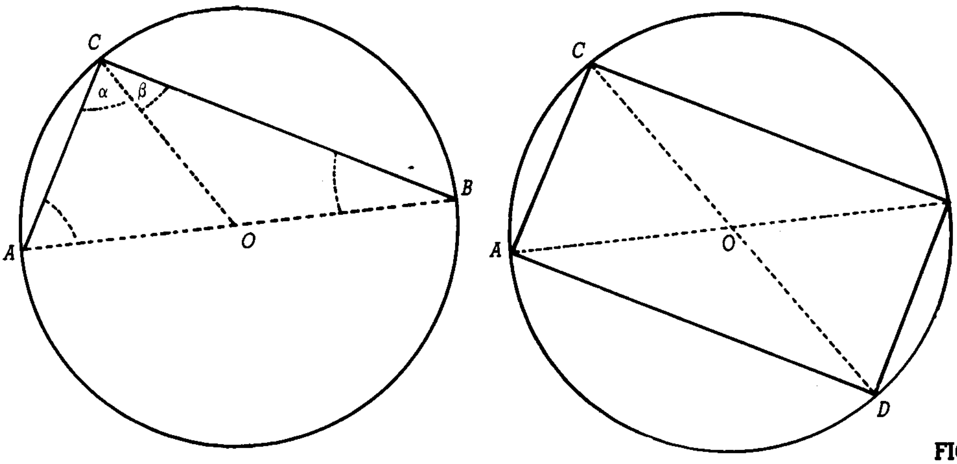

FIGURA 2

lo usaba para medir la altura de una pirámide comparando su sombra con la de un poste de longitud conocida.

Otra proposición atribuida a Tales de Mileto dice: *todo ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto*, como el ángulo $C = ACB$ de la Figura 2. Pero Proclo atribuye este descubrimiento a los pitagóricos, que vivieron unos 50 años después de Tales.

Los sucesores de Tales de Mileto pudieron haber descubierto este teorema al observar que las diagonales de un rectángulo son iguales y se cortan en su punto medio; lo que significa que ambas diagonales son diámetros del círculo circunscrito al rectángulo.

También pudieron demostrarlo, si sabían que los tres ángulos de un triángulo suman dos rectos. Porque, trazando el radio OC, Figura 2, el triángulo inscrito ABC se descompone en dos triángulos isósceles, cada uno de ellos con dos ángulos iguales: $\alpha = A$, $\beta = B$. Y como $C = \alpha + \beta$, concluimos que $C = A + B$. De esta igualdad y de la proposición admitida ($A + B + C = 2$ rectos) se sigue que $C = 1$ recto.

Pitágoras de Samos, sucesor de Tales de Mileto, estaba en plenitud allá por el año 540 a. de J.C. En Crotona, al Sur de Italia, fundó con sus discípulos la Secta pitagórica que continuó sus enseñanzas.

Admitían los pitagóricos que los tres ángulos interiores de un triángulo suman tanto como dos ángulos rectos. Pero ¿cómo pudieron demostrarlo? El mismo Proclo nos da la respuesta, diciendo que lo hacían de este modo:

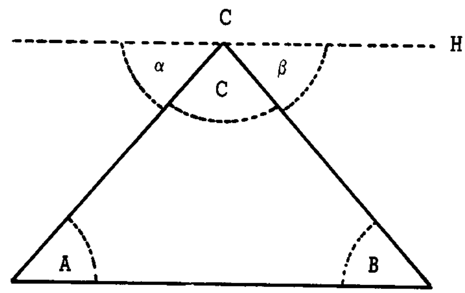

FIGURA 3

Suponer un triángulo ABC, Figura 3. Por el vértice C trazar la paralela CH al lado AB; de modo que AC y BC vienen a ser transversales comprendidas entre esas dos paralelas. Se forman los ángulos auxiliares: $\alpha = A$ y $\beta = B$ (alterno-internos).

De la igualdad $\alpha + C + \beta = 2$ rectos, por sustitución de las igualdades $\alpha = A$ y $\beta = B$, obtenemos: $A + C + B = 2$ rectos.

La demostración anterior, por no haber otra más sencilla, es la que aún se enseña en los cursos elementales de geometría. Ella se basa en el conocido teorema que dice:

5. *Dos rectas paralelas, cortadas por una transersal o secante común, forman con ella ángulos correspondientes iguales.*

No es aventurado suponer que este teorema y su recíproco fueran ya del dominio de Tales de Mileto y sus inmediatos sucesores.

Consideremos primero el teorema recíproco:

6. *Si los ángulos correspondientes son iguales, al ser cortadas por una transversal, entonces las rectas son paralelas.*

En la Figura 5 vemos dos rectas distintas, AB y CD, cortadas por una transversal o secante común, RS.

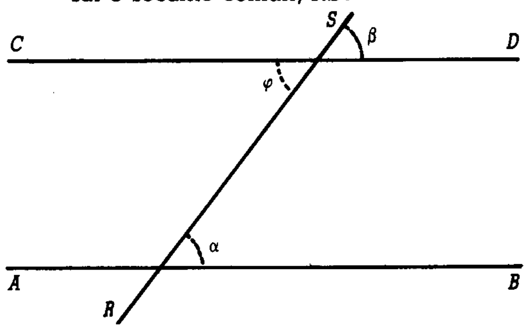

FIGURA 5

Suponer: $\alpha = \beta$ (ángulos correspondientes); se tiene también: $\beta = \varphi$ (opuestos por el vértice); de donde se infiere: $\alpha = \varphi$ (alterno-internos).

Proclo nos dice, citando a Ptolomeo, que el teorema es evidente, porque la figura se ve igualmente de uno y otro lado

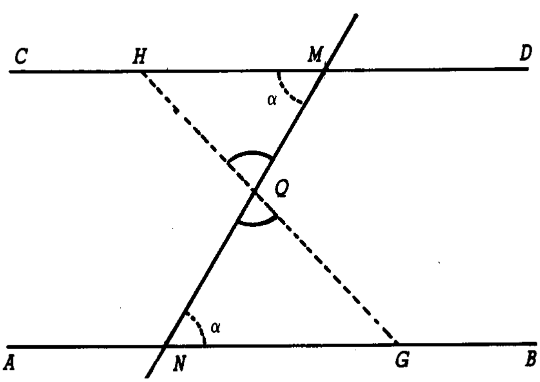

FIGURA 6

de la transversal RS. Y por eso, si las rectas consideradas tuvieran un punto común a la derecha, digamos, de la transversal RS, tendrían también otro punto común a la izquierda de la propia transversal; lo que contradice la hipótesis de que las rectas AB y CD son distintas.

Esta demostración es la que aún encontramos en la mayoría de nuestros textos escolares. Podemos precisarla, usando solamente los conocimientos que Tales poseía. Es decir, partiendo de la hipótesis de que los ángulos alterno-internos son iguales, podemos demostrar que las rectas consideradas son paralelas.

Suponer iguales los ángulos alterno-internos, $\alpha = \alpha$, Figura 6

Sea Q el punto medio del segmento NM comprendido entre las rectas dadas, AB y CD.

Sea H un punto cualquiera de la recta CD; trazar HQ y prolongar hasta G. Vamos a demostrar que Q es el punto medio del segmento HG. En efecto, los triángulos HQM y GQN son iguales por tener un lado igual ($NQ = QM$) adyacente a ángulos respectivamente iguales; proposiciones (2) y (4) de Tales de Mileto. Y como en triángulos iguales, a los ángulos iguales se oponen lados iguales, concluimos que: $HQ = QG$.

Hemos demostrado así que todo punto H de la recta CD tiene por simétrico (respecto a Q) un punto G de la recta AB, y lo mismo probaríamos que todo punto G de la recta AB tiene por simétrico (respecto de Q) un punto H de la recta CD.

Así pues, si las rectas AB y CD tuvieran un punto común, H de un lado de la transversal NM, tendrían otro punto común, G, el simétrico de H, del otro lado de la propia transversal; lo que no puede suceder, ya que las dos rectas dadas son distintas.

(Haciendo girar la figura, en su plano, media vuelta en torno del centro Q, el punto M viene a ocupar el lugar de N, y viceversa; la recta CD ocupa el lugar de AB y ésta ocupa el de CD; lo que significa que Q es su centro de simetría; todo lo cual expresa Ptolomeo cuando dice que la figura se ve igualmente de ambos lados de la transversal.)

Partiendo de la hipótesis de que los ángulos alterno-internos son iguales, hemos demostrado que las rectas AB y CD son paralelas.

Consideremos ahora la recíproca, (5). Ésta resulta de la anterior con sólo postular que la paralela a la recta AB, por el punto M, es única; pues, siendo paralela la recta CD que forma con la transversal ángulos correspondientes iguales, y no pudiendo haber otra paralela, se infiere (5).

Otra proposición conocida de los pitagóricos: *Tres rectas paralelas dividen a todas sus transversales en partes proporcionales*.

Estas proposiciones sobre rectas paralelas y sus transversales son muy importantes: junto con los casos de igualdad y semejanza de triángulos, constituyen el punto de partida de todo el desarrollo ulterior de la geometría.

De tales conocimientos básicos, adquiridos desde los comienzos de la geometría deductiva, esta ciencia se fue desarrollando poco a poco hasta llegar a constituir un cuerpo respetable de doctrina en el texto de Euclides. Los nombres de Tales de Mileto, de Pitágoras y sucesores, llenan este primer período del desarrollo histórico de la geometría deductiva.

Era grande el número de conocimientos que lograron reunir los pitagóricos: conocían globalmente el contenido de los libros I, II, III y IV de Euclides; gran parte de los libros VI, VII, VIII y IX; parte también del libro XIII; con la aclaración de que la teoría de las proporciones atribuida a Pitágoras, no debe confundirse con la teoría general de Eudoxio, que viene expuesta en el libro V de Euclides; así mismo, el contenido de los libros X, XI y XII es obra principalmente de los sucesores de Platón.

Muy pocas noticias nos quedan de esa época: los *Comentarios sobre Euclides*, de Proclo; algunos fragmentos consignados en los diálogos de Platón; varias referencias de Aristóteles; ... Se han perdido los libros del astrónomo Filolao, los de Hipócrates de Quío, uno de los primeros en ensayar la cuadratura del círculo; los de León y Teudios de Magnesia; la gran *Historia de la Geometría* de Eudemo, de quien suponen que Proclo tomó su información sobre los geómetras anteriores a Euclides.

Terminemos esta nota mencionando el "Fragmento de Eudemo", siglo IV a. de J.C., reproducido por Simplicio, que trata de las "lunas" de Hipócrates y su teorema sobre la duplicación del cubo: Duplicar el cubo equivale a encontrar dos medias proporcionales, en proporción continua, entre el lado L del cubo dado y su doble, $2L$. En este teorema de Hipócrates se basa el método de Menecmo para duplicar el cubo por medio de la parábola. El tercer problema famoso, trisectar el ángulo, se resuelve mediante la cuadratriz de Hipias, que se utiliza también para rectificar la circunferencia y cuadrar el círculo. Véase T.L. Heath: *Manual of Greek Mathematics*, págs. 121-131, págs. 143-160.

Bibliografía

STRUIK, D.J. *A concise history of Mathematics*. Dover Publications, Inc. Nueva York.

HEATH, T.L. *A Manual of Greek Mathematics*. Dover Publications, Inc. Nueva York.

HEATH, T.L. *Euclid's Elements*. 3 volúmenes. Dover Publications, Inc. Nueva York.

BONOLA, Roberto. *Non-euclidian geometry*. Contiene la historia del 5° postulado y las principales ideas de Saccheri, Lambert, Gauss, Legendre, ... y las memorias completas de Bolyai y Lobatchevski). Dover Publications, Inc. Nueva York.

JEANS, J. *Historia de la Física*. Breviario del F.C.E.