

El tetrarius: un ejemplo de superficies recursivas en el espacio*

Introducción

Lo que sigue es el resultado de una experimentación con computadora (ordenador) que hace tiempo iniciamos con la construcción y estudio de las curvas recursivas planas. De éstas las más conocidas son las de Hilbert y Sierpinski, pero hay otras como las curvas "serpenteantes" de Gosper y el "copo de nieve".

Pronto se nos ocurrió hacer una cosa parecida en el espacio tridimensional y de este modo nos planteamos la siguiente situación:

Sea un tetraedro. Dividimos cada una de sus caras en cuatro triángulos iguales a partir del punto medio de los lados. Sustituimos ahora el triángulo central por un tetraedro de aristas iguales a la mitad de la del tetraedro inicial (Figura 1).

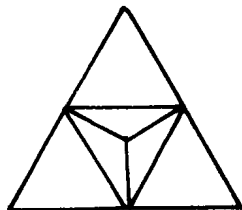


FIGURA 1

Cada cara del antiguo tetraedro da lugar a 6 nuevos triángulos equiláteros a los que se puede aplicar de nuevo la anterior construcción. Y así "ad infinitum". A cada una de estas superficies la llamamos un "tetrarius", siendo el tetraedro inicial el tetrarius de orden 0 y así sucesivamente.

Resultó finalmente que en un sentido bien definido —pero no formalizado—, en el infinito los tetrarius se convierten en un cubo en el cual las diagonales de sus caras son las aristas del tetraedro inicial. Este es el resultado que presentamos aquí.

El cubo como límite de tetrarius

Lo que afirmamos es que en un sentido informal, el cubo es el límite de tetrarius.

Sea T_n el tetrarius de orden n .

Albert Fábrega

Barcelona, España

Sebastià Vila

Barcelona, España

* Este artículo fue publicado por primera vez en catalán en el Butlletí de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències en el No. 17 de diciembre de 1984.

Sea C el cubo en el que cada una de las diagonales de sus caras es arista del tetraedro inicial T_0 .

Teorema. $\lim T_n = C$.

Sea a_0 una arista cualquiera de un tetraedro cualquiera que forma parte de T_1 . Sean c_{01} y c_{02} las dos caras adyacentes a a_0 . Indiquemos por T_1^0 el tetraedro al que pertenece a_0 . Afirmamos que la arista a_{01} que pertenece a T_{1+1} que pasa por m_{a_0} y la arista a_{02} están en línea recta y son coplanarias con a_0 (Figura 2).

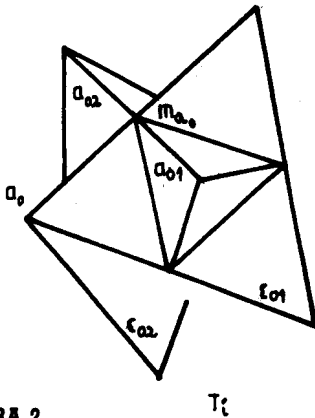


FIGURA 2

En efecto, a_0 y a_{01} determinan un plano π . Consideremos ahora la Figura 3. α indica el ángulo que forma una arista con el plano de una cara del tetraedro y β el ángulo diedro de dos caras del tetraedro. Tenemos que $2\alpha + \beta = 180^\circ$.

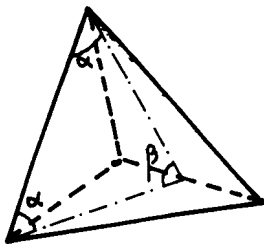


FIGURA 3

Además, a_{01} es perpendicular a a_0 ya que en el tetraedro la altura va al centro de la base y éste es también el centro de c_{01} , de forma que el plano π' determinado

por a_{01} y su proyección en c_{01} es perpendicular a la arista a_0 (Figura 4).

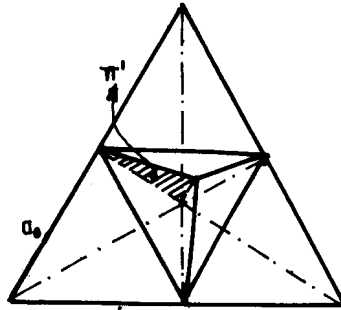


FIGURA 4

Por tanto, de acuerdo con la Figura 5, tenemos que a_{02} es coplanaria con a_0 y a_{01} , y puesto que también a_{02} es perpendicular a a_0 , resulta que a_{01} y a_{02} están alineadas.

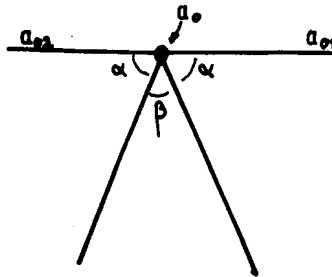


FIGURA 5

Aplicando el argumento anterior a a_{01} tenemos que a_{011} y a_{012} están alineadas y son coplanarias con a_{01} .

Ya hemos dicho que el plano π' (Figura 6) es perpendicular a a_0 y además es un plano bisector del diedro del tetraedro T_{1+1} . Por tanto, el ángulo de a_{011} con π es $\alpha + \beta/2 = 90^\circ$. Así que no sólo a_{011} y a_{012} son coplanarias con a_{01} sino también con a_0 .

A partir de aquí, vemos que a_{0111} y a_{0112} son coplanarias con a_{011} y a_{01} , plano que también contiene a a_0 . Así que a_0 , a_{01} , a_{02} , a_{011} , a_{012} , a_{021} , a_{022} , a_{0111} , a_{0112} , a_{0121} , a_{0122} , ..., etc., están todas en un mismo plano.

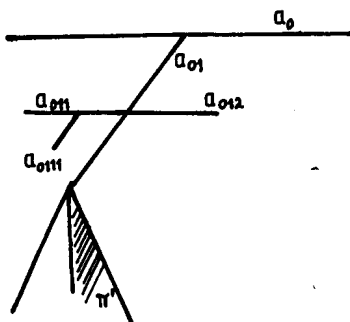


FIGURA 6

Cada arista es la mitad de la anterior y es perpendicular a la anterior en el punto medio (Figura 7).

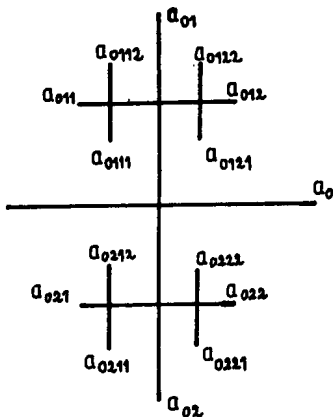
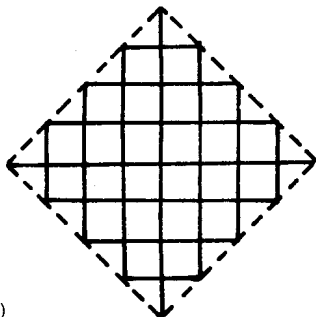


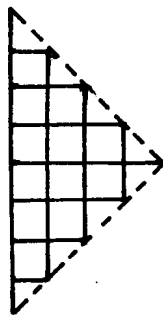
FIGURA 7

Por un argumento parecido resulta que las aristas de los demás tetraedros construidos sobre c_{01} están también en el 'mismo plano', ya que el ángulo que forman con c_{01} es el mismo que el que forma a_{01} .

De esta forma tenemos que cada arista de T_0 da lugar a una configuración plana del tipo a) de la Figura 8. Configuracio-



Configuración a)



Configuración b)

FIGURA 8

nes que, en el límite, dan un cuadrado que tiene por diagonal la arista inicial a_0 . Cada una de las 6 aristas de T_0 da lugar a un cuadrado.

Ahora bien, el plano π determinado por a_0 y a_{01} , y el plano π' determinado por a_0 y a_{01} tienen los puntos M y N en común (Figura 9). De hecho, los tres planos π , π' y π'' forman un triedro con vértice en N . En consecuencia en conjunto se forma un poliedro de 6 caras cuadradas y por tanto un cubo que encierra a T_n para cualquier n .

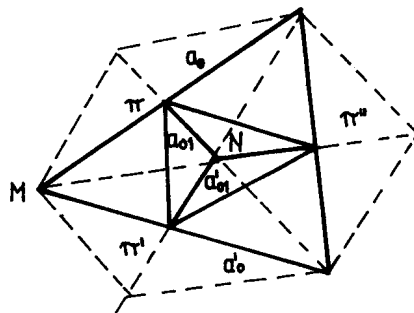


FIGURA 9

Supongamos que en el límite, queda alguna región del espacio interior al cubo sin llenar. Si en la frontera de esta región hay un trozo de cara de algún tetraedro, en algún momento del proceso este trozo será cubierto —total o parcialmente— por un nuevo tetraedro de nivel inferior, ya que dada una cara el recubrimiento por tetraedros es total (Figura 10).

La única posibilidad es que la frontera de esta región esté formada exclusivamen-

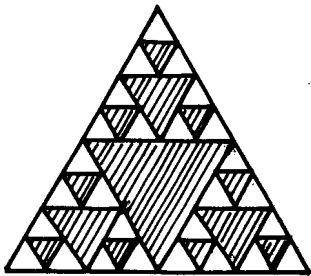


FIGURA 10

te por aristas de tetraedros. (Observemos de acuerdo con ésto, que el cubo límite C tiene sus caras formadas exclusivamente por aristas de tetraedros.)

Clasifiquemos en cada paso las aristas de la siguiente forma: cuando peguemos un nuevo tetraedro, las aristas de la base serán de clase 1 y las demás de clase 2 (Figura 11).

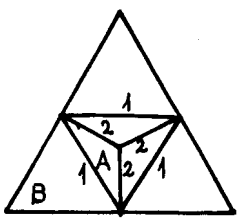


FIGURA 11

Fijémonos en una arista de clase 1. En los tetrarius siguientes esta arista dará lugar a una configuración b) (Figura 8) respecto al triángulo A y a otra configuración b) respecto al triángulo B. Pero estas dos configuraciones se superponen y no dejan espacio entre ellas, ya que $2\alpha + \beta =$

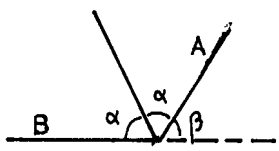


FIGURA 12

180° (Figura 12). Así que por este lado no hay agujeros. A estas aristas las llamamos de clase IN.

Respecto a una arista 2, podemos encontrarnos con que provenga de alguna de clase IN anterior o no. (Una arista proviene de otra si uno de los vértices de la primera es el punto medio de la segunda.) Si es así, también la arista de clase 2 será de clase IN, si no es así, será de clase EX (formada inicialmente por las aristas de T_0). La Figura 13 muestra que una arista de clase 2 será EX si y sólo si proviene de una anterior de clase EX. Pero es caro que las aristas de clase EX están todas ellas en las caras del cubo.

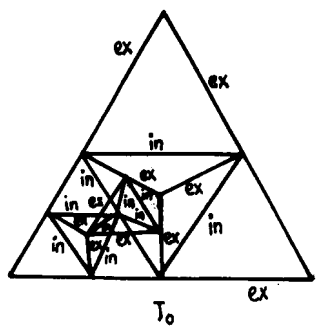


FIGURA 13

En conclusión, no hay regiones interiores al cubo no cubiertas por los tetrarius. Dicho de otra forma, dada una región D interior a C , se tiene $D \subset \lim T_n$.

Queda aún la posibilidad de que se produzcan solapamientos. Pero un sencillo cálculo muestra que el límite de V_{T_n} (volumen del tetrarius de orden n) es igual a V_c (volumen del cubo) y por tanto T_n es una "teselación" de C .

Una representación gráfica de lo que se discutió anteriormente aparece en las Figuras 14 y 15.

En la primera se muestran unas etapas en la evolución de una de las caras de T_0 . Es una imagen obtenida por computadora.

En la Figura 15 se muestra el proceso de transformación del tetraedro en el cubo a través de los tetrarius.

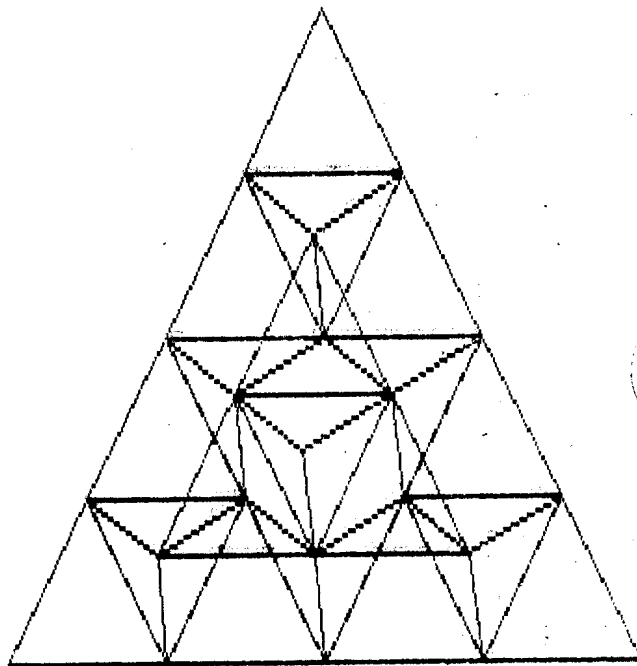
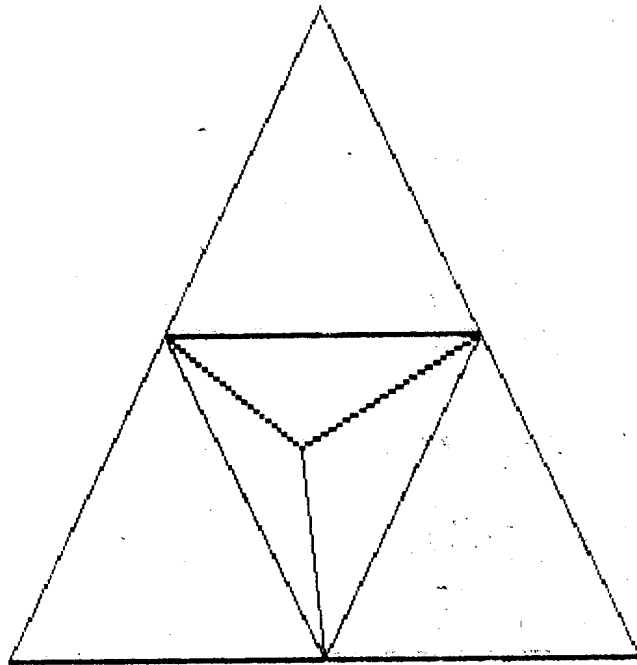
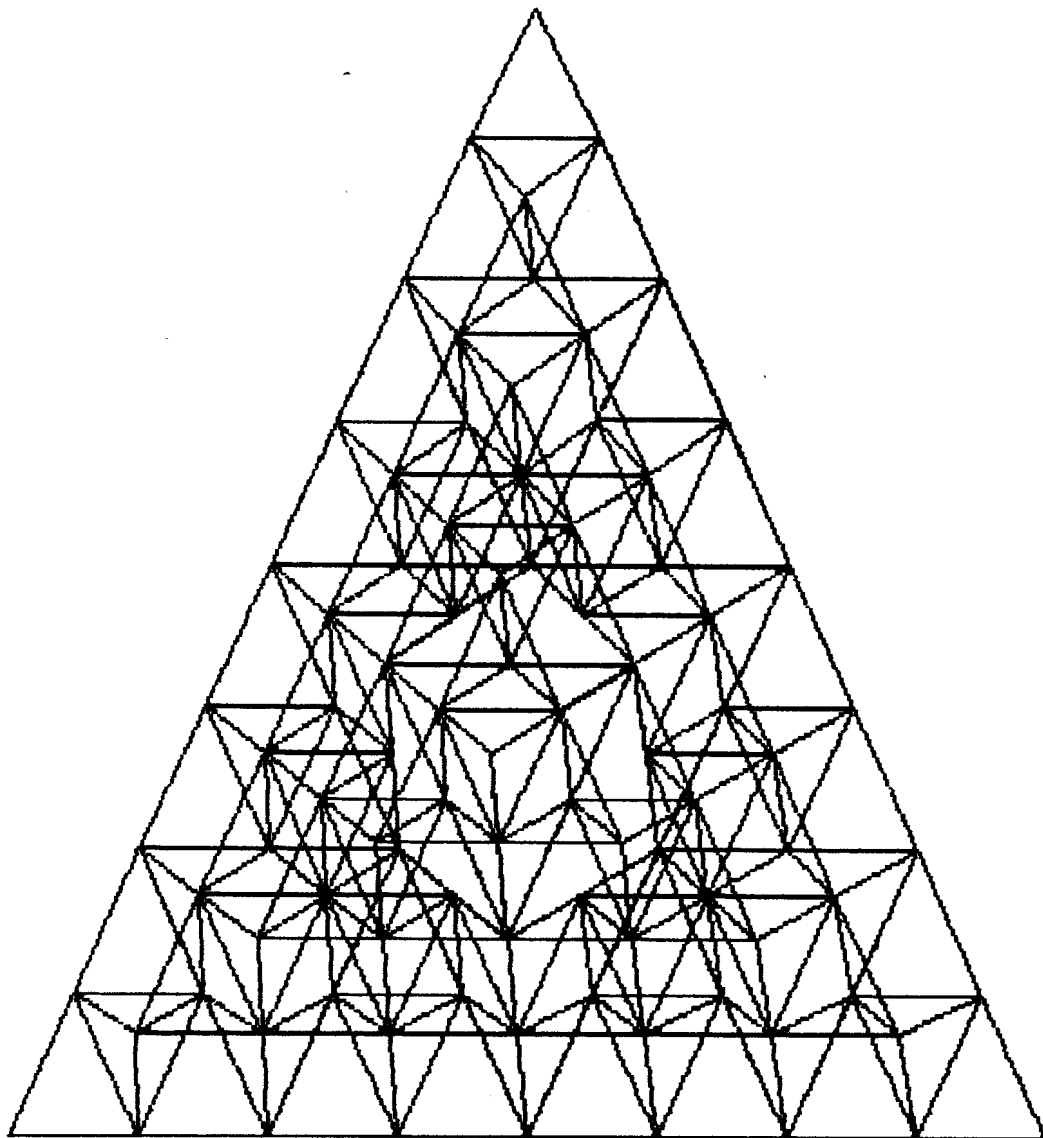
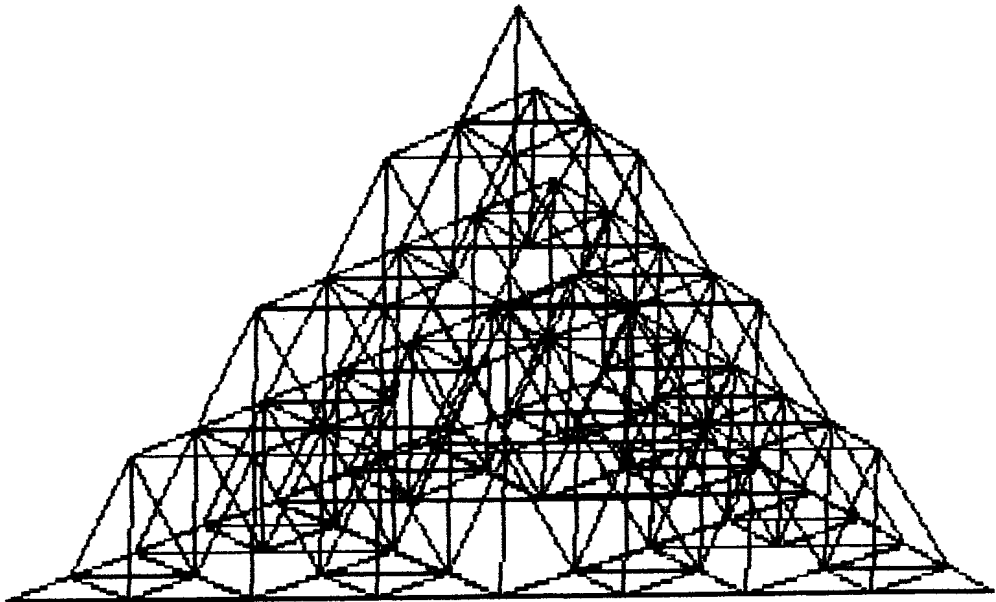
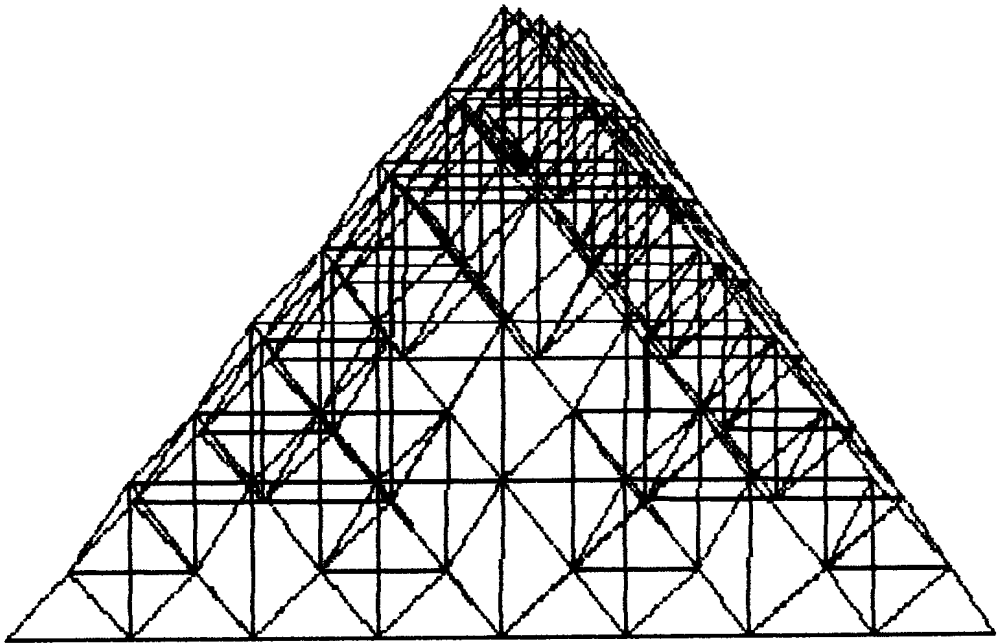


FIGURA 14





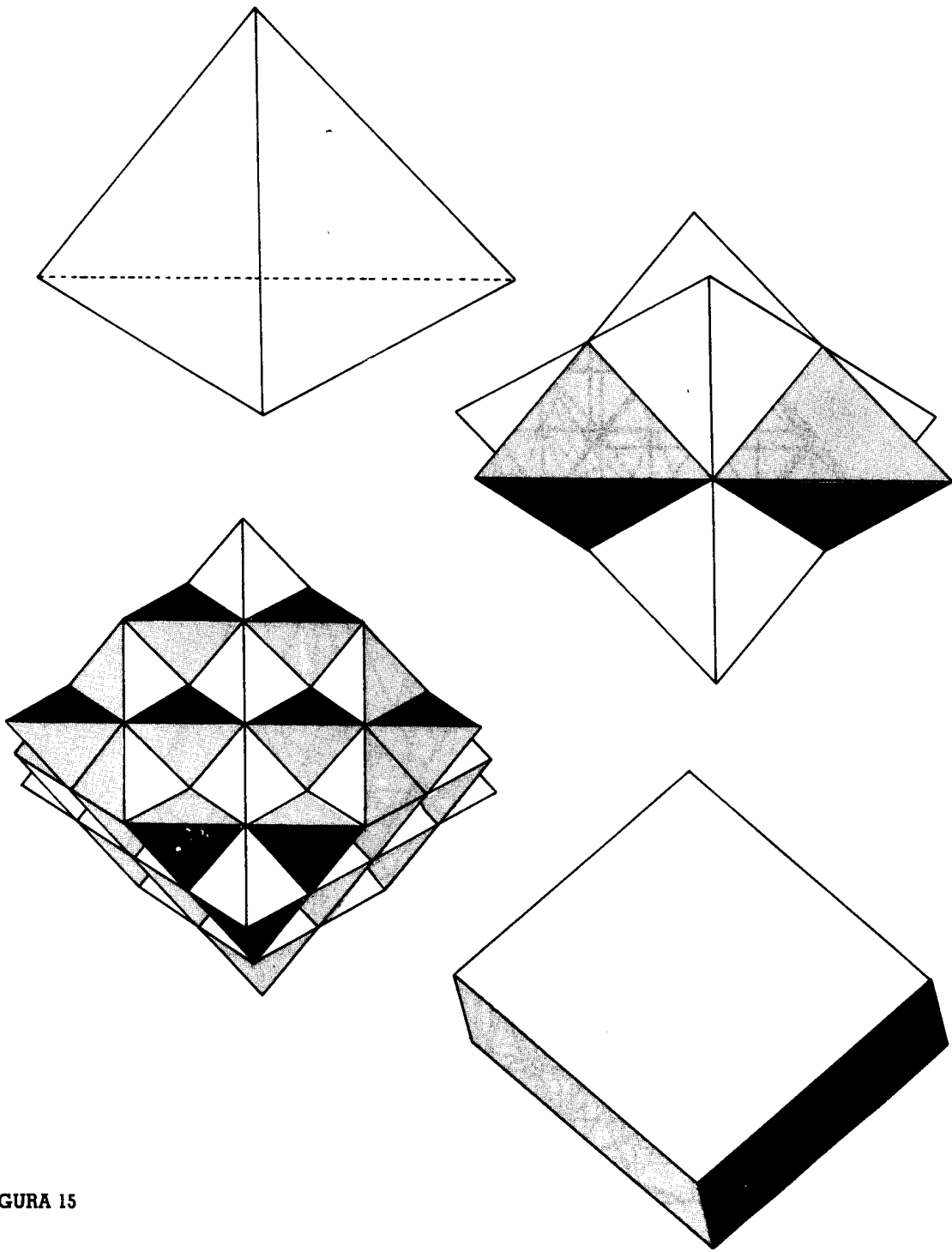


FIGURA 15