

# Cómo Inferir Procesos al Resolver Problemas Multiplicativos Tipo Producto Cartesiano

## Resumen

El artículo presenta fundamentalmente las etapas que configuran el proceso de solución y el método utilizado para analizar producciones de niños al resolver problemas multiplicativos de tipo producto cartesiano. Este método ha permitido construir un modelo que servirá para analizar procesos en una muestra amplia de niños cuando resuelven problemas del mismo tipo.

*En el Vol. 2, No. 1 se presentaron las líneas generales de la investigación que contextualiza este artículo (Orozco, 1990) y se presentó el análisis de tareas multiplicativas tipo producto cartesiano (Bedoya, 1990) Este artículo constituye el segundo de una serie de tres documentos referidos todos a la investigación "Patrones de solución de Problemas Multiplicativos en Niños de 7-12 años".<sup>1</sup>*

## Introducción

El artículo presenta avances de una investigación, que se ubica en el campo de la resolución de problemas, e intenta identificar procesos de solución en niños de 7 a 12 años, al resolver problemas multiplicativos. La investigación trabaja tres tipos de problemas multiplicativos: función lineal, proporcionalidad simple y producto cartesiano. Este artículo específicamente describe el método que

se adopta para inferir los procesos al resolver tareas tipo producto cartesiano. El método utilizado se basa en el análisis metasubjetivo de tareas propuesto por Pascual-Leone (1998).

Para trabajar con los niños problemas tipo producto cartesiano, se les presentan tareas que les exigen obtener el número de elementos que se requieren para construir paredes que varían en sus dimensiones. (Para la descripción de las tareas y la diferenciación entre problemas y tareas, ver Bedoya 1990). Partiendo de un registro filmico, se transcriben y registran las verbalizaciones y comportamientos motores de los niños en entrevistas individuales.

Este artículo inicialmente presenta las etapas que se supone configuran el proceso de solución y posteriormente las acciones investigativas que permiten llegar a los procesos, ejemplificando cada acción con el análisis de la producción de un niño.

**Mariela Orozco Hormaza**

**Investigadora Principal  
Departamento de Psicología  
Universidad del Valle  
Cali, Colombia**

<sup>1</sup> Esta investigación se adelanta en la Universidad del Valle, Cali, Colombia, bajo el auspicio de la Vicerectoría de Investigaciones de la Universidad y con el apoyo del Fondo Colombiano de Investigaciones Científicas y Proyectos Especiales "Francisco José de Caldas", COLCIENCIAS.

## Etapas del Proceso

Para identificar procesos de solución, cuando un sujeto resuelve problemas, es necesario partir de un conjunto de supuestos tomados de la teoría de procesamiento de la información. Estos supuestos básicamente son:

- Todo proceso involucra etapas
- El sujeto que resuelve problemas, es capaz de:
  - codificar los elementos significativos de los mismos
  - establecer relaciones entre ellos
  - obtener un resultado

Para resolver las tareas de la pared, el niño debe, en un primer momento, representarse la incógnita y aceptar ciertas características, cualitativas y numéricas, de las tareas. Johnson (1955, en Bourne, Ekstrand y Dominowski, 1975) llama este momento etapa de preparación. En el caso que nos ocupa, durante esta etapa los niños deben aceptar y significar:

- los paralelepípedos que se les presentan como si fueran paredes.
- que se les pregunta por el número de fichas necesarias para construir otra pared, igual a la presentada.
- que las paredes, están totalmente construidas con fichas y no únicamente con las fichas correspondientes a las columnas y filas laterales que son visibles.
- que la fichita que se les presenta es semejante a las fichas que configuran la pared.

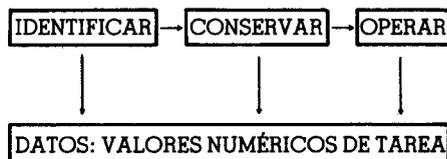
Si el sujeto puede procesar de esta manera el mensaje recibido, entonces el proceso numérico de solución puede darse. La representación de

"¿cuántas?", o sea de la incógnita, genera una teledirección en la conducta que lleva al niño a buscar para las tareas una solución numérica.<sup>2</sup>

Aunque se pueden señalar algunas especificidades en la manera como los niños significan la tarea durante la etapa de preparación, hasta el momento no se ha encontrado necesario trabajar estas diferencias. En cambio, resulta fundamental diferenciar cómo trabaja el niño las etapas subsiguientes del proceso.

La obtención o identificación de datos o valores numéricos de las tareas, la conservación de los mismos y la realización de la operación que permite llegar al resultado, en este orden, definen las etapas del proceso que permiten a los niños resolver tareas del tipo producto cartesiano.

Cuadro No. 1 Etapas del proceso de solución



— **La obtención de datos:** Describe qué datos obtiene el niño y cómo los identifica y los valores con los cuales opera. Los datos están definidos por los valores o términos del problema.

— **La conservación de datos:** Describe la manera cómo el niño conserva los valores numéricos de uno o de los dos datos involucrados en el problema. Se conserva un dato cuando se identifica y se opera con él y cuando se recupera sin importar si se opera con él. Si se conserva y se opera se dice que lo maneja.

<sup>2</sup> Quisiera señalar que en estas tareas, no se presentan los valores numéricos. Los niños deben establecerlos y como tal los deben construir en su mente y asignarlos al objeto que se les entrega.

— **El proceso operatorio:** designa las modalidades de acción u operación que adopta para generar el resultado, o sea, calcular el total.

Tomando estos supuestos como punto de partida, hemos procedido a desarrollar un modelo de análisis que permite describir qué hace y cómo resuelve el niño cada etapa del proceso. Su desarrollo exige la realización de un conjunto de acciones de investigación que a continuación describo y ejemplifico.

### Secuencia de Acciones de Investigación

Para desarrollar el modelo de análisis, ha sido necesario realizar las siguientes acciones investigativas:

1. **Registrar** producciones de niños en situación de solución.
2. **Formalizar** las producciones de cada niño, especificando:
  - Qué hace?
  - Cómo lo hace?
  - Cuándo lo hace?
3. **Asignar** actividades formalizadas, que especifican lo que el niño ha-

ce y a las modalidades de actividad que utiliza (cómo lo hace), a las etapas del proceso.

4. **Identificar** las actividades que permiten a la totalidad de los niños resolver cada etapa del proceso.

5. **Generar el modelo.**

Las etapas, que se supone configuran el proceso de solución y la manera cómo la actividad de cada niño se organiza o distribuye a través de las mismas, define para cada uno la especificidad de los procesos que el conjunto de tareas le suscita, y permite inferir el espacio, que se supone, construye para resolver las tareas.

Utilizando como ejemplo las producciones de una niña (Sujeto 2), especificaré como procedemos, a través de los pasos o acciones que configuran el proceso investigativo, hasta generar el modelo. La niña pertenece a un grupo reducido de niños —dos por nivel de edad, desde los 7 años hasta los 12— en cuyas producciones nos basamos para inferir los procesos de solución que configuran el modelo.

1. Registrar	Producciones de niños en situación de solución.
2. Formalizar	Producciones del niño especificando <ul style="list-style-type: none"> <li>— Qué hace?</li> <li>— Cómo lo hace?</li> <li>— Cuándo lo hace?</li> </ul>
3. Asignar	Actividades formalizadas a etapas del proceso <ul style="list-style-type: none"> <li>— Qué hace?</li> <li>— Cómo lo hace en etapas del proceso?</li> </ul>

### 5. Generar el Modelo

Cuadro No. 2 Acciones de investigación para generar el modelo

## Registro

El registro fílmico de las producciones de cada niño —durante entrevistas individuales en las cuales se les plantean las tareas descritas (Ver. Bedyo, 1990) sirve de base a un primer texto, que reporta el conjunto ordenado de sus producciones: verbalizaciones y actividades motoras. Este texto se designa con el nombre de protocolo. Como se trata de entrevistas normalizadas, en el protocolo solamente se consigna la actividad del niño.

### Protocolo

Sujeto 2; Edad: 7; Curso: 1o.  
Tarea No. 2.  $8 \times 4$

*(coge pared, la gira poniendo secciones superior y laterales frente a sus ojos)*

*Hay por todo: hay 18 cuadritos.*

*(Toca con índice, de abajo hacia arriba, partiendo de la 2a. ficha, una a una fichas de sección lateral derecha; pone índice sobre segunda columna y mueve cabeza hacia abajo;*

Sujeto 2; Edad: 7; Curso: 1o.  
Tarea No. 2.  $8 \times 4$

*toca con meñique otra columna y mueve cabeza hacia abajo)*

*Hay 28 cuadritos.*

*Aquí hay 7 (toca con desplazamiento descendiente de índice sección lateral pared). Aquí hay otros 7 (toca columna siguiente con desplazamiento descendiente de índice) Y aquí hay otros 7 (desplazamiento descendiente de índice sobre siguiente columna) Y aquí hay otros 7 (desplazamiento descendiente de índice sobre siguiente columna)*

### Formalizaciones de Producciones

A partir de cada protocolo elaboramos otro texto que describe, en lenguaje formal, las producciones del niño y que responde, de manera secuencial, tres preguntas básicas: Qué hace el niño, cómo lo hace y cuándo lo hace.

La secuencia ordenada de las actividades define el "cuándo". El dato o datos que obtiene y conserva especifica el "qué". Y el "cómo" se define desde la modalidad de conducta que utiliza para tales fines.

#### QUÉ?

1. Cuánto?
2. Ficha dada semejanta a ficha (fij) en pared.
3. Asigna 18 a total.
5. Obtenga valor de columna 4.
- 8 Obtiene total: 28
9. Obtiene valor de Columna 4:  $A_4 = 7$
11. Obtiene valor de Columna 3:  $A_3 = 7$
13. Obtiene valor de Columna 2:  $A_2 = 7$
15. Obtiene valor de Columna 1:  $A_1 = 7$

#### CÓMO?

4. Verbalmente
6. Señala fichas Columna 4 = fij7
7. Señala Columna 3 =  $C_3$
10. Señala Columna 4 =  $C_4$
12. Señala Columna 3 =  $C_3$
14. Señala Columna 2 =  $C_2$
16. Señala Columna 1 =  $C_1$

Cuadro No. 4 Asignación de actividades a etapas del proceso

S T	Obtención de Datos		Conserv. de Datos		Proc. Opera.	
	Qué	Cómo	Qué	Cómo	Qué	
2 1P	8 × 4	2 Número fichas de c/u de las columnas (Am, .. A1)	~2 Señala fichas de última columna y señala columnas restantes.	1 Número de fichas en columnas	1 Mentalmente	1 Componente aditivamente
	7 × 8	5 Número de fichas de la. y última columna y de fila superior. (Am, A1. Bn)	6 Enumera fichas de la. y última columna y de fila superior.	4 Número de fichas en fila	4 Correspondencia con dedos.	4 Enumera todas las fichas columna a columna.
6	8 × 4	4 Valor común columna y número fichas fila superior (A, Bn)	4 Señala columna y fila superior verbaliza total fichas común columna.	2 Número de fichas en fila y en columna (n, m)	1 Mentalmente	2 Multiplica m × n
	7 × 8	3 Número fichas fila superior y la columna. (Bn, A1)	8 Señala fichas fila superior la. columna. (fnj, fil).	2 Número de fichas en fila y en columna (n, m)	1 Mentalmente	2 Multiplica m × n

El caso que a continuación se consigna permite ejemplificar este primer nivel de análisis, que corresponde con el nivel que Pascual-Leone (1988) ha denominado análisis subjetivo.

### Asignación de Actividades Formalizadas a las Etapas del Proceso

Los dos primeros elementos de la secuencia del análisis subjetivo: cuánto? y ficha dada semejante a la ficha *Fij* en pared, corresponden a la etapa de preparación, o sea, al momento en el cual el sujeto se representa la incógnita y las características cualitativas del problema. Los siguientes elementos de la secuencia: asignar y obtener los valores de una columna<sup>3</sup>, del total y de cada columna, describen las actividades realizadas para obtener el resultado<sup>4</sup> y responde a la pregunta: "Qué hace el sujeto para llegar al resultado?".

<sup>3</sup> Es necesario señalar que la niña obtiene 7 como valor de la columna. El valor de la columna es 8. Al analizar el proceso, los errores numéricos, no interesan.

<sup>4</sup> Es igualmente necesario señalar que en el curso del proceso, la niña rectifica el resultado que obtiene.

Para contestar las preguntas: qué tipos de actividad realiza el niño para resolver cada etapa del proceso? y cómo la resuelve? las actividades formalizadas se asignan a las distintas etapas del proceso de solución. La secuencia de etapas y las actividades que se establecen para cada una, configuran una secuencia ordenada de actividades de resolución.

Veamos ejemplos de las actividades de solución, previamente presentadas (sujeto 2 ante la tarea 2:  $8 \times 4$ ) y el mismo sujeto ante la tarea 3 ( $7 \times 8$ ). Igualmente las producciones del sujeto 6 ante las mismas tareas. Las actividades debidamente formalizadas se asignan a cada etapa del proceso de solución.

### Identificación de Actividades Generales para Resolver Cada Etapa del Proceso

Finalmente, es necesario identificar las actividades generales realizadas por 10 niños, 2 por cada nivel de edad, al resolver cada etapa del proceso. Pascual-Leone llama análisis ultrasubjetivo a este nivel del análisis.

Las actividades de la totalidad de los niños debidamente formalizadas

y asignadas a las etapas del proceso configuran los datos de entrada de MULTIPATRONES, un programa de computador que se ha desarrollado para analizar las producciones de cada muestra amplia de niños; igualmente, constituyen modelos de los diferentes tipos de actividades que los sujetos adoptan, a través de las etapas de los procesos que les permiten resolver problemas tipo producto cartesiano. A continuación se describen y definen la totalidad de actividades encontradas para cada etapa.

### **Etapas 1. Obtención de datos**

El sujeto puede obtener dos tipos de datos:

**1. Número de fichas en una columna o en una fila:** Cuando determina el total de fichas existentes en una columna cualquiera o en una fila cualquiera (en una y sólo una).

**2. Número de fichas en una fila y en una columna:** Cuando determina el número de fichas existentes en una fila cualquiera y en una columna cualquiera.

El sujeto puede obtener el o los dato(s) de la siguiente manera:

Si maneja un sólo dato:

**1. Señala fichas en una columna o en una fila:** Cuando señala o toca con el dedo, o realiza movimientos de cabeza que corresponden a cada ficha en una columna o en una fila cualquiera, sin enumerarlas (sin decir 1, 2, ... etc.).

**2. Señala fichas en una columna (o fila) y señala columnas (o filas) restantes:** Cuando señala o toca con el dedo, o realiza movimientos de cabeza que corresponden con cada ficha en una columna cualquiera, sin enumerarlas y desplaza el dedo o inclina la cabeza en correspondencia con ca-

da una de las columnas o filas restantes.

Si maneja dos datos:

**3. Enumera fichas en columnas izquierda y derecha y en fila superior:** Enumera las fichas de las columnas y filas visibles de la pared. Para efectos de análisis la fila inferior no se considera visible, porque presenta una apariencia diferente a la fila superior.

**4. Señala fichas en una fila (o columna) y enumera fichas en una columna (o fila):** Cuando señala o toca con el dedo o realiza movimientos de cabeza que correspondan con cada ficha en una fila (o columnas) cualquiera, sin enumerarlas y enumera las fichas en una columna (o fila).

**5. Señala una columna y una fila y verbaliza el número total de fichas comunes a las columnas (o a las filas):** Cuando desplaza el dedo o inclina la cabeza en correspondencia con una columna y con una fila cualesquiera, verbaliza un valor y expresa que es común a todas las columnas (o filas).

**6. Señala columnas izquierda y derecha y fila superior:** Cuando señala o toca con el dedo o realiza movimientos de cabeza que corresponden con cada ficha en columnas y filas visibles de la pared, para efectos de análisis tampoco se considera visible la fila inferior.

**7. Señala fichas en una fila y en una columna:** Cuando desplaza el dedo o inclina la cabeza en correspondencia con una fila cualesquiera.

### **Etapas 2. Conservación de datos**

El sujeto puede conservar o no los datos. El sujeto que no conserva procede según los siguientes principios: Obtiene dato y no lo recuerda. Lo solicita u obtiene de nuevo y no opera con él.

Para poder operar el niño necesita conservar los datos. En los niños que no los recuerdan o conservan y los solicitan al entrevistador, opera un principio del siguiente tipo: "Para poder operar necesito datos"; por esto los vuelve a solicitar. Esto se puede contrastar con los niños que no lo solicitan y tampoco los utilizan.

La conservación de datos, se define entonces en función de las etapas anteriores y posteriores del proceso, o sea, de la obtención y de la operación de los datos. Cuando el sujeto los obtiene o identifica e inmediatamente opera con ellos se dice que los conserva. Este tipo de conservación se denomina conservación mental. Reenumeración es una manera de recuperar el dato ligándolo a la enumeración de objetos materiales. La conservación mental de los datos exige unos procesos de abstracción que la reenumeración no exige.

Estas aclaraciones permiten explicar qué dato(s) conserva y cómo lo(s) conserva.

El sujeto que conserva el dato, puede retener los siguientes datos:

**1. Número de fichas en fila (o en columna):** Cuando el niño obtiene un sólo dato y opera con él.

**2. Número de fichas en fila y en columna:** Cuando el niño obtiene los datos y opera o no con ellos.

Los modos como el sujeto conserva el (los) dato(s) pueden ser:

**1. Haciendo correspondencia con dedos:** Cuando representa algún dato con los dedos.

**2. Mentalmente y reenumerando fichas en fila (o en columna):** Cuando conserva uno de los datos mentalmente y el otro lo obtiene de nuevo por enumeración de sus elementos.

**3. Mentalmente y señalando fichas (o en columna):** Cuando conserva uno

de los datos mentalmente y el otro lo obtiene de nuevo señalando sus elementos.

**4. Mentalmente:** Cuando obtiene los datos y opera inmediatamente con ellos sin que intente previamente recuperarlos.

### Etapa 3. Proceso operatorio

Finalmente el sujeto puede realizar el proceso operatorio de las siguientes maneras:

**1. Enumera todas las fichas columna a columna (o fila a fila):** Cuando menciona uno a uno los numerales respectivos.

**2. Compone aditivamente un dato tantas veces como columnas (o filas) hayan:** Cuando opera acumulando un dato el número de veces que representa el otro dato.

**3. Multiplica los dos datos:** Realiza el producto.

El cuadro 5 configura un inventario de las actividades analizadas en la totalidad de los sujetos, para cada etapa del proceso, especificando en cada una, qué hacen y cómo lo hacen.

### Generar el Modelo

Para generar el modelo se realizan dos acciones de investigación:

— Se categorizan las actividades generales y se identifican y definen procesos

— Se desarrolla el programa de computador "MULTIPATRONES".

La comparación de las actividades generales encontradas en la muestra restringida de sujetos, permite identificar actividades tipo para las etapas del proceso, permite identificar actividades tipo para cada etapa y de esta manera identificar y definir procesos.

**Cuadro No. 5** Actividades de los Sujetos a través de las Etapas del Proceso

Obtención de Datos		Conservación de Datos		Proceso
Qué datos obtiene	Cómo los obtiene	Qué datos conserva	Cómo los conserva	Operatorio
1. Número de ficha en una columna o en una fila.	1. Señala fichas en una columna o en una fila.	1. Número de fichas en fila (o en columna).	1. Haciendo correspondencia con dedos.	1. Enumera todas las fichas columna por columna (o fila por fila).
2. Número de fichas en una fila y en una columna.	2. Señala fichas en una columna (o fila) y señala columnas (o filas) restantes.	2. Número de fichas en fila y en columna.	2. Mentalmente y reenumerando fichas en fila (o en columna).	2. Compare mentalmente un dato tantas veces como columnas (o filas) hayan.
3. No hay información.	3. Enumera fichas en columnas izquierda y derecha y en fila superior.	3. Otro tipo de dato.	3. Mentalmente y señalando fichas en fila (o en columna).	3. Multiplica los dos datos.
4. Otro tipo de dato.	4. Señala fichas en una fila (o columna) y enumera fichas en una columna (o fila).		4. Mentalmente.	4. Sin información explícita.
	5. Señala una columna y una fila y verbaliza el número total de fichas comunes a las columnas (o a las filas).		5. De otra manera.	5. Otro proceso operatorio.
	6. Señala columnas izquierda y derecha y fila superior.			
	7. Señala fichas en una fila y en una columna.			
	8. No hay información.			
	9. De otra manera.			

Los procesos se identifican examinando las actividades tipo asignadas a la secuencia de etapas del proceso y configurando con ellas una secuencia final de etapas y modalidades de actividad que describen el carácter de cada proceso.

En un artículo, que aparecerá en el próximo número de esta revista, María Eugenia Valencia describirá las actividades tipo y los procesos dentro del marco conceptual que elabora para presentar el programa "MULTIPATRONES". (Ver Valencia, 1991)

Por el momento, presentaré, a manera de ejemplo, dos procesos de los 6 encontrados, que pertenecen a los sujetos 2 y 6 entre la tarea 2:  $8 \times 4$ . (Para ubicar las actividades de estos sujetos durante la solución de la tarea, Ver Cuadro No. 4).

**Proceso 1, Sujeto 2, Tarea 2:  $8 \times 4$**

Obtener un dato mencionado cardinal

Conservar dato mentalmente  
Multiplicar

**Proceso 6, Sujeto 6, Tarea 2:  $8 \times 4$**

Obtener dos datos mencionado cardinal

Conservar dos datos mentalmente  
Multiplicar

Análisis posteriores de los procesos nos permitirán completar el siguiente nivel de análisis propuesto por Pascual—Leone (1988), o sea el metasubjetivo. En relación con los procesos presentados se puede señalar que solamente el sujeto que obtiene los dos datos y los conserva pueden operar multiplicativamente.

"MULTIPATRONES" constituye una representación aproximada del conjunto de procesos que pueden darse en los niños al resolver tareas multiplicativas tipo producto cartesiano. La utilización de "MULTIPATRONES" para analizar las producciones de una muestra amplia de niños — 100

en total, 20 por nivel de edad<sup>5</sup>— al resolver tareas de este tipo, permitirá su verificación como modelo de los procesos de los niños. Modificaciones y ajustes posteriores permitirán ade-

cuar el Programa para el análisis de las producciones de niños ante los otros tipos de problemas multiplicativos que esta investigación contempla.

## Bibliografía

**BEDOYA, Evelio.** Un Método para Analizar Tareas Multiplicativas Tipo Producto Cartesiano. EDUCACION MATEMATICA. Vol. 2, No. 1, 1990.

**BOURNE, L.E., EKSTRAND, B.R., DOMINOWSKI, R.I.** Psicología del Pensamiento. México. Editorial Trillas, 1975.

**KARPLUS R., PULOS S., STAGE E.** (1983). Proportional Reasoning of Early Adolescents. En Lesh Richard and Landau M. (ed). ACQUISITION OF MATHEMATICS CONCEPTS AND PROCESSES. New York: Academic Press. p. 45-90.

**NOELTING G.** (1980). The Develop-

ment of Proportional Reasoning and the Ratio Concept: Part 1 — Differentiation of stages. EDUCATIONAL STUDIES IN MATHEMATICS, 1980, 11, p. 331-363.

**PASCUAL-LEONE, Juan.** Análisis Metasubjetivo de Tareas. Conferencia pronunciada en I Encuentro de Egresados, Departamento de Psicología. Universidad del Valle.

**VALENCIA, María E.** Multipatronos — un Programa de Computador para Analizar Procesos de Solución al resolver Problemas Multiplicativos del Tipo Producto Cartesiano. EDUCACION MATEMATICA, Vol. 3, No. 1, 1991.

<sup>5</sup> Actualmente se trabaja con dos muestras: 50 niños en Cali, Colombia y 50 en San José, Costa Rica.

**El libro que más claramente explica la teoría y aplicaciones de las ecuaciones en diferencias a partir de ejemplos interesantes.**



### ECUACIONES EN DIFERENCIAS con Aplicaciones



**Takehito Takahashi**

Grupo Editorial Iberoamérica 

#### CARACTERISTICAS:

- Explica conceptos básicos como diferencia y suma en ecuaciones en diferencias de manera clara.
- Presenta aplicaciones a diversas áreas cuidadosamente desarrolladas.
- Expone en forma sencilla la teoría y aplicaciones de los sistemas de ecuaciones en diferencias incluyendo procesos de Markov.
- Desarrolla con detalle ejemplos de todos los tipos de ecuaciones en diferencias.
- Contiene una amplia explicación de problemas de valor inicial y de frontera.

ADQUIÉRALO EN SU LIBRERÍA PREFERIDA.

**Grupo Editorial Iberoamérica** 

Río Ganges No. 04 - 06500 México, D.F. - Tels. 5112517.