

La propiedad de densidad, características de su aprendizaje y conclusiones para la enseñanza

Resumen

En este trabajo presentamos los resultados obtenidos en la investigación sobre la representación, adquisición y utilización del concepto de densidad en los niveles de enseñanza media y universitaria. El estudio se restringió a la propiedad de densidad de los conjuntos "en sí mismos", ya que la propiedad de densidad referida a los conjuntos como subconjuntos propios es cognitivamente más compleja y requiere incluir otras variables que sugieren la conveniencia de un estudio por etapas.

Resumimos aquí las características del aprendizaje de dicho concepto y particularidades de tres momentos del mismo: inicial, intermedio y final. Mostramos la interacción con otros elementos como la constitución de clases algebraicas de números y la representación interna de las operaciones; así como la influencia de és-

tos como elementos determinantes y de control de la conducta. Por último, proponemos —en calidad de recomendaciones— algunas aplicaciones didácticas para la enseñanza de dicho concepto.

Fundamentación

El interés de un estudio cognitivo del concepto de densidad reside en que éste

Mabel Panizza

Buenos Aires, Argentina

José Ángel Álvarez

Buenos Aires, Argentina

se encuentra ligado lógicamente y psicológicamente a diversos conceptos y tipos de problemas importantes tales como el concepto de infinito, la topología de la recta, y el estudio de funciones. Al ser una de las primeras nociones en adquirirse de las que se encuentran ligadas al concepto de infinito, acarrea todas las contradicciones, la inestabilidad y las inconsistencias propias de la formación de este último. Además, lleva a menudo a situaciones paradójicas, especialmente aquéllas en las que se ponen en juego la confrontación entre lo intuitivo (ligado a la percepción), y lo formal (Álvarez, Panizza, 1989; 1989(a)).

Deberá notarse que hablamos de recuperación y utilización de la propiedad de densidad en una tarea concreta, más que de haber adquirido tal propiedad. Ello se debe a que se trata de dos categorías distintas: si un sujeto puede recuperar y utilizar la propiedad de densidad seguramente la tiene representada internamente de alguna manera, pero la recíproca no es cierta.

Estas dos categorías son equivalentes cuando el dominio se ha constituido en su totalidad y tiene la estabilidad característica del experto. Utilizamos la capacidad de recuperación y utilización como un elemento para estimar la adquisición del concepto.

Metodología

Debido a la inexistencia de investigaciones previas en este dominio específico, la naturaleza de este trabajo es eminentemente exploratoria. El diseño experimental se ha restringido al control de unas pocas variables y a una variación planificada pero no sistemática de ciertas características del dominio conceptual. Un estudio experimental confirmatorio sobre una muestra de 400 sujetos se halla actualmente en análisis estadístico, el que, preliminarmente, confirma lo aquí expuesto.

Se presentaron dos tareas de distinta complejidad a tres grupos de sujetos: uno de escuela media y dos universitarios (antes y después de cursar la materia Análisis Matemático). Las mismas tareas se ad-

ministraron en forma individual a un grupo menor de sujetos de escuela media y universitarios grabando su conducta verbal, y con cierta interacción controlada con el experimentador.

El tratamiento de los datos fue de tipo cualitativo: se analizaron las respuestas buscando determinar unidades significativas (de conocimiento, reglas de operación, representación de objetos y conceptos, etc.). Se puso especial énfasis en el análisis de los errores procesales y de contenido y de la compatibilidad de las respuestas registradas en forma oral y escrita.

Resultados

Al tratar de determinar las características de aprendizaje del concepto de densidad, se encuentra que éste está ligado, cognitivamente, a un conjunto de otros elementos cuya importancia no es conveniente soslayar. Por ese motivo, hemos estudiado la interacción de la noción de densidad con dichos elementos: la constitución de clases algebraicas de números, la representación interna de los números basada en aspectos superficiales como la notación y la representación de operaciones; y también la influencia de estos elementos como determinantes de patrones particulares de respuestas y como elementos de control de la conducta. Hemos resumido las características generales propias de tres momentos del aprendizaje: inicial, intermedio, y final. Para el detalle de la experiencia, análisis e interpretación de los datos ver Panizza, Álvarez (1987).

Estado inicial

Por los estudios realizados, podemos decir que el espacio cognitivo en el estado inicial (relativo a los conceptos aquí estudiados), tiene ciertas características de "superficialidad", hecho característico de lo que los psicólogos cognitivos denominan el sujeto novicio. (En este estado se encuentran, generalmente los sujetos de

escuela secundaria, y los que ingresan a la universidad).

En los sujetos entrevistados, los números son agrupados en clases ad hoc, que no responden a criterios abstractos, p.e. las fracciones con denominador de un dígito, o las fracciones con denominador cinco, o los decimales con dos números después de la coma, o los decimales con infinitos números después de la coma, etc. Estas clases se definen por **características perceptuales obvias** así como por las "operaciones"¹ a las que dichas clases pueden ser sometidas. Dicho de otra manera, los números de una clase son números de determinada "forma", y las **propiedades definitorias** de los mismos son las de poder ser sometidos a ciertas "operaciones". Si bien existen factores psicológicos generales que permitirían justificar este énfasis inicial en lo operatorio, es posible que la presentación habitual (escolar) de los números de manera constructiva a partir de \mathbb{N} , de modo que cada conjunto es presentado cerrando una operación particular, tenga alguna influencia.

Por otra parte, cabe destacar que por diversas razones los sujetos no parecen operar con la misma facilidad con distintos tipos de notación: operan más fácilmente con racionales en notación decimal que con racionales en notación fraccionaria, con racionales en general más fácilmente que con irracionales, y con irracionales cuya notación facilita la actualización de una operación aplicada a un número de una clase ya constituida cognitivamente (p.e. $\sqrt{2}$) que con los irracionales presentados con una letra griega (p.e. π).

Para la mayoría de los sujetos que se encuentran en esta etapa, las propiedades más abstractas de los números, como la de densidad, son nociones no intuitivas y difíciles de asociar con conjuntos numéricos particulares, a los que definen superficial y operatoriamente según hemos descrito.²

Estas características del espacio cognitivo inicial son factores determinantes de la interpretación de algunos tipos de problemas y su intento de resolución: en esta primera etapa estos problemas son interpretados **de modo de que la respuesta resulte de "operar" sobre algunos números.**

En este primer estado entonces, los sujetos entrevistados raramente recuperan o utilizan la propiedad de densidad. Esta y cualquier otra respuesta a un problema, que implique la recuperación de información declarativa asociada a clases algebraicas de números se encuentra notablemente dificultada. La tendencia es a responder o a intentar responder "operando" sobre los datos, sin preocupación por la validez general de la respuesta, o incluso su validez en ese caso particular.

Estado experto

En el otro extremo, el estado característico del experto, el dominio cognitivo está organizado de un modo cualitativamente distinto. Tienen aquí importancia fundamental las **propiedades abstractas**, las que constituyen un factor organizador principal del espacio cognitivo. Las clases algebraicas de números se definen por sus **propiedades**. Los problemas son representados y resueltos de modo de que dichas propiedades sean los elementos definitorios de la estrategia de resolución y de la solución buscada. Los tipos de problemas frecuentes en un dominio son clasificados según dichas nociones, no según características superficiales.

El estado experto se caracteriza también por un conjunto de estrategias metacognitivas —es decir estrategias que organizan su trabajo en el dominio específico, y no son necesariamente pertenecientes al mismo. Dos de estas estrategias se destacan especialmente al compararlas con la conducta propia de los estados inicial e intermedios:

— el experto utiliza a las propiedades que caracterizan a los conjuntos numéricos como elementos de control fundamental de la conducta: cualquier resultado intermedio obtenido es inmediatamente rechazado y otro camino intentado si dicho resultado es inconsistente o contradice a alguna de dichas propiedades; esto da al dominio en conjunto su característica consistencia.

— el experto utiliza una estrategia heurística de elección de la clase numérica mayor que posea determinadas propiedades. Este es un factor de economía de su conducta, que le permite trabajar con la mayor generalidad posible en un dominio dado.

Respecto al concepto que aquí nos ocupa, los expertos responden a los problemas dados recuperando y utilizando la propiedad de densidad, declarativamente representada y asociada a las clases algebraicas "estándar".

Estados intermedios

En las experiencias realizadas hemos observado un conjunto de estados intermedios. Como tales, son estados inestables, con elementos frecuentemente contradictorios que dan origen a respuestas inconsistentes, rápidamente cambiantes, sensibles a aspectos no esenciales del problema o a los objetos involucrados. Estas respuestas son muchas veces difícilmente interpretables si no se tiene una descripción clara de los estados intermedios posibles y sus particularidades.

La posibilidad de recuperación y/o utilización de la propiedad de densidad es sensible o depende en estos estados fundamentalmente de dos factores: los elementos (tipos de números) involucrados en un problema dado y la complejidad de dicho problema.

Es nuestra hipótesis que estos estados intermedios constituyen distintos momentos en el aprendizaje del concepto de densidad y en la reestructuración del dominio de representación de los números.

En estos estados, parecen coexistir dos representaciones, o más bien, dos tendencias de respuesta: una "operatoria" (la antigua) y otra vinculada con propiedades más abstractas. En el proceso de aprendizaje, la representación "operatoria", sin desaparecer, pasa a tener paulatinamente un rol secundario frente a los aspectos

más abstractos y característicos del dominio, los que se van transformando en elementos de control de la conducta. Esa competencia entre dos modalidades de representación y luego la subordinación de una de ellas a la otra se observa primero en los racionales con notación decimal y luego en los racionales con notación fraccionaria. Por ejemplo, un sujeto típico suele decir "entre 0.6 y 0.8 hay infinitos números, porque entre dos racionales hay infinitos racionales" (evidenciando que posee la propiedad de densidad representada "declarativamente"), y, por otra parte, "entre $6/10$ y $8/10$ hay un número, el $7/10$ " (respuesta "operatoria").

Asimismo, hemos observado que la dificultad para operar con ciertas notaciones inhibe la conducta "operatoria" (observada en otros casos) y la respuesta hace suponer (erróneamente) la utilización de la propiedad de densidad: p.e. un sujeto típico diría: el siguiente de $\sqrt{2}$ no existe, pero en realidad por que "la cantidad de cifras no está determinada, entonces no se puede agregar un dígito a la última cifra" (respuesta "operatoria" inhibida).

Aparentemente, por otra parte, la operatoria con la notación decimal (si la expresión es finita) posee ciertas características superficiales, que hacen más evidente o facilitan una aproximación al concepto de densidad, a partir de la "operación" virtual de agregación de infinitas cifras a continuación del último decimal. No ocurre lo mismo con la notación fraccionaria.

Respecto de la influencia de la complejidad del problema, una de las conductas características de estos estados es la capacidad de recuperación y utilización de la propiedad de densidad en una tarea inmediata a la formulación de la misma (que requiere solamente tenerla representada declarativamente) pero no en tareas más complejas (en las que se requiera o bien tenerla ligada a tipos de problemas, o bien poner en marcha un mecanismo inferencial en el que la actualización de la propiedad de densidad es uno de los pasos intermedios). En estas tareas más complejas, la respuesta "operatoria" persiste más tiempo durante el proceso de aprendiza-

je: Muchos sujetos que son capaces de decir que entre dos racionales hay infinitos racionales, y que entre dos irracionales hay infinitos irracionales, construyen "siguientes" para ambos tipos de números (tarea más compleja). Por ejemplo, una conducta típica en los sujetos entrevistados arroja las siguientes respuestas: "entre 0,6 y 0,8 hay infinitos números", y luego, "el siguiente de 0,6 es 0,7"; ó "entre $\sqrt{2}$ y π hay infinitos números", y luego, "el siguiente de $\sqrt{2}$ es $\sqrt{3}$ " (o "el siguiente de $\sqrt{2}$ es $\sqrt{2} \dots 1$ ").

Las diferencias de respuestas ante problemas de diferente complejidad y utilizando distintas clases de datos (clases y tipos de números) parece responder a distintas etapas en el aprendizaje del concepto de densidad. En cada una de ellas es posible utilizar y/o recuperar la propiedad de densidad en algunos casos y en otros no. Problemas equivalentes para el experto son totalmente diferentes para los sujetos.

Otro factor perturbador del aprendizaje del concepto de densidad está siendo estudiado por nosotros en contextos diferentes. Hemos observado a través de otras experiencias que en los sujetos coexisten naturalmente dos representaciones, una numérica y otra geométrica de la recta. Esto se mostrará en Álvarez, Panizza (1989(a)). Por ejemplo, ante una de las formulaciones de la paradoja de Zenón, un sujeto típico contesta "si va por la recta sí llega, si va por los números no". En el contexto de este trabajo deseamos destacar que cognitivamente ambos tipos de representación (algebraica y geométrica) suelen ser categorías no integradas.

Resumimos de esta manera las características fundamentales del proceso de adquisición de la propiedad de densidad:

a) La propiedad de densidad es adquirida y asociada a clases de números. Inicialmente es asociada a conjuntos numéricos "superficiales" (notacionales). Más adelante, a medida que se establecen las clases numéricas algebraicas con sus propiedades abstractas, la propiedad de densidad es asociada a dichas clases numéricas.

b) Los aprendices acceden a la propiedad de densidad (de modo confiable) sólo en la medida en que las clases algebraicas han sido construidas y los aspectos operatorios en las representaciones de los números han sido debidamente inhibidos o colocados en segundo plano.

c) Existen propiedades, "operaciones", números y formas de representación que facilitan la construcción de una primera versión de densidad, por ejemplo los números racionales, en notación decimal (si la expresión es finita) con la operación virtual de continuar agregando números a su parte decimal.

d) Algunas propiedades, "operaciones", números y formas de representación de los mismos facilitan la construcción de la propiedad de densidad pero a través de una vía más indirecta. En la medida en que a los sujetos se les hace más difícil operar con los números fraccionarios, y con los irracionales, la respuesta operatoria es inhibida y la propiedad de densidad tiene más oportunidad de ser utilizada (y presumiblemente reforzada, actuando esto sobre su adquisición).

e) Algunas propiedades, números y "operaciones" pueden tener efecto negativo o interferir en la adquisición del concepto de densidad: una utilización operatoria del concepto de número periódico o la definición de los irracionales a través de su expresión infinita no periódica lleva a confundir la existencia de infinitos números en cualquier intervalo dado con la infinitud de la expresión, periódica o no periódica.

Todo esto permite explicar y predecir la conducta de los sujetos y sugiere algunas aplicaciones didácticas a la enseñanza del concepto de densidad que ahora encararemos.

Aplicaciones

Presentamos algunas recomendaciones para el enfoque de la enseñanza del concepto de densidad, en especial sobre el or-

den de presentación de los contenidos y las tareas a realizar por los alumnos:

I. Ordenar los contenidos y tareas según su accesibilidad psicológica y el desarrollo evolutivo.

Algunos autores proponen la introducción de los números como decimales infinitos (Lax, Burstein, Lax, 1976), (Steiner, 1984). Deseamos destacar las ventajas que este enfoque ofrece, desde el punto de vista cognoscitivo, según los resultados de nuestra investigación: i) no requiere la capacidad de abstracción necesaria para la comprensión de la presentación que parte de R como cuerpo arquimediano completo; ii) no tiene las dificultades que provienen del enfoque "constructivo" a partir de N , que dificulta la adquisición de conceptos como el de densidad al favorecer la atribución de propiedades por ejemplo de Z a Q , por generalización; iii) aprovecha la facilitación que la notación decimal, como hemos descrito, ofrece para acceder a la propiedad de densidad.

Por otra parte, es habitual como estrategia didáctica, agregar a la presentación de los distintos conjuntos numéricos como estructuras algebraicas, una representación geométrica, lo que favorece la adquisición de las propiedades de orden, en particular la de densidad. Esto resulta útil en tanto a distintas representaciones los sujetos asocian distintas operaciones, tareas, y problemas, y en consecuencia cada una favorece un aspecto del aprendizaje. En este trabajo hemos destacado que cognitivamente ambos tipos de representación (algebraica y geométrica) suelen ser categorías no integradas. Una evidencia de ello es que los sujetos suelen dar respuestas inconsistentes a un mismo problema, según si es resuelto "por los números", o "por la recta". Nuestra propuesta es que se trabaje sobre la integración de ambas representaciones (por ejemplo a partir de la contradicción).

Asimismo, consideramos que es conveniente intentar afianzar primeramente los conceptos que caracterizan a los distintos conjuntos numéricos como estructuras algebraicas; presentar la noción de densidad en Q a través de problemas concretos e inducir a los alumnos a **formular y**

demostrar la propiedad; interpretar la propiedad de densidad de los racionales a través de problemas numéricos y geométricos, preparándolos para la propiedad de densidad de este conjunto como subconjunto de los reales (el conjunto de los números reales se adquiere en último término y la capacidad lógica involucrada es muy superior en este caso).

II. Controlar las interpretaciones debidas a una adquisición incompleta de conceptos cercanos y a las representaciones superficiales de los números.

Hemos señalado algunas influencias perturbadoras del concepto de infinito, y los asociados a él, como número periódico, sucesión, etc. en tanto no se han adquirido en su forma final. Sugerimos el planteo de tareas que provoquen en la conducta del sujeto respuestas inconsistentes **que él mismo pueda percibir, contrastar y revisar**. Esas tareas deberían contribuir a discriminar los aspectos esenciales del concepto de densidad de aquéllos que subyacen pero que deben ser adquiridos con anterioridad.

A fin de contribuir a disminuir los efectos negativos que provocan las representaciones "operatoriamente basadas", sugerimos p.e.: i) proponer tareas que involucren a la noción de densidad a través de números que por sus aspectos superficiales inhiben respuestas operatorias que contradicen la propiedad; ii) proponer tareas de construcción de sucesiones infinitas de números en intervalos que representen el mismo conjunto pero presentando los extremos con distinta notación; iii) inducir al alumno a la determinación de la equivalencia de leyes de construcción de las sucesiones para las distintas notaciones; iv) inducir a hacer generalizaciones que se refieran a densidad.

III. Utilizar los errores y las situaciones paradójales como fuente para una conducción personalizada del aprendizaje.

Hemos visto el significado de diferentes tipos de error en la resolución de problemas, debidos a: la representación de

números (operatoria, geométrica, algebraica, por tipos, etc.); la representación de otras nociones (infinito, determinado, y otras). Ello sugiere la utilización del error como elemento de diagnóstico. En ese orden de ideas, proponemos:

1) Presentar diferentes situaciones problemáticas que involucren a la noción de densidad, teniendo cuidado de ser exhaustivos de acuerdo con los criterios que según el sujeto que aprende constituyen tareas distintas (diferentes notaciones, diferentes enfoques en la presentación de los números, tareas cercanas desde el punto de vista lógico pero no desde el punto de vista psicológico, etc.). Pensamos que esto puede actuar sobre la adquisición de la noción, al operar sobre la habilidad de ser recuperada en los contextos correctos de su utilización (Panizza, Álvarez, 1987).

2) Ayudar al alumno a tomar conciencia de dichos errores, sus causas e interacción con otros dominios.

IV. Favorecer el aprendizaje de estrategias cognitivas y metacognitivas.

Por último, proponemos la enseñanza explícita de las estrategias cognitivas y metacognitivas propias de la conducta experta, a fin de que las mismas sean aprendibles, controlables y revisables. Opinamos que dichas estrategias deben ser incluidas en los currícula escolares y universitarios, dado que aprender involucra no sólo adquirir conocimientos del dominio específico, sino también estrategias de resolución de problemas y de control de la conducta.

Notas:

1. Cabe destacar que los sujetos realizan dos tipos de operaciones: las operaciones habituales de suma y producto, y otras que surgen de la interpretación particular que el sujeto hace de una tarea concreta, la representación interna de los números, etc. (las mismas pueden coincidir, o no, con las operaciones habituales). Para distinguir ambas acepciones, en este trabajo escribimos entre comillas "operación", u "operatoria", al referirnos al segundo sentido.

2. Pensamos que, en este sentido, la presentación constructiva de los números también influye —de manera subyacente—, al convertirse en solidaria de la atribución de todas las características de un conjunto al conjunto siguiente (por ejemplo, la no densidad).

3. Agradecemos la valiosa colaboración de Denise Najmanovich.

4. Este trabajo de investigación fue subsidiado por el CONICET (PID0384/85).

ÁLVAREZ, J.A., PANIZZA, M. *Resultados de aplicabilidad pedagógica de una investigación cognitiva en el aprendizaje del análisis matemático. Enseñanza de las Ciencias, Instituto de Ciencias de L'Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona y El Servei de Formació Permanent de la Universitat de València, Volumen 7/n 2-mayo de 1989.*

ÁLVAREZ, J.A., PANIZZA, M.(a) *Paradojas en el aprendizaje de la matemática: estudio empírico y aplicaciones didácticas. Universidad de Belgrano, Facultad de Tecnología, Instituto de Investigaciones de Enseñanza no convencional, Informe IAC-19-89, 1989(a).*

CHI, GLASER, R., REES. *Expertise in problem solving, en Sternberg, R. (ed.): Advances in the psychology of human intelligence Vol. 1, LEA, Hillsdale, 1981.*

GLASER, R. *Education and thinking - The role of knowledge. Am. Psychologist, Vol. 39, No. 2, 1984, 93-104.*

LAX, P., BURSTEIN, S., LAX, A. *Calculus with applications and computing. Springer, N.Y., 1976.*

PANIZZA, M., ÁLVAREZ, J.A. *Aprendizaje del concepto de densidad y características de su aplicación. Universidad de Belgrano, Facultad de Tecnología, Instituto de Investigaciones en Enseñanza no convencional, Informe IAC-13-87, 1987.*

REIF, F. *Scientific approaches to science education. Physics Today, Vol. 39, No. 11, 1986, 48-56.*

RESNICK, L.B. *Mathematics and science learning: A new conception. Science, Vol. 220, 29 april 1983, 477-478.*

STEINER, R. *Teaching about the real numbers. Am. Math. Monthly, Vol. 91, No. 3, 1984, 202-203.*