ARTICULOS

Representaciones de la sucesión de Fibonacci

José Alejandro Domínguez Torres
Fundación Arturo Rosenblueth

1. Introducción

Una de las sucesiones más conocidas en computación, y más específicamente para ejemplificar la construcción de algoritmos en donde está involucrado el concepto de recursión, es la sucesión denominada *sucesión de Fibonacci*, la cual está definida como sigue (Gersting, 1987) (en lo sucesivo denotaremos por **N** al conjunto de los números naturales, por **R** al conjunto de los números reales y por **C** al conjunto de los números complejos).

Definición 1.1 La sucesión de Fibonacci es una función $F : \boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{N}$ definida por

$$F(1) = 1, \quad (1.1)$$
$$F(2) = 1, \quad (1.2)$$
$$F(n) = F(n-1) + F(n-2); \text{ si } n > 2. \quad (1.3)$$

La sucesión de Fibonacci se encuentra por primera vez en el libro *Liber Abaci* (1202) cuyo autor es Fibonacci. En este libro el autor se hace la siguiente pregunta: ¿Cuántas parejas de conejos habrá después de un año, si al comienzo hay sólo una pareja y sabemos que cada una produce, al mes, una nueva pareja, la cual se vuelve productiva al mes suponiendo que no existe mortandad entre los conejos? Para saber la cantidad de conejos que habrá después de cierto tiempo es necesario analizar las expresiones dadas en la Definición 1.1.

Puesto que la expresión (1.3) se refiere a versiones anteriores de ella misma es fácil calcular los primeros elementos de la sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, $\cdots$. Sin embargo, si por alguna razón deseamos conocer el elemento $F(5000)$ esta definición ya no es muy útil debido a que es necesario conocer los 4 999 elementos anteriores, que se convierte en un cálculo muy tedioso si no se cuenta con una computadora que pueda realizar tal cálculo.

En el presente artículo haremos un estudio de la sucesión de Fibonacci el cual nos conducirá, por un lado, a construir una expresión "cerrada" de esta sucesión, i.e., una expresión que permita conocer cualquier elemento de la sucesión sin conocer los elementos precedentes y de una forma más rápida, y por otro lado nos llevará a construir, usando técnicas de variable compleja, una representación integral de esta sucesión.

2. La ecuación en diferencias de Fibonacci

Haciendo referencia a la Definición 1.1, la sucesión de Fibonacci se puede reescribir como

$$F(n) - F(n-1) - F(n-2) = 0, \quad (2.1)$$

$$F(1) = 1; \quad (2.2)$$

$$F(2) = 1. \quad (2.3)$$

La ecuación (2.1) representa, desde el punto de vista de la Teoría de Ecuaciones en Diferencias, una *ecuación en diferencias lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes* (MicVens, 1987) sujeta a las condiciones iniciales (2.2) y (2.3). A la ecuación (2.1) la llamaremos *ecuación en diferencias de Fibonacci*. Esta ecuación admite una solución de la forma (MicVens, 1987)

$$F(n) = r^n, \quad (2.4)$$

donde r es en general elemento de $\boldsymbol{C}$.

Sustituyendo la solución (2.4) en la ecuación (2.1) se llega al siguiente polinomio de segundo orden (*polinomio característico* de la ecuación de Fibonacci):

$$r^2 - r - 1 = 0; \quad (2.5)$$

cuyas soluciones están dadas por

$$r_{1,2} = [1 \pm (5)^{1/2}]/2. \quad (2.6)$$

Debido a la linealidad de la ecuación (2.1), la solución más general es una combinación lineal de las soluciones anteriores:

$$F(n) = Ar_1^n + Br_2^n. \quad (2.7)$$

Las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones (2.2) y (2.3). En efecto, las condiciones (2.2), (2.3) y la expresión (2.7) nos conducen al siguiente sistema de ecuaciones

$$Ar_1 + Br_2 = 1$$

$$Ar_1^2 + Br_2^2 = 1$$

cuya solución es $A = (5)^{-1/2}$ y $B = -(5)^{-1/2}$.

De esta forma una expresión alternativa para la sucesión de Fibonacci es

$$F(n) = (5)^{-1/2}\frac{[1 + (5)^{1/2}]^n}{2^n} + - (5)^{-1/2}\frac{[1 - (5)^{1/2}]^n}{2^n}; \quad n \in \boldsymbol{N}. \quad (2.8)$$

Notemos que la expresión (2.8) permite calcular, para cualquier valor de $n \in N$, los elementos de la sucesión de Fibonacci sin calcular los elementos procedentes.

De esta forma hemos demostrado el siguiente lema.

Lema 2.1. La sucesión de Fibonacci definida por las expresiones (1.1)-(1.3) es equivalente a la sucesión dada por la expresión (2.8), para toda $n \in \boldsymbol{N}$.

3. Representación integral de la sucesión de Fibonacci

El polinomio característico (2.5) se puede visualizar como el polinomio característico de la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$f''(z) - f'(z) - f(z) = 0; \quad (3.1)$$

donde $z \in \boldsymbol{C}$. Debido a la linealidad de la ecuación (3.1), la solución más general es:

$$f(z) = G\exp(r_1 z) + + H\exp(r_2 z). \quad (3.2)$$

Si imponemos a la ecuación (3.1) las siguientes condiciones iniciales

$$f(0) = 0; \qquad f'(0) = 1; \quad (3.3)$$

entonces G y H toman los valores $(5)^{-1/2}$ y $-(5)^{-1/2}$, respectivamente. De esta forma la solución particular de la ecuación (3.1) que satisface las condiciones (3.3) está dada por

$$\phi(z) = (5)^{-1/2}\exp(r_1 z) + - (5)^{-1/2}\exp(r_2 z). \quad (3.4)$$

Notemos que $\phi: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ es una función analítica (Murray, 1967) en todo $\boldsymbol{C}$ debido a la analiticidad de la función exponencial. Derivando n veces ϕ con respecto de z y evaluando en $z = 0$ se tiene que

$$\phi^{(n)}(0) = (5)^{-1/2} r_1^n - (5)^{-1/2} r_2^n. \tag{3.5}$$

Comparando la expresión (3.5) con la expresión (2.8) se tiene que

$$F(n) = \phi^{(n)}(0). \tag{3.6}$$

Por otro lado, uno de los resultados más importantes de la Teoría de Variable Compleja es el de la *Fórmula Integral de Cauchy* (Murray, 1967) cuyo enunciado es: "sea $g(z)$ una función analítica dentro y sobre una curva simple cerrada C y α un punto dentro de C, entonces la n-ésima derivada de $g(z)$ en $z = \alpha$ está dada por

$$g^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{z - \alpha} dz, \tag{3.7}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \cdots;$$

donde C se recorre en el sentido (contra las manecillas del reloj) positivo".

De esta forma si γ es un círculo de radio $\varrho > 0$ con centro en $z = 0$, entonces de las expresiones (3.5), (3.6) y (3.7) la sucesión de Fibonacci admite una representación integral de la forma

$$F(n) = \frac{n!}{2(5)^{+1/2} \pi i} \int_\gamma \frac{\exp(r_1 z) - \exp(r_2 z)}{z^n} dz \tag{3.8}$$

De esta forma el resultado principal de este artículo se puede enunciar como sigue:

Teorema 3.1. ***(Fibonacci).*** Las representaciones para la sucesión de Fibonacci dadas en la Definición 1.1, en la expresión (2.8) y en la expresión (3.8) son equivalentes.

4. Conclusiones

Una de las tendencias naturales de los estudiantes de las licenciaturas en ciencias e ingeniería es el de querer relacionar los conceptos y las teorías que están aprendiendo en alguna asignatura con los conceptos y teorías que han aprendido en asignaturas anteriores. La relación anterior no siempre se puede dar por diversos motivos, uno de los cuales es que el estudiante piensa que una teoría avanzada sólo sirve para resolver problemas muy complejos, lo cual es erróneo.

El presente artículo es un ejemplo claro de como un problema sencillo, y de alguna forma "real" (como es el caso de los conejos), involucra conceptos básicos de diferentes asignaturas de matemáticas. En nuestro caso existen conceptos de recursión, sucesiones, ecuaciones en diferencias, ecuaciones diferenciales y variable compleja para dar diferentes expresiones a la solución al problema de los conejos.

Bibliografía

GERSTING, J.L. *"Mathematical Structures for Computer Science"*. Second Edition. W.H. Freeman and Company, New York, 1987.

MICKENS, R.E. *"Difference Equations"*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1987.

MURRAY, R.S. *"Complex Variables"*. McGraw-Hill Book, Co., Inc., U.S.A., 1967.