ARTICULOS

Desarrollo en Fracción Contínua Simple Infinita de las Potencias Enteras del Número de Oro

RESUMEN:

El llamado número de oro, denotado comúnmente mediante la letra griega $\varnothing$, es el irracional positivo solución a la ecuación cuadrática.

$$X^2 - X - 1 = 0$$

Su expresión irracional es

$$\varnothing = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Cualquiera de las potencias enteras de este número no sólo es la suma de sus dos potencias inmediatas anteriores, también satisfacen determinada ecuación cuadrática asociada y pueden ser escritas como formas lineales en coeficientes enteros de su primera potencia.

Estas singulares propiedades permiten generar sus correspondientes desarrollos en fracción continua simple infinita, mismos que el lector podrá encontrar en el presente trabajo.

PALABRAS PREVIAS

Si bien es un hecho que la circulación de la revista está principalmente restringida a los docentes de la matemática, no podemos presuponer, de ningún modo, conocimientos muy especializados con relación al tema indicado.

Es por ello que se ha hecho el mayor esfuerzo en presentarle un artículo razonablemente accesible y completo en sí mismo, en donde por supuesto encontra-

Adrián Fuentes

ITESM, Querétaro

rá, al menos mencionados, los elementos mínimos suficientes para abordarlo con éxito. No obstante, respecto al tema central, desarrollo en fracción continua simple infinita de las potencias enteras del número de oro, se presentará una discusión formal y rigurosa.

Por otra parte conviene mencionar que, por razones didácticas, hemos dividido explícitamente el artículo en dos partes complementarias. La primera de las cuales presenta, a manera de introducción, un breve pero necesario marco teórico de conocimientos matemáticos que actuarán como soporte de la parte complementaria, la que, propiamente hablando, contiene la esencia misma del artículo.

La estructura y contenido del presente trabajo es la siguiente:

PARTE I. INTRODUCCION

1.1 EL NUMERO DE ORO Y LA SUCESION DE FIBONACCI.
1.2 FRACCIONES CONTINUAS SIMPLES
1.3 OBJETIVOS ESPECIFICOS.

PARTE II. CUERPO:

2.1 ALGUNOS TEOREMAS DE APOYO
2.2 DESARROLLO EN FRACCION CONTINUA SIMPLE INFINITA DE LAS POTENCIAS ENTERAS DEL NUMERO DE ORO.
CONCLUSIONES.
2.3 COMENTARIOS FINALES.

Las referencias bibliográficas en donde el lector podrá realizar consultas más específicas sobre los aspectos afines al tema, se han incluido al final del artículo.

INTRODUCCION (PRIMERA PARTE)

1.1 El Número de Oro y la Sucesión de Fibonacci

Sea $\overline{AB}$ un segmento de recta arbitrario.

Supongamos ahora que un cierto punto P divide al segmento $\overline{AB}$ en dos partes tales que $|\overline{AP}| > |\overline{PB}|$

Se dice que el punto P divide al segmento $\overline{AB}$ en ***RAZÓN ÁUREA*** si ocurre que

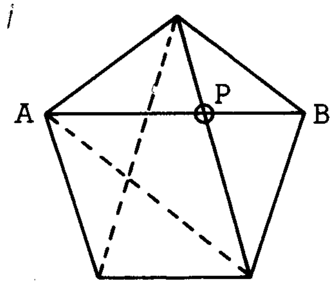
$$\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AP}|}$$

Dicho de otro modo, el punto P divide al segmento $\overline{AB}$ en ***RAZÓN ÁUREA,*** si la mayor de las partes contiene a la menor tantas veces como la mayor está contenida en el segmento.*

Un resultado muy interesante de la geometría plana es el hecho singular de que la diagonal de un pentágono regular es dividida en ***razón áurea*** por cualquiera de las diagonales del vértice comprendido.**

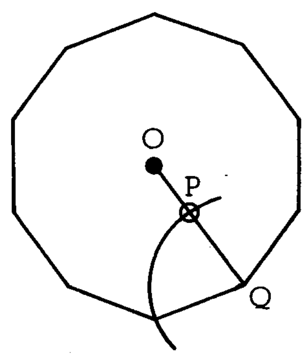
** Es quizás, por tal razón, que la estrella de cinco puntas fuera tomada como signo religioso entre los pitagóricos, no obstante, no discutiremos aquí esta idea.

* La división de un segmento en tales partes era considerada antíguamente como «divina»



En la figura, el punto P divide al segmento AB en razón áurea.

Puede también demostrarse que radio y lado de un decágono regular están en ***razón áurea***.



En la figura, el punto P divide en razón áurea al segmento OQ

Definición

Supongamos que un segmento de recta está dividido en razón áurea.

EL NUMERO DE ORO, que se le escribe con la letra griega Ø, está definido como el cociente que resulta de dividir la mayor de las partes del segmento por la menor.

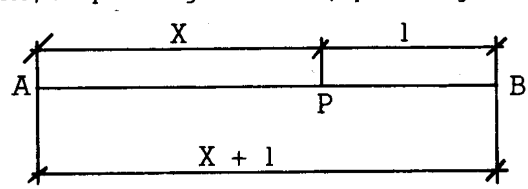
Teorema 1.1

$$\varnothing = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Demostración

Sea $\overline{AB}$ un segmento de recta dividido en razón áurea por el punto P.

Podemos suponer, sin perder generalidad, que el segmento $\overline{BP}$ es unitario.



Como P divide en razón áurea al segmento $\overline{AB}$, se tiene que

$$\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AP}|}$$

esto es

$$X = \frac{X + 1}{X}$$

es decir

$$X^2 - X - 1 = 0$$

de donde

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Por otra parte, dado que $X = \varnothing$ y dado que X es una magnitud positiva, encontramos, finalmente, que

$$\varnothing = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

l.q.q.d

Ocurre que el llamado número de oro resulta ser un irracional muy singular. En efecto, mencionemos tan sólo algunas de sus cualidades:

1) Toda potencia entera de $\varnothing$ es la suma de sus dos potencias enteras inmediatas anteriores.

En particular, el lector podrá verificar, por ejemplo, que

$$\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2} = \varnothing^5 = \varnothing^4 + \varnothing^3 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} + (2 + \sqrt{5}$$

Por supuesto, no cualquier número posee tal propiedad. De hecho, puede demostrarse que el número de oro es el único con esa sorprendente propiedad.

2) Sea n un número entero mayor a la unidad. Entonces existen los enteros a_n y b_n tales que

$$\varnothing^n = a_n\varnothing + b_n$$

Por ejemplo, el lector podrá confirmar que

$$\varnothing^2 = \varnothing + 1$$
$$\varnothing^3 = 2\varnothing + 1$$
$$\varnothing^4 = 3\varnothing + 2$$

Esta propiedad es simplemente impresionante, pues permite expresar las potencias de $\varnothing$ como formas lineales completas en $\varnothing$ con coeficientes naturales. Si usted quiere convencerse de lo singular que es esta propiedad, intente colocar, en los espacios vacíos, enteros positivos que satisfagan las igualdades siguientes:

$(\frac{5}{2})^2 = (\ )\ \frac{5}{2} +$ ________

$(\sqrt{3})^4 = (\ )\ \sqrt{3} +$ ________

3) La suma infinita de las potencias enteras negativas de $\varnothing$ es igual a $\varnothing$. Esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varnothing^{-n} = \varnothing$$

4) La suma infinita de las potencias impares negativas de $\varnothing$ es igual a 1. Esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varnothing^{-(2n-1)} = 1$$

Por otra parte, existe una sucesión infinita de enteros

$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$

fuertemente vinculada con el número de oro:

LA SUCESION DE FIBONACCI*

En esta sucesión, cada número es la suma de los dos enteros inmediatos anteriores, comenzando con los enteros 0 y 1.

De modo que si u_n representa el n-ésimo número de Fibonacci, se tiene que

$$u_n = \begin{cases} 0, \text{ para } n = 0 \\ 1, \text{ para } n = 1 \\ u_{n-2} + u_{n-1}, \text{ para } n \geq 2 \end{cases}$$

Extendiendo la SUCESION DE FIBONACCI hasta el término décimo quinto, encontramos la siguiente sucesión:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...

Resulta muy interesante que esta sucesión presente vínculos importantes con el NUMERO DE ORO, sobre todo si consideramos que su origen es completamente diferente respecto al origen de aquél.

Se mencionó que si n es un entero mayor que la unidad, entonces existen los enteros positivos a_n y b_n tales que

$$\varnothing^n = a_n\varnothing + b_n$$

Resulta, —*oh sorpresa*—, que $a_n = u_n$ y $b_n = u_{n-1}$

De modo que

$$\varnothing^n = u_n\varnothing + u_{n-1}$$

* Propuesta en el medievo por el italiano Leonardo de Pisa (1175-1250) al estudiar un problema de reproducción de conejos bajo condiciones iniciales.

3) La suma infinita de las potencias enteras negativas de $\varnothing$ es igual a $\varnothing$. Esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varnothing^{-n} = \varnothing$$

4) La suma infinita de las potencias impares negativas de $\varnothing$ es igual a 1. Esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varnothing^{-(2n-1)} = 1$$

Por otra parte, existe una sucesión infinita de enteros

$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$

fuertemente vinculada con el número de oro:

LA SUCESION DE FIBONACCI*

En esta sucesión, cada número es la suma de los dos enteros inmediatos anteriores, comenzando con los enteros 0 y 1.

De modo que si u_n representa el n-ésimo número de Fibonacci, se tiene que

$$u_n = \begin{cases} 0, \text{ para } n = 0 \\ 1, \text{ para } n = 1 \\ u_{n-2} + u_{n-1}, \text{ para } n \geq 2 \end{cases}$$

Extendiendo la SUCESION DE FIBONACCI hasta el término décimo quinto, encontramos la siguiente sucesión:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...

Resulta muy interesante que esta sucesión presente vínculos importantes con el NUMERO DE ORO, sobre todo si consideramos que su origen es completamente diferente respecto al origen de aquél.

Se mencionó que si n es un entero mayor que la unidad, entonces existen los enteros positivos a_n y b_n tales que

$$\varnothing^n = a_n\varnothing + b_n$$

Resulta, *—oh sorpresa—*, que $a_n = u_n$ y $b_n = u_{n-1}$

De modo que

$$\varnothing^n = u_n\varnothing + u_{n-1}$$

* Propuesta en el medievo por el italiano Leonardo de Pisa (1175-1250) al estudiar un problema de reproducción de conejos bajo condiciones iniciales.

De hecho, la igualdad anterior será demostrada en la segunda parte del presente trabajo.

Otro interesante resultado que vincula la sucesión de Fibonacci con el número de oro es el siguiente hecho:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varnothing$$

(siempre que n sea un entero positivo).

Por último, mencionemos que si n es un entero positivo, entonces

$$[\varnothing^n] = \begin{cases} u_{n-1} + u_{n+1}, & \text{si n es impar} \\ u_{n-1} + u_{n+1} - 1, & \text{si n es par} \end{cases}$$

(en donde el corchete representa la parte entera).

1.2 Fracciones continuas simples

Observemos la curiosa cadena de igualdades siguiente:

$$\frac{105}{38} = 2 + \frac{29}{38} = 2 + \cfrac{1}{\frac{38}{29}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{9}{29}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{29}{9}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \frac{2}{9}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{9}{2}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}$$

La última expresión obtenida es el desarrollo en fracción continua simple finita del racional 105/38

De igual manera, se dice que la expresión

$$3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

Es el desarrollo en fracción continua simple finita del número 149/44

Formalmente, una fracción continua simple finita es toda expresión racional de la forma

—(1)—

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots \; \cfrac{\ddots}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

en donde la sucesión de denominadores parciales

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}, q_n$$

son todos enteros positivos, excepto posiblemente el entero q_0, que corresponde a la parte entera del desarrollo.

Utilizaremos la representación lineal

$$(q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}, q_n)$$

para designar en lo sucesivo a la forma racional (1).

Por otra parte, si k es un entero del intervalo [0, n], se define W_k, el k-ésimo convergente de la forma (1), mediante

$$W_k = (q_0, q_1, q_2, \ldots, q_k)$$

Por ejemplo, en el desarrollo continuado

$$\frac{105}{38} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1}}}} = (2, 1, 3, 4, 2)$$

encontramos los siguientes cinco convergentes:

$W_0 = (2) = 2$ (convergente cero)

$W_1 = (2, 1) = 2 + \frac{1}{1} = 3$ (primer convergente)

$W_2 = (2, 1, 3) = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}} = \frac{11}{4}$ (segundo convergente)

$$W_3 = (2, 1, 3, 4) = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = \frac{47}{17} \text{ (tercer convergente)}$$

$$W_4 = (2, 1, 3, 4, 2) = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{105}{38} \text{ (cuarto convergente)}$$

Por supuesto, observamos que el convergente de mayor índice corresponde al propio racional, mientras que el convergente cero corresponde a su parte entera, como puede apreciarse.

Es de nuestro particular interés extender el concepto de fracción continua simple al caso infinito.

Se demuestra en la Teoría de los Números que los convergentes en un desarrollo continuado satisfacen las siguientes propiedades:

* $W_0 < W_2 < W_4 < W_6 < \ldots < W_1$
* $W_1 > W_3 > W_5 > W_7 > \ldots > W_0$
* $W_{k+1} - W_k$ tiende alternadamente a cero, conforme k aumenta

de donde se concluye que las sucesiones de convergentes, tanto de índice par como de índice impar, tienen un mismo límite.

Lo anterior valida la siguiente

DEFINICION (Caso Infinito)

Sea $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ una sucesión infinita de enteros positivos, excepto posiblemente el entero a_0. Se define la FRACCION CONTINUA SIMPLE INFINITA correspondiente, escrita

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

(en donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ son los *denominadores parciales* y a_0 la *parte entera* de la fracción).

como

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots) = \lim_{n \to \infty} W_n$$

en donde W_n, el n-ésimo convergente, está dado por

$$W_n = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

Un caso particular interesante se tiene cuando la sucesión infinita de enteros presenta una forma periódica, esto es, cuando en la sucesión existe una secuencia finita de términos consecutivos que se repite continuamente.

Utilizaremos en tal caso una barra para indicar el período.

Así, se conviene en escribir

$$(3, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots) = (3, \overline{1,2)} = (3, 1, \overline{2,1)}$$
$$(5, 2, 3, 5, 2, 3, 5, 2, 3, \ldots) = (\overline{5,2,3)} = (5,\overline{2,3,5)}$$

Estudiemos, a manera de ejemplo, el caso de la fracción periódica

$$(1,\overline{2)} = (1, 2, 2, 2, \ldots)$$

Se observa que

$$W_0 = 1$$

$$W_1 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{1 + W_0}$$

$$W_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + W_1}$$

$$W_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + W_2}$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

En general, puede demostrarse por inducción que

$$W_n = 1 + \frac{1}{1 + W_{n-1}} = \frac{2 + W_{n-1}}{1 + W_{n-1}}$$

Sea $$L = \lim_{n \to \infty} W_n$$

de donde

$$L = \frac{2 + L}{1 + L} \quad (L > 1)$$

es decir

$$L^2 = 2$$

por tanto

$$L = \sqrt{2}$$

de modo que

$$(1,\overline{2}) = \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

Nótese que el convergente cero en el desarrollo continuado de $\sqrt{2}$ corresponde justamente a su parte entera, de modo que su parte decimal está dada por el resto del desarrollo.

Supóngase ahora que se desea encontrar el desarrollo en fracción continua simple infinita del número $\sqrt{5}$ Para ello observamos la siguiente igualdad:

$$(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = 1$$

Encontramos que

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$$

de donde

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5} + 2} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\sqrt{5} + 2}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\sqrt{5} + 2}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\sqrt{5} + 2}}}} = \cdots$$

luego, hemos encontrado que

$$\sqrt{5} = (2, \overline{4})$$

Resulta claro que la técnica presentada para encontrar el desarrollo continuado de $\sqrt{5}$ se fundamenta en la identidad algebráica.

$$(\sqrt{n^2 + 1} + n)(\sqrt{n^2 + 1} - n) = 1$$

De modo que el procedimiento utilizado se restringe a los irracionales de la forma

$$\sqrt{n^2+1}$$

obteniendo, para este caso en general, el siguiente resultado

$$\sqrt{n^2+1} = (n,\overline{2n})$$

Un resultado de gran importancia en la Teoría de los Números establece que toda fracción continua simple infinita converge necesariamente a un número irracional, que será raíz de una ecuación polinomial cuadrática si y sólo si la mencionada fracción es periódica.

Para terminar, demostraremos dos teoremas de particular interés.

Teorema 1.2

Sea m un entero positivo. Entonces, los irracionales

$$x_1 = (\overline{m}) \text{ y } x_2 = -(0,\overline{m})$$

satisfacen la ecuación cuadrática

$$x^2 - mx - 1 = 0$$

Demostración

Demostraremos que

$$x_1 + x_2 = m \text{ y } x_1 x_2 = -1$$

por definición se tiene

$$(o,\overline{m}) = \frac{1}{(\overline{m})}$$

y

$$(o,\overline{m}) = \frac{-1}{(\overline{m})}$$

como $x_2 = -(o,\overline{m})$ $x_1 = (\overline{m})$

se tiene

$$X_2 = \frac{-1}{X_1}$$

de donde

$$x_1 x_2 = -1$$

Sea $\zeta = (\overline{m})$

entonces

$$x_1 + x_2 = x_1 - \frac{1}{x_1} = \zeta - \frac{1}{\zeta} = m + \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta} = m$$

por lo tanto,

$x_1 + x_2 = m \qquad x_1 x_2 = -1 \qquad$ 1. q.q.d.

Teorema 1.3

Sea m un entero mayor que uno. Entonces, los irracionales

$$x_1 = (m,\overline{1,m\text{-}1}) \text{ y } x_2 = (0,m,\overline{1,m\text{-}1})$$

satisfacen la ecuación cuadrática

$$x^2 - (m+1)\,x + 1 = 0$$

Demostración

Sea

$$\zeta = (\overline{1,m\text{-}1}) = 1 + \cfrac{1}{(m-1) + \cfrac{1}{\zeta}}$$

Entonces

$$m\zeta + 1 = [(m-1)\zeta + 1]\zeta$$

Por otra parte

$$x_1 = m + \frac{1}{\zeta} \quad \text{y} \quad x_2 = \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{\zeta}} = \frac{1}{x_1}$$

Luego, encontramos que

$$x_1 + x_2 = m + \frac{1}{\zeta} + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{\zeta}} = m + \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta}{m\zeta + 1} = m + \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{(m\text{-}1)\zeta + 1}$$

$$= m + \frac{m\zeta + 1}{[(m-1)\zeta + 1]\zeta} = m + 1$$

y $x_1 x_2 = 1 \qquad$ 1.q.q.d.

1.3. Objetivos Específicos

Debe decirse que, en general, el encontrar el desarrollo en fracción continua simple infinita de un irracional no es un problema trivial.

Desde luego que si el irracional en cuestión es raíz de una ecuación cuadrática en coeficientes enteros, el problema se simplifica significativamente.

Por otra parte vale la pena observar que

$\emptyset$ es solución a la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$
$\emptyset^2$ es solución a la ecuación cuadrática $x^2 - 3x + 1 = 0$
$\emptyset^3$ es solución a la ecuación cuadrática $x^2 - 4x - 1 = 0$
$\emptyset^4$ es solución a la ecuación cuadrática $x^2 - 7x + 1 = 0$
$\emptyset^5$ es solución a la ecuación cuadrática $x^2 - 11x - 1 = 0$
$\emptyset^6$ es solución a la ecuación cuadrática $x^2 - 18x + 1 = 0$

(Observaciones análogas pueden hacerse con relación a las potencias negativas de $\emptyset$).

Cabe pues suponer que toda potencia entera de $\emptyset$ es solución a determinada ecuación cuadrática asociada. En lo que sigue nos ocuparemos en demostrar que esta hipótesis es correcta, con lo cual podremos asegurar además de la existencia de sus desarrollos continuados, su inexorable periodicidad.

El presentar tales desarrollos constituye el objetivo central del presente artículo.

Por otra parte, si bien es cierto que puede suponerse que el desarrollo continuado del número de oro es del dominio común de matemáticos y aficionados, los desarrollos correspondientes a sus potencias enteras no presumen ser demasiado populares, al menos debo confesar no haber encontrado indicio alguno sobre ellos.

Lo anterior es motivo suficiente para emprender su búsqueda.

Cuerpo (Parte Dos)

2.1 Algunos teoremas de apoyo

A continuación desarrollaremos la teoría suficiente para demostrar que el número de oro y cualquiera de sus potencias enteras satisface determinada ecuación cuadrática.

Lema 2.1

Para todo entero n, se satisface la igualdad

$$\emptyset^n = \emptyset^{n-1} + \emptyset^{n-2}$$

Demostración (Inducción sobre n)

- El caso $n=2$ se comprueba directamente.
- Supongamos que $\emptyset^k = \emptyset^{k-1} + \emptyset^{k-2}$ para algún entero k
- Demostraremos entonces que

1) $\emptyset^{k+1} = \emptyset^k + \emptyset^{k-1}$
2) $\emptyset^{k-1} = \emptyset^{k-2} + \emptyset^{k-3}$

En efecto

1) $\varnothing^{k+1} = \varnothing\varnothing^{k} = \varnothing(\varnothing^{k-1} + \varnothing^{k-2}) = \varnothing^{k} + \varnothing^{k-1}$ l.q.q.d.
2) $\varnothing^{k-1} = \varnothing^{-1}\varnothing^{k} = \varnothing^{-1}(\varnothing^{k-1} + \varnothing^{k-2}) = \varnothing^{k-2} + \varnothing^{k-3}$ l.q.q.d.

Obsérvese que el paso inductivo en la demostración anterior es un simple manejo algebráico en $\varnothing$ llevado a cabo de manera tal que si se sustituye $\varnothing$ por cualquier otra literal el procedimiento es el mismo. Por supuesto, el hecho fundamental en la demostración es la hipótesis inductiva.

Lema 2.2

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\varnothing^{n} = u_n\varnothing + u_{n-1}$$

Demostración (Inducción sobre n)

- Los casos n = 1 y n = 2 se verifican trivialmente
- Supongamos que

1) $\varnothing^{k} = u_k\varnothing + u_{k-1}$
2) $\varnothing^{k+1} = u_{k+1}\varnothing + u_k$

para algún entero k

- Demostraremos entonces que

$$\varnothing^{k+2} = u_{k+2}\varnothing + u_{k+1}$$

En efecto, de acuerdo al lema anterior

$$\varnothing^{k+2} = \varnothing^{K+1} + \varnothing^{k}$$

Aplicando las hipótesis

$$\varnothing^{k+2} = (u_k + u_{k+1})\varnothing + (u_{k-1} + u_k)$$

Y de acuerdo a la definición de número de Fibonacci, encontramos finalmente que

$$\varnothing^{k+2} = u_{k+2}\varnothing + u_{k+1} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Lema 2.3

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\varnothing^{-n} = \begin{cases} u_n\varnothing - u_{n+1}, & \text{n impar} \\ u_{n+1} - u_n\varnothing, & \text{n par} \end{cases}$$

Demostración

Es análoga a la demostración del lema anterior y recomendamos al lector la lleve a cabo.

Teorema 2.1

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\varnothing^n = \frac{(u_{n-1} + u_{n+1}) + u_n\sqrt{5}}{2}$$

(Esta igualdad puede ser considerada como una fórmula alternativa al teorema de Binet)

Demostración

Sustituyase el valor numérico de Ø en el miembro derecho del lema 2.2

Teorema 2.2

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\varnothing^{-n} = \begin{cases} \dfrac{u_n\sqrt{5} - (u_{n-1} + u_{n+1})}{2}, & n \text{ impar} \\ \dfrac{(u_{n-1} + u_{n+1}\sqrt{5}}{2}, & n \text{ par} \end{cases}$$

(Este par de igualdades complementan al teorema 2.1)

Demostración

Sustitúyase el valor numérico de Ø en el miembro derecho del lema 2.3

Lema 2.4

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$u_n^2 - u_{n-1}\,u_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

Demostración (Inducción sobre n)

- El caso n = 1 se comprueba directamente.
- Supongamos que

$$u_k^2 - u_{k-1}u_{k+1} = (-1)^{k+1}$$

para algún entero k

- Demostraremos entonces que

$$u_{k+1}^2 - u_k u_{k+2} = (-1)^{k+2}$$

En efecto, la hipótesis inductiva puede escribirse como sigue:

$$u_k(u_k + u_{k+1}) - u_{k+1}(u_{k-1} + u_k) = (-1)^{k+1}$$

es decir
$$u_k\, u_{k+2} - u^2_{k+1} = (-1)^{k+1}$$

multiplicando por -1, encontramos finalmente que

$$u^2_{k+1} - u_k u_{k+2} = (-1)^{k+2}$$

Lema 2.5

Para todo entero positivo n, se satisface la igualdad

$$\varnothing^{-n} = \begin{cases} u_n\varnothing - u_{n+1}, & n \text{ impar} \\ u_{n+1} - u_n\varnothing, & n \text{ par} \end{cases}$$

Demostración

De acuerdo al lema anterior

$$u_{n-1}u_{n+1} = u_n^2 - (-1)^{n+1} = u_n^2 + (-1)^n$$

de donde

$$(2u_{n-1})(2u_{n+1}) = 4(u_n^2 + (-1)^n)$$

es decir

$$((u_{n-1} + u_{n+1}) - u_n)((u_{n-1} + u_{n+1}) + u_n) = 4(u_n^2 + (-1)^n)$$

luego

$$(u_{n-1} + u_{n+1})^2 - u_n^2 = 4(-1)^n + 4(-1)_n$$

equivalentemente

$$5u_n^2 = (u_{n-1} + u_{n+1})^2 - 4(-1)^n$$

por tanto

$$5u_n^2 = \begin{cases} (u_{n-1} + u_{n+1})^2 + 4, & n \text{ impar} \\ (u_{n-1} + u_{n+1})^2 - 4, & n \text{ par} \end{cases}$$

Teorema 2.3

Sea n un impar positivo.
Entonces, $\varnothing^n$ y $-\varnothing^n$ son las raíces a la ecuación cuadrática

$$x^2 - (u_{n-1} + u_{n+1})\, x - 1 = 0$$

Demostración

$$x = \frac{(u_{n-1} + u_{n+1}) \pm \sqrt{(u_{n-1} + u_{n+1})^2 + 4}}{2} = \frac{(u_{n-1} + u_{n+1}) \pm u_n\sqrt{5}}{2}$$

$$= \begin{cases} \varnothing^n \\ -\varnothing^{-n} \end{cases}$$

Teorema 2.4

Sea n un par positivo.
Entonces, $\varnothing$ y $\varnothing^{-n}$ son las raíces a la ecuación cuadrática

$$x^2 - (u_{n-1} + n_{n+1})\,x + 1 = 0$$

Demostración

$$x = \frac{(u_{n-1} + u_{n+1}) \pm \sqrt{(u_{n-1} + u_{n+1})^2 - 4}}{2} = \frac{(u_{n-1} + u_{n+1}) \pm u_n\sqrt{5}}{2}$$

$$= \varnothing^{\pm n}$$

Obsérvese que en las demostraciones de los dos teoremas anteriores hemos aplicado el lema 2.5 y los teoremas 2.1 y 2.2

Se tienen pues los elementos suficientes para generar los desarrollos en fracción continua simple infinita del número de oro y de sus respectivas potencias enteras.

Corolario 2.1

Sea n un entero positivo. Entonces.

1) Si n es impar, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\varnothing^n = \left(\overline{u_{n-1} + u_{n+1}}\right) \qquad \varnothing^{-n} = \left(0,\overline{u_{n-1} + u_{n+1}}\right)$$

2) Si n es par, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\varnothing^n = \left(u_{n-1} + u_{n+1} - 1,\ \overline{1, u_{n-1} + u_{n+1} - 2}\right)$$

$$\varnothing^{-n} = \left(0, u_{n-1} + u_{n+1} - 1,\ \overline{1, u_{n-1} + u_{n+1} - 2}\right)$$

Demostración

1) Haciendo

$$m = u_{n-1} + u_{n+1}$$

en el teorema 1.2, encontramos que

$$\left(\overline{u_{n-1} + u_{n+1}}\right) \text{ y } -\left(0,\ \overline{u_{n-1} + u_{n+1}}\right)$$

satisfacen la ecuación cuadrática

$$x^2 - (u_{n-1} + u_{n+1})\, x - 1 = 0$$

Pero, en virtud del teorema 2.3, las soluciones a la ecuación anterior son $\varnothing^n$ y $-\varnothing^{-n}$ l.q.q.d.

2) La demostración es análoga a la del inciso anterior.

2.2 Desarrollo en fracción continua simple infinita de las potencias enteras del número de oro. Conclusiones.

Teorema 2.2 Desarrollo en fracción continua simple infinita de las potencias enteras del número de oro. Conclusiones.

1) Cualquier potencia entera del número de oro es la suma de sus dos potencias enteras inmediatas anteriores. Más aún, puede demostrarse que $\varnothing$ es el único número real con esa propiedad (lema 2.1).

2) La forma irracional de cualquier potencia del número de oro puede escribirse en términos de tres número de Fibonacci consecutivos (teoremas 2.1 y 2.2). Particularmente

$$\varnothing = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \varnothing^{-n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\varnothing^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad \varnothing^{-2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\varnothing^3 = 2+\sqrt{5} \qquad \varnothing^{-3} = \sqrt{5}-2$$

$$\varnothing^4 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \qquad \varnothing^{-4} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

$$\varnothing^5 = \frac{11+5\sqrt{5}}{2} \qquad \varnothing^{-5} = \frac{5\sqrt{5}-11}{2}$$

$$\varnothing^6 = 9+4\sqrt{5} \qquad \varnothing^{-6} = 9-4\sqrt{5}$$

$$\varnothing^7 = \frac{29+13\sqrt{5}}{2} \qquad \varnothing^{-7} = \frac{13\sqrt{5}-29}{2}$$

$$\varnothing^8 = \frac{47+21\sqrt{5}}{2} \qquad \varnothing^{-8} = \frac{47-21\sqrt{5}}{2}$$

$$\varnothing^9 = 38+17\sqrt{5} \qquad \varnothing^{-9} = 17\sqrt{5}-38$$

$$\varnothing^{10} = \frac{123+55\sqrt{5}}{2} \qquad \varnothing^{-10} = \frac{123+55\sqrt{5}}{2}$$

3) Los desarrollos en fracción continua simple infinita de las primeras diez potencias enteras positivas del **número de oro** son los siguientes (**corolario 2.1**):

$$\varnothing = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}} \qquad \varnothing^2 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$\varnothing^3 = 4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \dots}}}} \qquad \varnothing^4 = 6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \dots}}}}$$

$$\varnothing^5 = 11 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{11 + \dots}}}} \qquad \varnothing^6 = 17 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \dots}}}}$$

$$\varnothing^7 = 29 + \cfrac{1}{29 + \cfrac{1}{29 + \cfrac{1}{29 + \cfrac{1}{29 + \dots}}}} \qquad \varnothing^8 = 46 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{45 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{45 + \dots}}}}$$

$$\varnothing^9 = 76 + \cfrac{1}{76 + \cfrac{1}{76 + \cfrac{1}{76 + \cfrac{1}{76 + \dots}}}} \qquad \varnothing^{10} = 122 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{121 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{121 + \dots}}}}$$

4) Una consecuencia al **corolario 2.1.** es la siguiente:

$$[\varnothing^n] = \begin{cases} u_{n-1} + u_{n+1}, \text{ n impar} \\ U_{n-1} + u_{n+1} - 1, \text{ n par} \end{cases}$$

En donde los corchetes denotan la **parte entera.**

Queda pues clara la fuerte vinculación del **número de oro** con la **sucesión de Fibonacci.**

2.3 Comentarios Finales.

Cabe señalar que prácticamente cualquier publicación que sobre el **número de oro** el lector pudiera encontrar, observará principalmente una tendencia estética en su presentación. Si bien es cierto que el tema se presta sobradamente para ello, existen también aspectos esencialmente matemáticos de suficiente interés y belleza dignos de un estudio puramente teórico.

Consideramos que el material aquí desarrollado contiene resultados teóricos de suficiente atractivo como para ser fácilmente incluidos en alguna exposición relacionada con la **estética matemática.**

Consideramos también importante el hecho de que el estudiante participe en exposiciones de esta naturaleza, donde se exhibe el encanto y poder de la matemática. **Es justamente en esta dirección donde puede el material desarrollado encontrar su mejor lugar.**

Por otra parte suponemos que el presente artículo puede ser tomado como material para una conferencia de nivel superior básico.

Bibliografía

HUNTLEY, H.E. The Divine Proportion a Study in Mathematical Beauty New York, Dover Publication, Inc. 1970

VOROBYOV, N.N. Los Números de Fibonacci Colección Temas Matemáticos, Limusa, México 1988

GHYKA, MATILA C. El Número de Oro Ritos y Ritmos Pitagóricos en el Desarrollo de la Civilización Occidental Editorial Poseidon, Barcelona 1978

NIVEN IVAN yZUCKERMANN, HERBERTS Introducción a la Teoría de los Números Limusa, México 1976

GUELFOND, A.O. Resolución de Ecuaciones en Números Enteros Lecciones Populares de Matemáticas Editorial Mir Moscú, 1979

BERGAMINI, DAVID Matemáticas Colección Científica de Time Life, 1979