■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 3 • No. 1 • Abril 1991 ■ © GEI ■ Pág. 5 ■

ARTICULOS

# Los obstáculos de la intuición en el aprendizaje de procesos infinitos

## Introducción

Los conceptos matemáticos vinculados con el infinito y su operatividad —en los diferentes contextos en los cuales se presentan— muestran consistentemente ser fuente de dificultades y conflictos para el estudiante.

Nuestro interés se centra en el estudio de posibles obstrucciones al aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos que presentan dificultades para el estudiante, en particular aquellos relacionados con la noción de infinito, con procesos infinitos o conjuntos infinitos.

Con el objeto principal de intentar entender lo más posible la realidad cognoscitiva del alumno con respecto a conceptos relacionados con el infinito, buscando así ganar evidencia sobre algunos esquemas de respuesta que presentan ya cierta estabilidad y que por ello adquieren interés para un estudio sostenido, realizamos un trabajo de investigación experimental.

En este ensayo reportaremos los resultados más significativos de este trabajo.

## Marco teórico y contexto del trabajo

En la matemática, casi más que en cualquier otro dominio, las contradicciones entre las estructuras formales de ella y las estructuras cognoscitivas del estudiante se presentan en toda su complejidad. Esto es cierto, también, en el aprendizaje de conceptos matemáticos vinculados con el infinito.

El conocimiento matemático se expresa en un lenguaje formal, que es necesario para que este conocimiento pueda ser comunicado a la comunidad sin que haya desviaciones mayores en la interpretación de su significado, y para que sea posible trabajar con él de manera estructurada.

El proceso de enseñanza tiene como objetivo comunicar este conocimiento. Por tanto, una enseñanza adecuada debe tomar en cuenta el problema que el alumno tiene ante sí de decodificación del conocimiento. No es suficiente la presentación del conocimiento formalizado; también es necesario inducir el descubrimiento por parte del alumno, lo cual facilita la asimilación del concepto. Es entonces importante tomar en cuenta, hasta donde sea posible, la realidad cognoscitiva del estudiante, antes y durante el aprendizaje.

**Ana Isabel Sacristán Rock**
**Sección Matemática Educativa**
**CINVESTAV México, 1990**

La realidad cognoscitiva del estudiante incluye todas esas nociones vagas, prejuicios e intuiciones que tiene el alumno con respecto al tema que es objeto de aprendizaje (que surgen de la experiencia particular del estudiante, de conocimientos previos, o incluso del lenguaje cotidiano). Los investigadores Tall y Vinner señalan lo siguiente:

> ... la estructura cognoscitiva en su totalidad que colorea el significado del concepto [...] es más que una imagen mental, ya sea pictórica, simbólica o de otro tipo. Durante los procesos mentales de recordar y manipular un concepto, muchos procesos relacionados se involucran, afectando consciente o inconscientemente el significado y uso [del concepto]. [Tall-Vinner, 1981].[1]

La realidad cognoscitiva del alumno puede, por esto, ser de gran influencia para el aprendizaje.

Entendemos el proceso de aprendizaje como una modificación del campo nocional del estudiante, relacionado con un concepto o conocimiento (en nuestro caso matemático). Este campo nocional, llamado imagen conceptual por Tall y Vinner, es descrito por ellos de la siguiente forma:

> Usaremos el término *imagen conceptual* para describir toda la estructura cognoscitiva relacionada al concepto, y que incluye todas las imagenes mentales y propiedades y procesos relacionados. Se construye a través de los años en base a experiencias de todo tipo, cambiando a medida que el individuo se enfrenta a nuevos estímulos y madura. [Tall, D & Vinner, S.; 1981].[2]

Básicamente, el proceso de aprendizaje es el proceso de transferencia de un concepto o conocimiento expresado en lenguaje formal al campo nocional del alumno. Durante este proceso el alumno va asimilando, incorporando distintos *estratos* de ese conocimiento a su campo nocional, y al mismo tiempo modificando y adaptando otros ya existentes.

Para que este proceso (i.e. esta transferencia de conocimiento) sea posible es necesaria, aunque no suficiente, la comprensión del significado de la definición formal.

Para esto se requiere la asimilación de varios estratos del conocimiento, a través de una interacción continua entre el objeto mental y la definición formal, involucrando el "uso" del conocimiento.

Pero el uso de un conocimiento implica también la adquisición de una operatividad la cual se da tanto en un contexto no-formalizado (en el nivel cognoscitivo) como en un contexto formalizado (teórico). La operatividad de nuevos conocimientos en el nivel cognoscitivo surge muchas veces a partir de las operatividades de conocimientos anteriores, lo cual puede ser causa de *obstrucción* para un aprendizaje adecuado[3]. Resulta entonces necesario para superar esto, esa interacción continua entre el objeto mental y la definición formal.

Es importante, por tanto, tomar en cuenta las posibles influencias de la realidad cognoscitiva para el aprendizaje. Entre ellas podemos nombrar algunas como lo serían las *nociones espontáneas* que surgen, por ejemplo, del lenguaje cotidiano (cuando se utiliza un mismo vocabulario en el len-

[1] Tall, D., Vinner S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. Educational Studies, p.271-284.

[2] Traducida del inglés

[3] Un ejemplo de esto, y que forma parte de nuestro trabajo, es lo que llamamos la transferencia de la operatividad de lo finito a lo infinito, que incluye, por ejemplo, los intentos de aritmetizar la cardialidad de conjuntos infinitos calcando la operatividad de los finitos, entre otras cosas.

guaje formal y en el cotidiano pero que tiene un significado mucho más preciso, y a veces muy distinto, en el primer caso); también podemos considerar como influencia para el aprendizaje la posible *transferencia* de un conocimiento previo, o posiblemente de únicamente algunos estratos específicos de cierto conocimiento, al campo nocional del nuevo conocimiento.

Un aspecto subyacente común de todas estas posibles influencias es el de la intuición que nosotros consideramos una parte esencial del pensamiento informal. La intuición es algo que se construye y apoya en la experiencia y el conocimiento. La intuición puede ser una guía invaluable para el descubrimiento de nuevo conocimiento (con carácter heurístico). Sin embargo, en otros casos puede obstaculizar no solo la adquisición, sino también la construcción de un nuevo conocimiento. En algunos casos, la intuición conduce a la búsqueda de analogías: el estudiante o el matemático, al encontrarse ante nuevos conceptos trata de asociar, comparar el nuevo conocimiento con el ya existente dentro de su campo conceptual, e intenta aplicar al nuevo conocimiento nociones referentes al anterior. Es decir, intuitivamente puede haber una transferencia de propiedades o aspectos del conocimiento ya existente al que se quiere incorporar.

Esto puede dar origen a una serie de conflictos cognoscitivos cuando el nuevo conocimiento se sale del campo nocional y no encaja o incluso llega a ser contradictorio con el conocimiento ya existente. Cuando esto sucede, es claro que resulta más difícil la aceptación del nuevo objeto, y es necesaria una reestructuración y ampliación del campo nocional (proceso de asimilación y acomodación).

Es por esto que el matemático, aunque inicialmente se puede guiar por su intuición, necesita trabajar de manera teórica para poder avanzar dentro de nuevas áreas[4].

El propósito de nuestro trabajo es la determinación de obstáculos, de carácter intuitivo, que surgen de conflictos entre el objeto mental del estudiante y las definiciones formales de conceptos matemáticos relacionados con el infinito. El tomar en cuenta estos posibles obstáculos dentro de la enseñanza puede ser de ayuda para su superación.

Este artículo reporta los resultados de un estudio empírico hecho con estudiantes que se complementa con un análisis histórico de los temas que tratamos. El análisis histórico es útil para la investigación en educación matemática puesto que señala puntos de dificultad o de conflicto en el desarrollo de la matemática, mismos que pueden indicar posibles obstáculos en el aprendizaje de esos temas. En nuestro caso, la historia muestra una serie de ejemplos donde aparecen muchos de los "errores" y conflictos que se encuentran después en los estudiantes.

Para ilustrar esto, podemos dar como ejemplo, sin aquí entrar en mucho detalle, el manejo que los matemáticos de los siglos XVII y XVIII hacían de las series infinitas. Aunque desde muy temprano en la historia se descubrió que muchas sumas infinitas poseían una suma (es decir, que eran convergentes, usando lenguaje moderno), en muchos casos se transfirió el manejo algebraico de las sumas finitas para manipular las sumas infinitas. Esto trajo consigo muchos problemas ya que dependiendo de qué se hiciera con la suma se obtenían resultados distintos. Nuestro objetivo aquí, como ya lo señalamos, no es el de hacer un análisis histórico, pero este ejemplo es uno que muestra claramente lo que nosotros llamamos

[4] Ver el ejemplo del conflicto ante la igualdad de cardinalidad de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ en Cantor.

la transferencia de la operatividad de lo finito a lo infinito, y que es algo que aparece frecuentemente en los esquemas de respuesta de los estudiantes.

Otro ejemplo histórico que sirve de complemento para nuestro estudio puesto que muestra la ruptura de nuevos objetos matemáticos con la intuición (es decir la ruptura entre la definición formal y el objeto mental) es el que surge en el desarrollo de la teoría cantoriana de conjuntos, cuando Cantor al encontrar matemáticamente, mediante su propia teoría, la igualdad de cardinalidad entre el plano y la recta tiene él mismo dificultad en aceptarlo, y lo expresa diciendo "Lo veo, pero no lo creo". Aquí aparece claramente el choque entre la intuición de Cantor y su propio esquema formal.

Es importante señalar que nuestro trabajo se realizó dentro del contexto de varias investigaciones que se han estado llevando a cabo en la Sección de Matemática Educativa desde hace varios años, y de hecho encuentra sus orígenes allí.

## Descripción del trabajo

Nuestro trabajo consistió fundamentalmente en dos etapas, cada una basada en la aplicación de un cuestionario. La primera etapa se basó en un trabajo de investigación previo realizado por Patricia Salinas[5], y nuestro cuestionario contenía algunas de las mismas preguntas que ella había usado en los suyos. El objetivo principal de este primer cuestionario era el de indagar sobre las nociones espontáneas, en un contexto no necesariamente matemático, que los alumnos tienen sobre los conceptos de *Límite* y *Correspondencia* y que podrían influir en su aprendizaje dentro del contexto propiamente matemático.

La segunda parte tenía como objetivo hacer un estudio más específico del manejo del infinito por parte de los estudiantes, en distintas áreas de la matemática, y dentro de esto observar en qué tipo de situaciones se presenta una posible *transferencia de la operatividad de lo finito a lo infinito.* Nos interesaba particularmente hacer una búsqueda y un análisis de esta transferencia en el contexto aritmético, intentando detectar la "transferencia falsa" de un campo operatorio aritmético finito a uno infinito, al igual que en el contexto de la teoría de conjuntos.

## 1. Primer cuestionario: Nociones espontáneas de *Límite* y de correspondencias entre conjuntos

### *Objetivos*

Como señalamos arriba el objetivo del primer cuestionario era la indagación sobre las nociones espontáneas que los alumnos pueden tener de los conceptos de *Límite* y *Correspondencia.*

Escogimos estos dos conceptos por lo siguiente:

Dentro de nuestro estudio sobre las obstrucciones en el aprendizaje de objetos matemáticos vinculados con el infinito, nos interesaban tanto los procesos infinitos como los conjuntos infinitos.

Dentro de lo relacionado con procesos infinitos se encuentra el área de sucesiones infinitas y de límite; nos interesaba pues saber qué tanto, y en qué casos los alumnos pueden aceptar la idea de existencia de un límite, y si consideran que este es alcanzable o no.

[5] Ver SALINAS, Patricia. "Obstrucciones e Imágenes Conceptuales en el Aprendizaje de los Números Reales". (Tesis para obtener el grado de M. en C. especialidad Matemática Educativa), 1985: CINVESTAV-IPN, México.

Por otro lado, en lo relacionado con teoría de conjuntos infinitos resulta muy importante la idea de correspondencia biunívoca entre conjuntos; nos interesaba entonces saber qué tanto los alumnos ven a una correspondencia como una relación que se define arbitrariamente, y los problemas que tienen cuando estas correspondencias se establecen entre conjuntos infinitos.

El cuestionario que aplicamos estaba formado por dos partes. En una primera parte quisimos observar el uso espontáneo que los alumnos daban a las palabras de *Límite* y *Correspondencia* en su lenguaje cotidiano, por lo que simplemente les pedimos que hicieran oraciones con estas palabras.

En la segunda parte queríamos observar las nociones espontáneas que los alumnos presentan al enfrentarse:

(i) a una situación en la que aparece la idea de aproximación a un límite y de *límite*, presentada en un contexto más bien cotidiano y no aparentemente matemático;
(ii) a una situación en la que tienen que establecer "correspondencias" entre conjuntos finitos con la misma o distinta cardinalidad, y entre conjuntos infinitos (numerables).

Este cuestionario se aplicó a 90 alumnos (la segunda parte a 78 de ellos) del último año de preparatoria.

***Resultados:***

**1.1 Primer Parte:**

En la primera parte, encontramos que el uso espontáneo más generalizado que se le da a la palabra *límite* es en el sentido de límite como una restricción. Es decir que el significado que más frecuentemente se atribuye a la palabra *límite* se relaciona con una situación de restricción o de barrera alcanzable pero infranqueable. El otro significado que se le dió a esta palabra pero con mucha menos frecuencia (en aproximadamente una quinta parte de los casos) fue la de límite como una frontera, es decir como algo que "delimita" o separa dos regiones, situaciones o ideas.

En los casos en que se dio como significado a *límite* el de restricción, observamos dos cosas que nos parecieron interesantes:

(i) Aproximadamente una quinta parte de las oraciones que obtuvimos son oraciones en las que se expresa una situación en la que se declara el límite como inexistente, es decir que *no hay límite.* Todas las oraciones que fueron de este tipo se refieren a situaciones o conceptos que son considerados como infinitos o indefinidos.

Ejemplos de esta son:
— Lo infinito no tiene límite
— El universo y el tiempo no tienen límite.

Resulta pues interesante notar que los alumnos consideran al infinito como sinónimo de lo *ilimitado,* es decir que no tiene límite.

(ii) También observamos que en casi dos terceras partes de las oraciones los alumnos consideran situaciones en las que el límite es una restricción *no concreta.* Esto resulta interesante porque indica que, en la mayoría de los casos, los alumnos de este nivel no necesariamente consideran un límite como algo bien definido (i.e. concreto): ven un límite como una barrera infranqueable, un tope, pero que no necesariamente se conoce.

**1.2 Segunda Parte:**

En la segunda parte, como ya lo señalamos, hicimos dos tipos de preguntas: una referente a la convergencia de una sucesión infinita, y otra referente a correspondencias entre conjuntos.

La primera pregunta consistió en plantear la sucesión infinita: 1.9, 1.99, 1.000, ..., 1.9999999, ... como el progreso en la altura de una planta en días consecutivos, presentándola así en una situación que parece cotidiana. Preguntamos entonces si pensaban que el crecimiento de la planta se llegaría a detener, si llegaría algún día a tocar el techo situado a 2 metros de altura, y si sería posible bajar el techo sin riesgo de que la planta lo tocara.

En el análisis de los resultados que obtuvimos a esta pregunta observamos que la mayoría de los alumnos, casi tres quintas partes, consideraron que el proceso nunca se detendría aunque la sucesión tenga a 2 como límite o restricción pero inalcanzable. Es decir que aceptaban un proceso infinito que es convergente y acotado, pero cuyo límite es inalcanzable, lo cual nos indica además que su concepción de la infinitud de este proceso corresponde a una de *infinito potencial.*

Por otro lado, hubo unos pocos alumnos que sabiendo de antemano que matemáticamente 1.999... = 2, consideraron que el crecimiento de la planta se tendría que detener al alcanzar ese límite. Vemos aquí la aparición de un conflicto enraizado en un conocimiento matemático previo, puesto que estos alumnos ven la convergencia de una expansión que es infinita (tal vez aceptando ese infinito como un infinito *actual*), pero por otro lado consideran que el crecimiento se detiene en un tiempo finito ya que se tiene que alcanzar el límite. Es un conflicto entre ambos infinitos o entre un proceso potencialmente infinito y el "resultado final" de tal proceso. No logran integrar de manera coherente su "conocimiento" del infinito actual a su "conocimiento" de los procesos infinitos.

También observamos que en varias de las respuestas obtenidas los alumnos hacen uso espontáneo, aunque no siempre explícito, de cantidades infinitesimales. Estos alumnos consideran que existe una diferencia entre los "dos" números considerados: 1.999... y 2, y que ésta es una diferencia infinitesimal[6]. Observamos además dos tipos de interpretaciones para estas cantidades infinitesimales: para algunos, al haber una cantidad, por más pequeña que sea, que diferencía a las dos expresiones, éstas no pueden ser iguales; en cambio, para otros, esta diferencia infinitesimal es tan pequeña que ya no se considera como "real" o *práctica,* por lo que se puede considerar como nula.

La segunda pregunta de esta parte del cuestionario presentaba tres parejas de conjuntos:

a) y b), dos parejas de conjuntos finitos, de misma cardinalidad para la primera pareja, y distinta para la segunda pareja.

a) A: conjunto de tres cuadrados, B: conjunto de tres estrellas (ambos A y B dados de manera gráfica).

c) dos conjuntos infinitos numerables: A: el conjunto de los enteros positivos impares, B: el conjunto de los números naturales (también presentados en un esquema).

Para cada caso se preguntaba si se podía establecer una correspondien-

[6] Para una discusión más amplia sobre los elementos infinitesimalistas subyacentes en las concepciones de los alumnos, ver el artículo de Luis Moreno A. titulado: "La Enseñanza/Aprendizaje del Cálculo", donde, al hablar del conflicto cognoscitivo entre el objeto mental y la definición formal, él comenta sobre las respuestas obtenidas en un cuestionario a la pregunta:

¿Es 0.9999... igual o menor que 1?

cia entre ambos conjuntos. El objetivo de esta pregunta era el de indagar sobre las nociones espontáneas que los alumnos tienen de la idea de "correspondencia entre conjuntos".

De los resultados que obtuvimos concluimos que los alumnos no piensan en una correspondencia como algo arbitrario; buscan siempre un aspecto común, una relación, entre los elementos[7]. Pero lo que resulta también importante es que los alumnos están centrados en la naturaleza de los elementos, en cómo y cuántos son estos, ya sea dentro de cada conjunto o entre conjuntos, y en general no parecen poder abstraer esta naturaleza y establecer una correspondencia arbitraria entre los conjuntos. De esto resulta claro que los alumnos tienen un alto grado de estructuración en sus nociones del concepto de conjunto. Es decir que existe un *exceso de información* en sus nociones sobre este concepto, ya que espontáneamente relacionan a la idea de conjunto, la cantidad, el orden, y la naturaleza y características particulares de los elementos, y no pueden trabajar con un conjunto sin abstraer estos aspectos.

Por otro lado, parece ser que el hecho de tener, como en el tercer caso, dos conjuntos infinitos de *aparentemente* distinta cardinalidad, no causó, en la mayoría de los casos, conflictos, aunque es posible que esto se haya debido a que su atención estaba más centrada, al igual que en los otros casos en los elementos en sí, y no tanto en los conjuntos.

## 2. Segundo cuestionario

Este segundo cuestionario fue mucho más detallado que el primero y con objetivos más específicos de estudio, particularmente el manejo del infinito por parte de los estudiantes. Para ello escogimos tres áreas de las matemáticas donde aparece, ya sea implícita o explícitamente, el infinito. Dividimos por lo tanto el cuestionario en tres partes, cada una correspondiente a una de estas áreas.

Este cuestionario se aplicó a un total de 68 alumnos: 54 alumnos de primer semestre de la carrera de Físico-Matemático de la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M., y 14 alumnos de 6° año de preparatoria (de una escuela particular).

### 2.1 Primera Parte: Expansiones decimales

Objetivos

El objetivo de esta primera parte era el estudio del manejo y comprensión de expansiones decimales.

Buscábamos observar la relación que los alumnos tienen dentro de su objeto mental (relativo al número) entre la expresión decimal de un número y su localización en la recta; es decir, observar si se percibe a una expansión decimal de manera analítica, como un conjunto de instrucciones que sirven para localizar el punto correspondiente sobre la recta, o si la localización de un punto sobre la recta depende de la información sintética contenida en el número.

También queríamos indagar sobre las concepciones que tienen sobre expansiones decimales infinitas; es decir, si los estudiantes perciben a números expresables con expansiones decimales infinitas como números que realmente tienen un punto correspondiente sobre la recta, o para los cuales únicamente existe una "aproximación" sobre la recta. Junto con esto también queríamos observar los métodos o recursos que utilizan para lo-

[7] Por ejemplo, para el caso b), algunos alumnos dieron respuestas del tipo: sí se puede establecer una correspondencia porque "a las niñas les gustan las flores".

calizar estos números sobre la recta, y si cortan las expansiones de estos por considerar que no hay diferencia "real" o práctica entre la expansión truncada y la infinita.

Con este propósito elaboramos una secuencia de preguntas en la cual pedimos o preguntamos a los alumnos:

(i) que localizaran sobre la recta los puntos correspondientes a los números: 1/3, 2/3, 0.3, 1.9, 1.4, 0.33, 1.99, 1.41, 0.333, 1.414;
(ii) si consideraban que para los números: 0.333..., 1.999..., $\sqrt{2}$, $\pi$, que tienen expansiones decimales infinitas, existe un punto preciso sobre la recta, y si era posible localizarlo exactamente;
(iii) que escribieran las expansiones decimales de 1/3, $\sqrt{2}$, $\pi$;
(iv) que localizarán 0.666... sobre la recta;
(v) que escribieran 0.75, 0.3, 0.333..., 0.666..., 1.999..., y 1.4142 en forma de fracción.

### *Resultados y conclusiones:*

De las respuestas obtenidas en esta primera parte del cuestionario observamos lo siguiente:

a.- La relación entre los números (fracciones y decimales) y la recta numérica, en el objeto mental de los alumnos, es algo que se muestra todavía como un conocimiento muy poco integrado:

(i) Aunque la mayoría de los alumnos sí supieron localizar un decimal finito de pocos dígitos sobre la recta, lo hicieron de manera mecánica, como consecuencia de la instrucción, muchos de ellos sin percibir la estructura algorítmica (aritmética) implícita en tal expansión.
(ii) La mayoría de los alumnos sí mostraron entendimiento de la relación de una fracción (sobre todo las simples) con la recta, sin embargo, por otro lado, la relación entre fracción y expansión decimal en general sólo se da dentro de ciertos contextos (cuando se trata específicamente de la transformación fracción - expansión decimal o viceversa), por lo que la relación fracción - recta no sirve para reforzar el entendimiento de la relación expansión decimal - recta.
(iii) En cuanto a los números de expansión decimal infinita (en particular los irracionales), encontramos que los alumnos no los relacionaron de manera natural con la recta. En general los alumnos asociaron la expansión decimal infinita con el proceso infinito que creen es necesario para localizar a estos puntos sobre la recta, en particular para los irracionales (aunque aún para los racionales, por ejemplo 0.333..., muchos no consideraron su forma fraccionaria). Esto los llevó a razonar que como el proceso es infinito, es interminable, y por lo tanto es imposible localizar con precisión a un decimal infinito sobre la recta, llevando algunos a responder que no existen los puntos correspondientes sobre la recta, y a otros a responder que sí, sólo porque saben (por enseñanza, a un nivel discursivo o verbal) que "a cada número real corresponde un punto sobre la recta".

Estos resultados nos llevaron a concluir que la relación general, en el nivel cognoscitivo, del número real con la recta es muy pobre: es una relación que aparece en distintos niveles (con más claridad en por ejemplo el nivel de las fracciones simples, menos en el nivel de los decimales finitos "cortos", y muy poco en el nivel de las expansiones decimales infinitas), y que además aparece de manera aislada, sin integración de un nivel a otro.

b.- Observamos también que los números expresados mediante expansiones decimales infinitas no son vistas como pertenecientes al mismo dominio de los números *finitos*, siendo ésta la causa de la dificultad de algunos alumnos para asociarlos con puntos precisos sobre la recta o con otras expresiones *precisas* (como lo es la forma de fracción o de número entero para los números racionales):

En general los alumnos consideran a una expansión decimal infinita como algo *impráctico*, por lo que las aproximaciones son más que suficientes. Estas aproximaciones son concebidas de dos maneras distintas.

(i) Para algunos alumnos la aproximación, que consiste en una expansión decimal finita obtenida truncando o redondeando la original, no sólo sirve como sustitución de la original, sino que incluso puede ser igualada a ella (puesto que para ellos no hay una diferencia *real* o práctica entre ambas expresiones). Esto llevó a algunos alumnos a considerar a decimales finitos parecidos a las expansiones decimales truncadas de números irracionales, como iguales a estos números irracionales (e.g. "$1.4142 = \sqrt{2}$")! Otros alumnos fueron incapaces de distinguir entre 0.3 y 0.333... por lo que ya sea consideraban a ambos iguales a 1/3, o ambos iguales a 3/10.

(ii) Otro grupo de alumnos, conscientes de la infinidad de la expansión, la consideraron como *imprecisa* e incluso inexistente sobre la recta, por lo que tuvieron problemas en aceptar, por ejemplo, que 1.999... = 2, pensando en 2 como únicamente una proximación de 1.999... Algunos de estos alumnos muestran que su conocimiento está muy poco integrado puesto que, aún cuando en otros contextos saben que 1/3 = 0.333..., dentro del contexto de la recta no aceptan que 0.333... = 1/3.

En conclusión, encontramos que, en lo relacionado con expansiones decimales infinitas, la infinitud es un factor central de conflicto para los alumnos. Los alumnos muestran nociones muy ambiguas del infinito, lo cual, por un lado, hace que vean a esas expansiones como algo *misterioso* e impreciso, y no pertenecientes a la misma categoría que los "demás" números; y, por otro lado, hace que surjan conflictos, contradicciones y desintegración en el conocimiento relacionado con los números de expansiones infinitas.

## 2.2 Segunda Parte: Procesos infinitos

### *Objetivos*

El objetivo de la segunda parte de este cuestionario era el de observar el tipo de respuestas y de razonamiento de los estudiantes con relación a algunos procesos infinitos (sumas infinitas, sucesiones infinitas y a sus límites).

En particular queríamos:

(i) ver si los estudiantes consideran a los procesos infinitos como *terminables* o no: si los ven como tendiendo a un límite, y si ven a este límite como alcanzable;

(ii) observar si ven al proceso infinito como un todo (en lugar de algo que va avanzando en el tiempo —sin excluir la posibilidad de que lo vean de ambas maneras al mismo tiempo—) habiendo en este caso una aceptación del infinito actual.

(iii) determinar las posibles influencias de factores *externos,* como sería la *acotación* del proceso (tanto desde un punto de vista numérico, como desde un punto de vista geométrico donde el factor visual puede tener gran influencia), y dentro de esto, observar la posible transferencia de la operatividad de procesos finitos a los infinitos.

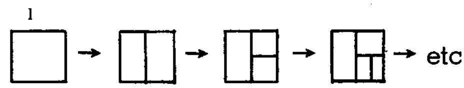
Para esto elaboramos una secuencia de preguntas donde presentamos sucesiones infinitas para observar bajo qué circunstancias y de qué manera los alumnos aceptan los límites de éstas:

1.) Dadas las siguientes dos sucesiones A: 0.9, 0.99, 0.999, ...; y B: 0.1, 0.01, 0.001, ...; preguntamos acerca del resultado de sumar el "último término" de la lista A con el "último término" de la lista B.

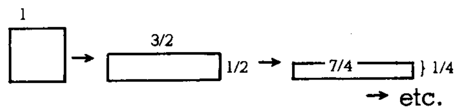
2.) Dada la suma $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n + \ldots$, ($n \in N$), únicamente pedimos a los alumnos que dieran su opinión sobre ella. El objetivo de esta pregunta era más que nada presentarla para que los alumnos la pudieran relacionar con el modelo geométrico de la siguiente pregunta y usando éste poder deducir que la suma dada es convergente a 1.

En el resto de las preguntas presentamos modelos geométricos de sucesiones infinitas para observar la influencia del factor visual en las respuestas. Para cada caso hicimos, de una manera u otra, que los alumnos consideraran *el final del proceso* para así observar, en cada caso, sus nociones acerca del límite del proceso. Así pues, las siguientes preguntas fueron de la forma:

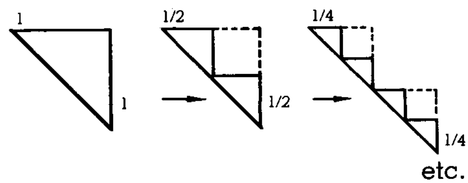
3.) Presentamos un modelo geométrico para la suma $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n + \ldots$, ($n \in N$), dado por el proceso que consiste en dividir en mitades el área de un cuadrado de lado 1 y a cada una de las mitades que se va obteniendo.




4.) Pedimos que se considerara una sucesión de rectángulos cuyo perímetro fuera siempre 4, pero cuya altura fuera cada vez menor:




5.) Planteamos la sucesión dada por "escaleras" de altura total constante pero cuyos escalones miden la mitad que los de la escalera anterior:




6.) Presentamos una sucesión de polígonos regulares, inscritos en un círculo, con un número cada vez mayor de lados.

## *Resultados y conclusiones*

Las respuestas de los alumnos fueron muy variables, siendo altamente influenciadas por el contexto particular de cada pregunta. En todas las preguntas, en particular las de carácter geométrico, observamos la influencia de factores externos:

En la primera pregunta la mayoría de las respuestas fueron influenciadas por el hecho de que la suma de cada uno de los términos correspondientes de las dos sucesiones fuera siempre 1:

De los 29 alumnos (el 40%) que consideraron que no se podría hacer *'la suma de los últimos términos'* ya que "no existen últimos términos" o "los últimos términos no se pueden sumar ya que tienen *colas* infinitas", hubo 14 (aproximadamente la mitad) que señalaron que, sin embargo, "la suma sería 1".

Por otro lado más del 50% de los alumnos (35) respondieron que sí se podían sumar los 'últimos términos' y que la suma sería 1, pero de estos sólo 5 justifican su respuesta usando los límites de las sucesiones (los demás lo deducen a partir que la suma término a término es constante).

Para la tercera pregunta la mayoría de los alumnos (41 de 68) consideraron al proceso como interminable, y casi una tercera parte del total asociaron la suma de los rectángulos obtenidos con el área del cuadrado original y pudieron representar al proceso con la suma de la pregunta 2, lo cual nos indica que estos alumnos aceptaron de alguna forma, al menos basándose en el modelo geométrico, que esta suma infinita tiene como límite 1, aunque de las pocas respuestas que se dieron a la segunda pregunta vemos que a este límite en general se le considera como inalcanzable.

En la cuarta pregunta observamos la influencia del factor visual, que es muy predominante en todas las preguntas con caracter geométrico, ya que más de la mitad de los alumnos fueron "finitistas"[8] en sus respuestas, muchos indicando que el proceso terminaría en un segmento de recta (en general de longitud 4, aunque algunos dijeron que sería de longitud 2), a pesar de que en otras preguntas (como la tercera) la mayoría de los alumnos consideraron a los procesos como interminables, y que además en esta pregunta existía el prerrequisito de la constancia del perímetro que podía ser un impedimento para que el proceso terminara en un segmento de recta.

Resulta interesante contrastar las respuestas de las últimas dos preguntas. En ambas preguntas se tenía un límite geométrico visual, sin embargo su influencia se manifestó de diferente manera en cada caso. De los 68 alumnos pudimos considerar las respuestas de 38 de ellos para la pregunta de la escalera, y de 48 para la pregunta del área de los polígonos. Para la pregunta de la escalera 9 consideraron que de continuarse indefinidamente el proceso, la longitud de la escalera no sería medible ya que "el proceso es infinito", sin embargo sólo tres de ellos respondieron de manera análoga para la pregunta del polígono. La mayoría de los alumnos (35) respondieron que el área de los polígonos tiende a ser igual al área de la circunferencia, y otros 10 respondieron que el área sería *casi* igual a la de la circunferencia. Sin embargo, en el caso de la escalera sólo 11 consideraron que la escalera tendía a convertirse en el segmento de recta de longitud $\sqrt{2}$ correspondiente a la hipotenusa del triángulo cuyos catetos son la base y la altura de la escalera; los otros 18 alumnos consideraron que la longitud de la escalera sería siempre la misma (ya que en los pasos *finitos* es una longitud que se mantiene constante igual a dos) mostrándonos que el factor de constancia de la longitud prevalece en este caso sobre el factor visual.

Del análisis de las respuestas de los alumnos, es claro que los alumnos no tienen concepciones fijas o consistentes sobre la naturaleza de los resulta-

[8]Cabe señalar que no hay nada en la pregunta que impida considerar a la sucesión como finita ya que la altura puede ser 0 en un número finito de pasos, aunque la pregunta fue en torno a si era posible continuar el proceso indefinidamente.

dos de procesos infinitos, y notamos que hubo varios factores del contexto de la situación presentada que influían sobre las respuestas y en la manera cómo los alumnos percibían el proceso. De éstos observamos una prodominancia del factor visual o gráfico, aunque en general los alumnos se centraban en un único factor (el más fácilmente perceptible) para dar sus respuestas. Así, por ejemplo, aunque en algunas preguntas la concepción de que "el proceso es infinito, por lo tanto interminable" prevaleció, en otras (en particular para la pregunta relacionada con la sucesión de polígonos inscritos en un círculo) esta concepción cedió ante el factor visual que muestra una situación claramente *acotada.*

Observamos además, que estos factores externos, en particular el visual, pueden ser decisivos, tanto para la determinación por parte del alumno de si el proceso se puede ver como *completo,* como también para llevarlo a encontrar un límite (que puede ser correcto o incorrecto). Es decir, los factores externos, o las *apariencias,* pueden tener gran influencia, muchas veces engañosas, especialmente si aparecen de manera muy *clara* y sin contradecir la información dada de otra forma.

En conclusión, observamos

(i) el que los alumnos perciban un proceso infinito como terminable o no;
(ii) el que los alumnos "vean", junto con lo anterior, a un proceso de manera global o *completa,* integrando a ese proceso un límite;
(iii) la determinación del, o de un, límite; son aspectos que se dan de manera muy incosistente para la mayoría de los alumnos, siendo en gran parte influenciados por el contexto en el que se presenta el proceso.

## 2.3 Tercera Parte: Conjuntos infinitos

### *Objetivos*

El objetivo de la tercera parte de este cuestionario era el de indagar sobre las imágenes conceptuales de los alumnos relacionadas con conjuntos infinitos, tanto numerables (discretos) como no-numerables (subconjuntos de **R**, y de **R** X **R**).

Para los conjuntos infinitos numerables nuestro interés estaba en observar si los alumnos veían estos conjuntos como numerables, es decir como *contables,* utilizando para ello el conjunto de los números naturales; y, en este caso, observar si se estaba estableciendo una biyección con **N** (o si los alumnos consideraban al conjunto dado de misma cardinalidad que **N**).

Pero, en particular, y para conjuntos infinitos tanto numerables como no-numerables, queríamos observar la posible transferencia de lo finito a lo infinito, la cual podría, por ejemplo, impedir la aceptación de que dos conjuntos infinitos con características distintas puedan tener o no la misma cardinalidad. Es decir, queríamos observar la posible influencia de factores de la naturaleza de los conjuntos (e.g. la longitud geométrica de los conjuntos; la acotación; la diferencia de dimensión) y su relación con el posible surgimiento de una transferencia de la operatividad de lo finito a lo infinito (como sería una respuesta que dijera que hay *el doble* de números, o puntos, en una recta completa que en una semirecta).

Para cumplir con estos objetivos realizamos una secuencia de preguntas de la siguiente forma:

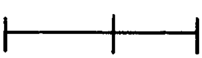
(i) Para cada uno de los siguientes conjuntos
1) Conjunto de los números naturales impares:
$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$

2) Conjunto de los números cuadrados que se obtienen al elevar al cuadrado a los números naturales ($1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; etc...):
$\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$
3) Conjunto de los números enteros:
$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
preguntamos a los alumnos si, utilizando el conjunto de los números naturales **N** = $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, podrían contar los elementos de cada uno de ellos, de qué manera, y (salvo para el conjunto **Z**) si se utilizarían todos los elementos de **N**.

(ii) Otra parte consistió en exhibir parejas de subconjuntos de la recta numérica (y en un caso del plano), de manera geométrica, preguntando si se consideraba que había más o igual número de puntos en un conjunto que en el otro. Además de esto preguntamos si creían en la existencia de alguna manera de asociar a cada punto de uno de los conjuntos con uno, y sólo un punto del otro conjunto. Las parejas de conjuntos (A, B) a comparar fueron las siguientes:

(a) A = segmento de longitud 1;

B = segmento de longitud 2.



(b) A = semirecta



B = recta completa



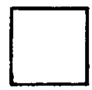
(c) A = segmento de longitud 1

B = recta completa



(d) A = Segmento de longitud 1

B = Area de un cuadrado de lado 1



### *Resultados y conclusiones*

En la primera parte la mayoría de los alumnos respondió de igual forma para los dos primeros conjuntos (conjunto de los impares positivos, y conjunto de los naturales cuadrados). Veinte alumnos de los 68 respondieron que no se pueden contar los elementos de esos conjuntos usando el conjunto **N** siendo la explicación más común que como son conjuntos infinitos nunca se terminarían de contar. Un 50% de los alumnos respondió afirmativamente, la mayoría de ellos (casi la mitad) considerando que **sí** se utilizarían todos los elementos de **N**, siendo la justificación más común de esto último el hecho de que "ambos conjuntos son infinitos", aunque algunos alumnos sí consideraron que sobrarían elementos de **N**.

Para el caso del conjunto **Z** de los números enteros, a la pregunta de si se podrían contar los elementos de **Z** usando a los números naturales, 28 alumnos contestaron afirmativamente y 16 negativamente. De estos últimos la mayoría explicaron que no se pueden contar porque se trata de un conjunto infinito y nunca se terminaría, lo cual es más bien un obstáculo de tipo técnico; sin embargo algunos alumnos sí argumentaron que usando al conjunto **N** "faltarían números" para poder contar todos los elementos de **Z**, por lo que es claro que para estos alumnos el *infinito de* **Z** es mayor que el *infinito de* **N**. De los que contestaron afirmativamente, aunque sí hay hasta cierto grado una percepción de igualdad de cardinalidad entre Z y N, en la mayoría de los casos esto se debe a que se considera a la infinidad del número de elementos como una cantidad siempre igual: *infinita*.

En la segunda parte de la gran mayoría de los alumnos respondió de forma análoga para todas las parejas de conjuntos que se presentaron, aunque muchos no contestaron todos los casos, en particular los últimos. En promedio casi la mitad de los alumnos respondió que hay más puntos en el conjunto B que en el A, de los cuales aproximadamente la mitad muestra de manera explícita un uso **aritmético** (transfiriendo la aritmética de lo finito) para estos conjuntos infinitos, como por ejemplo respuestas del tipo: "B = 2A" (para los conjuntos de los incisos (a) y (b)), "B = nA" (para los casos (c) y (d)), o "B = $A^2$" (para (d)). Para todos estos alumnos (que consideraron que había más puntos en B) encontramos evidencias de que sus respuestas fueron en gran parte influenciadas por el factor de la naturaleza perceptual del conjunto, ya que dan respuestas como por ejemplo: "Hay más en B que en A puesto que la longitud de B es mayor". Algunos de los alumnos en esta categoría también consideraron que los conjuntos dados representaban a *distintos tamaños de infinito* puesto que aceptaban su infinidad pero también les era *obvio* que en uno hubiera más elementos que en el otro.

Por otro lado, la mayoría de los alumnos que consideraron que había igual número de puntos en ambos conjuntos justificaron sus respuestas diciendo que "ambos son infinitos", puesto que veían al infinito como de un único tamaño posible.

También es importante señalar que observamos que para muchos alumnos existe una *desvinculación* casi total entre la existencia de una relación biunívoca con la noción de igualdad de cardinalidad, ya que el establecimiento de la primera no constituye, para muchos, una prueba de lo segundo.

En conclusión, notamos dos tendencias primordiales en las respuestas de los alumnos:

Por un lado hay alumnos que tienen la concepción de que todo lo que es infinito pertenece a una categoría aparte, pero cuyas características son constantes: es decir, estos alumnos, para los conjuntos infinitos se centran en la característica de *infinidad* que les dice que habrá el mismo número de elementos (una *infinidad*) en dos conjuntos si ambos son infinitos, sin que importen otras características del conjunto.

En cambio, otros alumnos centran su atención en la naturaleza particular de los conjuntos, tanto para los numerables, como para los no-numerables presentados en forma geométrica. Por ejemplo, para los conjuntos numerables, los alumnos se fijan en el orden y la distribución de los elementos comparativamente con el conjunto de los números naturales. Para los conjuntos geométricos, se centraron en características como la longitud, la dimensión, o si el conjunto estaba acotado o no.

Observamos que muchos alumnos transfirieron la operatividad de lo finito a lo infinito (e.g. aritmetización de los conjuntos infinitos) puesto que los alumnos adoptaban características y propiedades pertenecientes a lo finito para hacer determinaciones sobre lo infinito.

Finalmente, también observamos una falta de integración de los conocimientos relacionados con correspondencias biunívocas y la igualdad de cardinalidad de conjuntos. Muchos alumnos no relacionan los dos conceptos, y muchos otros tienen concepciones erróneas o incompletas sobre la definición de correspondencia entre conjuntos.