ARTICULOS

¿Qué es la educación matemática?

Resumen

En los últimos años se ha desarrollado un área de estudio denominada educación matemática. A fin de caracterizar la educación matemática se escogieron ocho problemas concretos de esta área. Los problemas abarcan desde los primeros grados hasta los estudios profesionales y tocan aspectos tales como desarrollo cognitivo, aprendizaje de habilidades, aprendizaje de conceptos, solución de problemas, actitudes, currículum, enseñanza y formación de profesores. Abarcan también contenidos variados de las matemáticas tales como geometría, aritmética, estimación, cálculo. A través de los problemas y de las habilidades y conocimientos que se necesitan para resolverlos, se ve claramente que aunque hay aspectos comunes, trabajar en el área de educación matemática es diferente de lo que hace el maestro de matemáticas, el matemático, el sicólogo educativo, o el pedagogo.

Una caracterización a través de ocho problemas

Las matemáticas es uno de los campos de estudio más antiguos, y la enseñanza de las matemáticas ha ocupado un lugar importante en las escuelas desde hace muchos años. Sin embargo, ha sido hasta los últimos 25 ó 30 años que se ha desarrollado un área de estudio denominada "educación matemática".

Espero que los problemas escogidos, así como el método usado para caracterizar el área ayuden a aclarar qué es la educación matemática. Esta forma de caracterizar el área difiere de otras que se han presentado en esta misma revista (Bonilla, 1989).

Como parte misma del método, describiré primero algunos problemas concretos. La siguiente es una lista de problemas en los que se está trabajando actualmente tanto en México como en otros países.

1) ¿Qué matemáticas deben aprender los futuros ingenieros?
2) La matemática en el ciclo básico obligatorio, ¿qué es fundamental y qué no?
3) ¿Cómo enseñar a resolver problemas matemáticos?
4) Niveles de madurez matemática en el estudio de la geometría
5) ¿Qué estrategias utilizan los buenos estimadores?
6) La importancia de contar en el aprendizaje de la aritmética
7) Curso de actualización de matemáticas para profesores de telesecundaria
8) ¿Qué factores caracterizan las escuelas con programas sobresalientes de matemáticas?

Aunque la lista obviamente es limitada y está inevitablemente sesgada hacia problemas con los que estoy más familiarizado, cada problema fue escogido para caracterizar el campo. Después de reseñar los problemas traté de hacer explícito qué tienen en común, su relación con las diferentes áreas de la educación matemática, y cómo el resolver problemas como és-

Alfinio Flores

CIMAT, Guanajuato, México

tos en el área de la educación matemática es distinto de otros quehaceres, tales como los del maestro de matemáticas, el matemático, el sicólogo educativo y el pedagogo.

Los ocho problemas se describen a continuación.

1) ¿Qué matemáticas deben aprender los futuros ingenieros?

El mismo tronco común de matemáticas ha existido en las carreras de ingeniería durante muchos años. Este tronco común consiste en geometría analítica, cálculo diferencial e integral, cálculo vectorial y de varias variables, ecuaciones diferenciales, y a veces también temas de matrices. Sin embargo, ésta no es una preparación adecuada para los ingenieros, en parte debido a la creciente variedad de necesidades de los ingenieros, pero también por el creciente uso de las computadoras en ingeniería (Greber, 1983).

Los ingenieros consideran también fundamentales temas tales como probabilidad, estadística, y para los ingenieros electrónicos álgebra booleana. Estos temas se incluyen en general dentro de las materias de ingeniería: probabilidad y estadística en cursos de diseño de experimentos, y álgebra booleana en cursos de circuitos electrónicos. Sin embargo, a veces la herramienta matemática se presenta buscando la aplicación inmediata a un problema particular, de manera limitada, y los alumnos no llegan a apreciar el poder y alcance de esa herramienta matemática y su aplicabilidad en otros problemas de ingeniería.

Debido a la importancia de las computadoras, es común un curso de programación y uno de métodos numéricos. El curso de programación se centra en algún lenguaje específico (Pascal, Fortran, etc.). El curso de métodos numéricos incluye integración, ceros de funciones, sistemas de ecuaciones lineales, ajuste de curvas por mínimos cuadrados y otros procedimientos. El uso de procedimientos numéricos requiere sensibilidad a cuestiones de existencia y unicidad. Los estudiantes de ingeniería deben estar conscientes de la importancia de una formulación matemática apropiada de un problema. El uso de métodos numéricos para calcular funciones sobre conjuntos continuos requiere entrelazar ideas numéricas y analíticas, más que cursos separados.

La necesidad de reexaminar los programas de matemáticas se debe a que muchos problemas se manejan naturalmente en forma discreta, muchas de las situaciones físicas pueden ser descritas por enunciados sobre sistemas discretos, y la computadora nos permite manejar datos discretos directamente. Los alumnos deben ser capaces de manejar la matemática discreta no sólo como una forma de aproximar soluciones sobre conjuntos continuos, sino como una forma de tratar con problemas desde el principio (Hernández, 1979).

Además de fijar los nuevos contenidos del tronco común de matemáticas en ingeniería es necesario elaborar materiales, tales como libros de texto, paquetes de cómputo y materiales de apoyo, así como impartir cursos de actualización para profesores, ya que muchas veces en los cursos más avanzados de ingeniería no se aplica la herramienta matemática más adecuada porque el maestro no la domina.

2) La matemática en el ciclo básico (primaria y secundaria), ¿qué es fundamental y qué no?

Cambios en la sociedad mexicana, tales como el hecho de que una proporción mucho mayor de mexicanos terminan ahora la primaria, una mayor industrialización del país, y cambios tecnológicos tales como las calculadoras, hacen que sea necesario revisar cuáles de los contenidos matemáticos que enseñamos en el ciclo básico siguen siendo fundamentales y cuáles no. Tenemos que determinar cuáles son las áreas de habilidades básicas fundamentales que debe desarrollar el alumno. En los próximos años, algunos aspectos de las matemáticas serán cada vez más importantes, tales como: aritmética mental, estimación, aproximación, sentido numérico, valor posicional, porcentajes, notación científica, análisis de datos, estadística, probabilidad, concepto de función, comprensión geométrica intuitiva, relación entre número y geometría, medición, pensamiento algorítmico, resolución de problemas (Conference Board of the Mathematical Sciences, 1982; National Council of Teachers of Mathematics, 1989; National Council of Supervisors of Mathematics, 1989).

Actualmente el tiempo que se dedica a la enseñanza de estos aspectos en el ciclo básico es insuficiente. Para incorporar estos aspectos en la enseñanza de las matemáticas sin aumentar el tiempo de la clase de matemáticas, debemos también examinar cuáles aspectos deben ser desenfatizados o incluso eliminados.

3) ¿Cómo enseñar a resolver problemas matemáticos?

Pólya (1945) describe cuatro fases para resolver problemas:

1. Comprensión del problema.
2. Concepción de un plan.
3. Ejecución del plan.
4. Visión retrospectiva.

Para cada fase sugiere una serie de preguntas que el estudiante se puede hacer, o de aspectos que debe considerar para lograr avanzar en la resolución del problema, para utilizar el razonamiento heurístico. Pensamiento heurístico son las estrategias y técnicas para avanzar en problemas desconocidos y no usuales, tales como: dibujar figuras, introducir una notación adecuada, aprovechar problemas relacionados, explotar analogías, trabajar con problemas auxiliares, reformular el problema, introducir elementos auxiliares en un problema, generalizar, especializar, variar el problema, trabajar hacia atrás (Pólya, 1954; 1981).

Han pasado más de cuarenta años de la aparición del libro de Pólya y casi una década desde que se propuso que la solución de problemas fuera el foco de la enseñanza de las matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics 1980), sin embargo, la enseñanza de resolución de problemas no ha llegado a ser una parte integral en la clase de matemáticas. Aunque los matemáticos reconocen en las indicaciones de Pólya actividades que ellos mismos realizan al resolver problemas, resulta difícil hacer que los alumnos aprendan el pensamiento heurístico.

Schoenfeld (1985) señala por una parte que las categorías de Pólya de pensamiento heurístico resultan demasiado abstractas y generales para el principiante. Hay que descomponer las estrategias generales en estrategias más específicas. Después hay que enseñar cada una de las estrategias específicas.

Schoenfeld por otro lado señala que la habilidad para resolver problemas se ve afectada por factores tales como: los recursos matemáticos con los que cuenta el alumno, el control que tenga de las estrategias utilizadas y su sistema personal de creencias.

Los recursos son los conocimientos matemáticos que posee el individuo y que pueden ser utilizados en el problema. Incluyen intuiciones, conocimiento informal del tema, hechos, procedimientos, comprensión acerca de las reglas para trabajar en el dominio.

Dentro del control están las decisiones globales respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias, acciones tales como planear, regular, evaluar y decidir.

El sistema de creencias se compone de la visión que tenga el individuo de las matemáticas, y acerca de sí mismo. Las creencias determinan la conducta de un individuo: cómo se aproxima a un problema, cuáles técnicas usa o evita, qué tanto tiempo o qué tan duro trabaja en el problema, etc. Las creencias establecen el marco dentro del cual se utilizan los recursos, el pensamiento heurístico y el control.

4) Niveles de madurez matemática en el estudio de la geometría

Muchos alumnos tienen problemas con un curso axiomático de geometría con énfasis en demostraciones. Esto se debe a un desfasamiento del nivel de desarrollo del pensamiento geométrico del alumno con el nivel requerido para un curso de tal tipo. Van Hiele (1986) propone un modelo de los niveles de desarrollo de los alumnos. Los niveles de Van Hiele se pueden describir (Fuys et al., 1988) de la siguiente manera:

Nivel 0 Reconocimiento: el alumno distingue las figuras geométricas como un todo, de acuerdo con su apariencia, pero no analiza las partes que las forman.

Nivel 1 Análisis: el alumno analiza las propiedades de la figura y sus partes, y descubre propiedades y reglas de una clase de figuras empíricamente.

Nivel 2 Deducción local: a partir de propiedades aceptadas o descubiertas previamente, se establecen deductivamente nuevas propiedades de manera informal, se establecen relaciones lógicas entre los resultados, pero no se parte de una serie de axiomas y definiciones.

Nivel 3 Deducción axiomática: los alumnos deducen teoremas de manera rigurosa a partir de los axiomas y teoremas previamente demostrados.

Nivel 4 Comparación de sistemas axiomáticos: el alumno establece teoremas en distintos sistemas axiomáticos y analiza y compara globalmente estos sistemas.

De acuerdo con Van Hiele, los alumnos no pueden alcanzar un nivel si no dominan primero los niveles anteriores. El paso de un nivel a otro no se da automáticamente con la edad, sino que depende de la enseñanza que se dé al alumno. Van Hiele propone una estrategia para conducir a los alumnos de un nivel a otro, que consiste en las siguientes fases:

Fase 1 Información: los alumnos se familiarizan con el campo de trabajo.

Fase 2 Orientación guiada: los alumnos son conducidos a explorar diferentes relaciones de la red de relaciones que tiene que formarse.

Fase 3 Explicitación: verbalización y expresión por parte del alumno de las relaciones exploradas.

Fase 4 Orientación libre: los alumnos aprenden por medio de tareas generales a estructurar el conocimiento dentro de la red de relaciones.

Fase 5 Integración: los alumnos hacen una síntesis de lo aprendido y de la nueva red de relaciones a su disposición.

Utilizando el modelo de Van Hiele se han realizado investigaciones con alumnos de diferentes niveles (Fuys et al., 1988), y se han desarrollado materiales y cursos para maestros (Ferrini-Mundi, 1986-88). En nuestro país el uso de este modelo para el diseño de cursos no axiomáticos de geometría apenas empieza (Rodríguez Luévanos, 1990).

5) ¿Qué estrategias utilizan los buenos estimadores?

Estudios realizados en Estados Unidos, Japón y México han encontrado que las personas que tienen una mejor habilidad para realizar buenas estimaciones computacionales utilizan las siguientes estrategias: reformulación, traducción y compensación (Reys et al., 1982; Reys et al., en prensa; Flores, Reys y Reys, 1990).

La reformulación consiste en un cambio de los datos numéricos dejando intacta la estructura matemática del problema, como:

a) operación frontal: trabajar con uno o más de los dígitos de la izquierda

b) redondear al más próximo múltiplo de diez, cinco, cien, etc.

c) sustitución de números: usar un número compatible, cercano al original para operar fácilmente.

Ejemplos:

Datos originales	reformulados	
87 419	8	
92 765	9	
90 045	9	
81 974	8	
+98 102	+9	44 ó 45, la suma es 450 000
474 257 / 8 127		480 000 / 8 000
347 * 6 / 43		350 * 6 / 42

La **traducción** consiste en cambiar los números y la estructura matemática del problema, como:

a) procesar los valores numéricos en un orden diferente al dado, que sea matemáticamente equivalente

350 * 6 / 42   350 * (6 / 42)

b) cambiar los números

30 * 70 * 300   21 * 30 000

c) cambiar las operaciones dadas en el problema para formar un problema equivalente

87 419	
92 765	
90 045	5 * 90 000
81 974	
+98 102	

La **compensación** son los ajustes hechos para reflejar variaciones en los números debidas a una reformulación o una traducción.

El estudio de las estrategias utilizadas por los buenos estimadores es el primer paso para desarrollar materiales e ideas para enseñar a los alumnos a estimar. El hecho de que se haya encontrado que los alumnos mexicanos usan las mismas estrategias que en los otros países indica que lo aprendido en esos países puede servir como base para introducir la estimación computacional en nuestro país.

6) La importancia de contar en el aprendizaje de la aritmética

Los niños cuentan de manera natural e informal para resolver problemas. Muchos niños en edad preescolar inventan sus propias estrategias para resolver problemas que usualmente no se espera que resuelvan hasta segundo grado o después. Una vez en la escuela, los niños continuan usando estrategias de conteo, a pesar de que los maestros les dan instrucciones de no hacerlo.

Los niños deben entender cinco principios antes de que el conteo pueda ser usado de manera efectiva (Kulm, 1985):

1. Orden estable. El niño cuenta en una secuencia fija: "uno, dos, tres" etc. Si el niño cuenta siempre en el mismo orden, entiende este principio.
2. Apareamiento uno a uno: al contar los objetos, el niño aparea cada número con un objeto y cuenta todos los objetos.
3. Número total: El niño sabe que el último número contado es el número total de objetos.
4. Objetos diferentes: El niño sabe que los objetos a ser contados no necesitan ser todos del mismo tipo.
5. Orden diferente: El niño sabe que los objetos pueden ser contados en cualquier orden.

La enseñanza de la suma y la resta, y aún de la multiplicación y división se puede basar en habilidades sólidas de conteo. Generalmente los niños empiezan contando objetos físicos, muchas veces se ayudan tocando o moviendo cada objeto. Más tarde, son capaces de recitar los números para resolver un problema. Etapas intermedias pueden involucrar el uso de los dedos, dar golpes con el lápiz, y otras acciones para llevar la cuenta de los números contados o faltantes. Estos actos son una parte natural en el desarrollo de la comprensión del número en muchos niños.

Muchos niños inventan estrategias de conteo para encontrar sumas y restas. Se pueden enseñar estas estrategias a los niños que no las inventan por sí mismos. La ventaja de este enfoque sobre el aprendizaje memorístico es que los niños pueden aprender los hechos básicos con sentido, y tener algo en qué basarse si se les olvidan.

La estrategia más sencilla para la suma es la de modelación directa. El niño representa ambas partes con objetos y cuenta el número total en los dos conjuntos. Se han identificado varias estrategias más avanzadas (Kulm, 1985):

1. Seguir contando. Para encontrar una suma, el niño empieza con un número y luego "sigue contando" el otro. Por ejemplo, para sumar 5 + 3, el niño cuenta: "cinco (pausa), seis, siete, ocho."
2. Contar hacia atrás. Algunos niños la usan para restar.
3. Contar múltiplos: Muchos niños aprenden a contar de dos en dos, de tres en tres, de cinco en cinco, de diez en diez. Esta habilidad proporciona una conexión para entender la multiplicación y la división.
4. Conteo combinado: seguir contando y contar hacia atrás se pueden utilizar para hacer cálculos

mentales complicados y estimaciones.

5. Casi dobles: Muchos niños aprenden las sumas dobles primero (1 + 1 = 2, 2 + 2 = 4, 3 + 3 = 6, etc). Otros resultados se pueden obtener de éstos contando hacia adelante o hacia atrás.
6. Compensación: Esta estrategia se basa también en los dobles. Por ejemplo, para encontrar 4 + 6 el niño recuerda que 5 + 5 = 10, y que 4 es uno menos que cinco y que 6 es uno más que 5.

La investigación ha mostrado que los niños se basan cada vez menos en el conteo, conforme recuerdan más resultados. Las estrategias que conectan contar con resultados ya aprendidos proporcionan una forma de extender con sentido el conocimiento de los niños.

7) Curso de actualización de matemáticas para profesores de tele-secundaria

El sistema de las tele-secundarias ha tenido un crecimiento muy rápido en los últimos años en el estado de Guanajuato, donde hay actualmente cerca de 400 de estas escuelas y 1500 maestros. Con la ayuda de una clase televisada, el maestro de telesecundaria enseña materias tan diversas como matemáticas, español, ciencias naturales, ciencias sociales. La gran mayoría de los maestros del sistema estatal de tele-secundarias (85%) no cuentan con la especialidad de matemáticas. Como un primer paso para actualizar a los maestros de matemáticas del estado se implementó un curso intensivo de 400 horas para cerca de 40 profesores de matemáticas (Flores Peñafiel, 1987a). Posteriormente se pudiera diseñar un curso con los maestros preparados en el curso intensivo como multiplicadores. Se elaboraron 15 prácticas de laboratorio de matemáticas, cinco para cada grado (Flores Peñafiel et al., 1987b). Posteriormente se diseñó un curso para los maestros del sistema de telesecundaria que no cuentan con la especialidad de matemáticas. Para esta nueva fase se elaboraron 13 prácticas más de matemáticas (Guzmán Padilla, 1989). Esta serie de cursos permite a los maestros no sólo conocer metodologías alternativas para la enseñanza de las matemáticas, donde el alumno participa activamente en el aprendizaje, sino que les permite a los mismos maestros tener una mejor comprensión de los conceptos matemáticos que están enseñando, y contar con materiales que pueden usar en su clase (características de los cursos de actualización exitosos) (Taylor, 1986).

8) ¿Qué factores caracterizan las escuelas con programas sobresalientes de matemáticas?

Un estudio de 571 escuelas con programas sobresalientes en matemáticas en E.U. mostró características comunes en estas escuelas a pesar de la gran diversidad entre ellas: rurales, urbanas, grandes y chicas (Driscoll, 1987). En las escuelas con programas sobresalientes hay:

1. Directores efectivos, conocedores, entusiastas, que facilitan la creatividad, y son innovadores.
2. Maestros que mantienen el orden en su salón de clases, saben bien su materia y la comunican a los alumnos.
3. Procedimientos tanto formales como informales para reconocer el buen trabajo de los maestros.

4. Buenas relaciones maestro - alumno.
5. Altas expectativas para los alumnos y procedimientos efectivos para motivar a los alumnos.
6. La convicción de que los problemas que afectan a las escuelas se pueden resolver.
7. Participación de los padres y la comunidad en actividades.
8. Discusión pública y constante de las metas escolares.

Estos hallazgos son consistentes con los reportados en un contexto más amplio (What works, 1986). En las escuelas efectivas tanto los directores, los maestros, los alumnos y los padres están de acuerdo con las metas, los métodos y los contenidos de la enseñanza. Para ellos es importante un curriculum coherente, reconocer públicamente a los alumnos que tienen éxito, estar orgullosos de la escuela, y dedicar el tiempo de la escuela para aprender.

Determinar criterios válidos y confiables para detectar cuáles son las escuelas sobresalientes en nuestro país, es un problema abierto.

Hacia una caracterización de la educación matemática

Cada uno de estos ocho problemas fue escogido para caracterizar el campo de la educación matemática. Los 8 problemas son relevantes, es decir, están relacionados con la realidad. Resolver cada uno de ellos contribuirá a un mejor entendimiento o a una mejor práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El trabajo realizado para resolver cada uno de los problemas, no es una acción aislada de un investigador. En diversas partes se ha trabajado en problemas relacionados, elaborando un marco conceptual para mejor definir, plantear y resolver los problemas. Los 8 problemas se pueden relacionar con algunas de las principales áreas de investigación en este campo, tales como desarrollo cognitivo, aprendizaje de habilidades, aprendizaje de conceptos, solución de problemas, diferencias individuales, actitudes, curriculum, enseñanza y formación de profesores (Shumway, 1980).

1) ¿Qué matemáticas deben aprender los futuros ingenieros? (Currículum)
2) La matemática en el ciclo básico obligatorio, ¿qué es fundamental y qué no? (Currículum)
3) ¿Cómo enseñar a resolver problemas matemáticos? (Solución de problemas)
4) Niveles de madurez matemática en el estudio de la geometría. (Desarrollo cognitivo)
5) ¿Qué estrategias utilizan los buenos estimadores? (Aprendizaje de habilidades)
6) La importancia de contar en el aprendizaje de la aritmética. (Aprendizaje de habilidades, aprendizaje de conceptos)
7) Curso de actualización de matemáticas para profesores de telesecundaria. (Formación de profesores)
8) ¿Qué factores caracterizan las escuelas con programas sobresalientes de matemáticas? (Actitudes, enseñanza)

Resolver los problemas anteriores requiere claramente acciones que van más allá de la enseñanza de las matemáticas en un salón. No basta la formación y experiencia de un maestro de matemáticas para resolverlos, aunque sin duda es necesaria esta experiencia.

De la misma manera, un matemático necesita complementar su formación para resolver estos problemas. Un conocimiento amplio y profundo de las matemáticas involucradas en cada caso es necesario, aunque de ninguna manera suficiente. En los 8 problemas hay que tratar con factores, que requieren de habilidades y conceptos, que no se obtienen en los cursos de matemáticas.

Los 8 problemas son específicos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Tanto el sicólogo educativo como el pedagogo necesitan elaborar marcos conceptuales y prácticas que reflejen las características propias de las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza, y tener un dominio y conocimiento suficiente de las matemáticas involucradas si quieren participar de manera fructífera para resolver los problemas mencionados.

En el área de educación matemática no existen todavía teorías globales como en algunas ciencias. Freudenthal (1978) afirma que todavía no existe una ciencia de la educación matemática. Sin embargo, sí existe una red internacional de investigadores, y practicantes de la educación matemática trabajando en problemas como los descritos, que elaboran, prueban y refinan los marcos conceptuales correspondientes, los modelos, instrumentos de medición, etc. Estos investigadores se reúnen y presentan trabajos en foros especializados tales como congresos y simposios de educación matemática. Existen asociaciones profesionales tales como International Commission on Mathematical Instruction, Special Interest Group in Mathematics Education, Psychology in Mathematics Education, International Group for the National Council of Teachers of Mathematics, Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, etc. Existen publicaciones especializadas en el área de educación matemática, tales como Journal for Research in Mathematics Education, Educational Studies in Mathematics, Mathematics Teacher, For the Learning of Mathematics, Focus on Learning Problems in Mathematics, etc., y desde luego, en español, Educación Matemática.

Estas redes de investigadores, asociaciones profesionales y publicaciones especializadas son los que en la práctica, definen lo que es la educación matemática. A mi modo de ver, definir de manera más teórica un campo relativamente nuevo y en pleno crecimiento como el de la educación matemática tal vez es prematuro.

Referencias

Bonilla R., Elisa. (1989). La educación matemática: Un reflexión sobre su naturaleza y sobre su metodología, la parte, *Educación Matemática*, *1*(2), p. 28-30, 35-42, 2a. parte, *1*(3), p. 30-36.

Conference Board of the Mathematical Sciences. (1982) *The Mathematical Sciences Curriculum: What is still fundamental and what is not.* National Science Foundation.

Driscoll, Mark. (1987) *Stories of excellence; Ten case studies from a study of exemplary mathematics programs.* National Council of Teachers of Mathematics.

Ferrini-Mundy, J.; Balomenos, R.H. (1986-88). *The New Hampshire Inservice Geometry Program.* University of New Hampshire.

Flores Peñafiel, Alfinio. (1987a). El laboratorio y la computadora en la enseñanza de las matemáticas. *Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones 3,* p. 151-182.

Flores Peñafiel, Alfinio; Mirabal, F.; Martínez, A.; Lerma, J. (1987b). Prácticas de matemáticas para primero, segundo y tercero de secundaria. Comunicaciones del CIMAT.

Flores Peñafiel, A.; Reys, B.J.; Reys, R.E. (1990). Desempeño y estrategias en estimación en operaciones aritméticas de alumnos de quinto de primaria y segundo de secundaria en México. *Educación Matemática, 2*(1), p. 30-44.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing: Preface to a science of mathematical education.* Dordrecht: D. Reidel.

Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1988). *The Van Hiele Model of thinking in geometry among adolescents.* National Council of Teachers of Mathematics.

Greber, Isaac. (1983) Engineering needs and the college mathematics core. En A. Ralston y G.S. Young: *The future of college mathematics.* Springer Verlag.

Guzmán Padilla, Livier. (1989). Prácticas para la enseñanza de la matemática en educación media básica con materiales manipulativos. Comunicaciones del CIMAT.

Hernández, Diego Bricio. (1979). El salto de lo continuo a lo discreto. Conferencia presentada en el 1er. Coloquio de Matemáticas del CIEA-IPN.

Kulm, Gerald. (1985). *Counting and early arithmetic learning.* National Institute of Education.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980) *An agenda for action: Recommendations for school mathematics in the 1980s.*

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.*

National Council of Supervisors of Mathematics. (1989). Essential mathematics for the twenty-first century: The position of the National Council for Supervisors of Mathematics. *Mathematics Teacher, 82,* 470-474.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press. (Traducción al español: *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas, 1975).

Pólya, G. (1945) *Mathematics and plausible reasoning. Vol. 1 Induction and analogy in mathematics. Vol. 2 Patterns of plausible inference.* Princeton University Press.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving.* Wiley.

Reys, R.E.; Bestgen, B.J.; Rybolt, J.F.; Wyatt, J.W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Educations. 13,* 183-201

Reys, R.E., Reys, B.J., Nohda, N., Ishida, J., Yoshikawa, S., y Shimizu, K. (en prensa). Computational estimation performance and strategies used by fifth and eight grade japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education.*

Rodríguez Luévanos, Rosa Amelia. (1990). El modelo de Van Hiele del desarrollo del pensamiento geométrico: Una experiencia en la Universidad Autónoma de Nuevo León. Tesis de maestría. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press.

Shumway, R.J. (Ed.) (1980). *Research in mathematics education.* National Council of Teachers of Mathematics.

Taylor, R. (Ed.) (1986). *Professional development for teachers of mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

Van Hiele, Pierre M. (1986) *Structure and insight.* Academic Press.

What works: Research about teaching and learning. (1986) U.S. Departament of Education.