ARTICULOS

La resolución de problemas en la construcción de esquemas de razonamiento

Resumen:
El razonamiento matemático, entendido como la capacidad para entender y producir argumentos que justifiquen procedimientos o estrategias de resolución de problemas matemáticos, es tal vez uno de los aspectos más descuidados en la enseñanza tradicional.

Tal vez una de las maneras de empezar a abordar este aspecto, desde incluso la escuela elemental, sea la *resolución inteligente de problemas no estereotipados.* Lo que entendemos por esta denominación y lo que ello significa en términos de la enseñanza, es el tema de este artículo.

La resolución de problemas en la construcción de esquemas de razonamiento

La actividad matemática escolar dista mucho de la actividad matemática profesional. Cuánto y qué significa esta distancia en términos de lo que se deja de construir o de lo que no se propicia como aprendizaje es una cuestión de la que muchos investigadores se han ocupado extensamente (Skemp, 1980; Revuz, 1980). Lo que la escuela no construye, esencialmente, es la capacidad para construir argumentaciones, para justificar una respuesta en términos de hechos conocidos y establecidos en matemáticas, para construir modelos que sirvan para resolver problemas diversos, en suma: para establecer la conexión entre la teoría y la realidad.

Recientemente se me preguntaba cómo podría hacerse para que los estudiantes, acostumbrados a la enseñanza tradicional, accedieran a un modelo de enseñanza inteligente, donde se tratara de elaborar esquemas de razonamiento. La respuesta a tal pregunta, desde mi punto de vista, es que sólo puede invitarse a los estudiantes a participar de esta actividad si se les muestra la riqueza que ella posee, si se les presenta como una aventura donde puede echarse mano de todos los recursos del intelecto, donde la imaginación y la intuición tienen un lugar importante y la formalización y el rigor sirven para normar las creaciones intuitivas.

¿Dónde tienen cabida, en la escuela, estos momentos creativos? Creo que en la enseñanza elemental esto puede hacerse a través de la resolución de problemas no estereotipados y por procedimientos no enseñados.

En otros documentos (Alarcón y Parra, 1978; y Parra, 1988), hemos discutido acerca de la importancia de la resolución inteligente de problemas

Blanca M. Parra
Sección de Matemática Educativa
CINVESTAV, México

en la enseñanza elemental. Esto es, la importancia de permitir que los alumnos construyan sus propios caminos de razonamiento, sus propias estrategias de resolución, y sobre todo, la importancia de que puedan explicitar el por qué de esa resolución. También hemos mostrado que cuando esta actividad se les propone a los estudiantes, el tiempo que tardan en abandonar los esquemas de resolución tradicionales es realmente muy corto, y que la variedad de estrategias correctas que resultan es muy grande y permite detectar las diferentes etapas que en la construcción de un concepto pueden aparecer. Por ejemplo, en problemas de proporcionalidad (Alarcón y Parra, 1978; y Fregona, 1989), las diferentes estrategias empleadas para determinar cuál de dos productos que se venden en envases de pesos distintos y a precios distintos es más caro o las diferentes estrategias para determinar cuántos frijoles hay en un kilo, muestran las diferentes etapas por las que se atraviesa la construcción de la regla de proporcionalidad (regla de tres) pasando de procedimientos meramente aditivos a procedimientos multiplicativos para completar una unidad de peso (el kilo, en este caso), para llegar a construir la relación unidad de peso-unidad de precio o unidad de peso-número de frijoles.

Ciertamente, este tipo de actividad descontrola inicialmente a los alumnos, habituados a la resolución de problemas estereotipados presentados a continuación de una lección para servir de aplicación de un procedimiento o una operación recién presentada por el maestro. En general, las primeras reacciones son de preguntarse qué operación hay que hacer. El desconcierto puede incrementarse aún cuando se les pregunta el por qué de tal resolución: las respuestas son del estilo "por lógica" "porque pensé" o "lo hice lógicamente". En otros casos, las respuestas se dan en términos de las operaciones que se realizaron: "sume y luego multipliqué", por ejemplo, sin que pueda explicitarse qué es lo que conduce a realizar tal o tales operaciones.

Evidentemente, para que este trabajo tenga sentido, es necesario proponer a los alumnos problemas y no meramente ejercicios de aplicación.

Antes hemos descrito un problema escolar como «una historia que nos cuenta algún tipo de actividad en la que el protagonista tiene que contar o que medir» (Parra, 1988). En sentido amplio, un problema es algo más que una historia de este tipo. Un problema plantea una situación que debe ser modelada para encontrar la respuesta a una pregunta que se deriva de la misma situación, y la resolución no es inmediata. En las palabras de Revuz, un problema sería «un tema de investigación de dificultad suficiente sin ser excesiva y al cual el alumno podrá consagrar un tiempo suficiente» (Revuz, 1980). Ciertamente, lo que es un problema en un nivel escolar no lo es en otro, sea porque no está dentro de los alcances del alumno o bien porque ha sido ya trascendido el nivel en el que el problema lo era verdaderamente.

La resolución de un problema implica, en primer lugar, su reformulación en otros términos. Esto puede significar, por ejemplo:

1) Transformar el enunciado a símbolos;
2) Traducir a una figura ó esquema gráfico;
3) Detectar un concepto clave para reorganizar los datos del problema.

Por ejemplo, respecto al punto 3), Glaeser (Glaeser, 1980) cita el problema siguiente: «¿Están en una misma progresión aritmética los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, y $\sqrt{5}$?». Como el mismo Glaeser se encarga de señalar, el concepto clave aquí es el de *progresión aritmética,* lo que sugiere transformar el texto del problema en "¿Existen $r \in R$, & n y m enteros tales que $\sqrt{2+nr} = \sqrt{3}$ y $\sqrt{3+mr} = \sqrt{5}$?". Una segunda reformulación transforma el problema en "¿Existen n y m enteros tales que $(\sqrt{5}-\sqrt{3})/(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = m/n$?". O lo que es lo mismo, "¿Es $(\sqrt{5}-\sqrt{3})/(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ un número racional?".

Puede decirse que el enunciado del problema ha sido comprendido cuando uno es capaz de reformularlo en sus propios términos.

Ahora, la capacidad de reformular un problema, de traducirlo en oraciones que se refieren más a "hechos básicos", es una capacidad que no puede aprenderse en el curso de una lección tradicional. No hay métodos canónicos para derivar las formulaciones sucesivas de un problema que permitan plantearlo en términos "operatorios". Esta capacidad sólo puede construirse e incrementarse, poco a poco, en una dialéctica entre uno mismo y el conocimiento matemático establecido, representado sea por el profesor, sea por los colegas (y aquí incluyo a los condiscípulos), sea por la misma teoría matemática. Generar esta capacidad es también, o debiera ser, uno de los objetivos de los programas y los cursos de matemáticas.

Una vez que el problema ha sido replanteado en los términos que he llamado "operatorios", se puede tal vez pensar en los métodos o algorítmos para su resolución. Esto es, se puede establecer el plan para llegar a la respuesta de la pregunta planteada. De nuevo, la elección del método de resolución, del algorítmo, puede no ser canónica y requerir de la consideración de diferentes alternativas. Decidir cuál es la mejor, la más eficaz, la más elegante, implica el reconocimiento de la equivalencia de las diferentes alternativas. Por ejemplo, para demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisectan, uno puede plantearse el problema desde la geometría sintética o desde la geometría analítica; pero esto supone que podemos establecer la conexión entre ambos dominios. Sólo el entrenamiento constante puede construir la habilidad para elegir el mejor camino en la resolución de un problema, habilidad que puede traducirse en la elección adecuada de incógnitas (y Diofanto es sin duda una prueba del virtuosismo que puede alcanzarse en este dominio), la elección adecuada de ejes de coordenadas, la notación más pertinente o económica en términos de lo que se trata de establecer.

En la decisión de la estrategia resolutiva, por su parte, es menester identificar los elementos más simples del problema (lo que correspondería a los "datos" de los problemas tradicionales de la enseñanza). Una vez identificados, la tarea consistirá, grosso modo, en establecer las relaciones existentes entre ellos, en encontrar la estructura subyacente para, entonces si, poder elaborar un modelo que responda a la situación que se estudia. Este modelo tendrá entonces que ser confrontado con la realidad que se supone representa para ser ajustado, perfeccionado, a la luz de la teoría matemática en la que se inscribe. A partir de la confrontación entre los tres elementos del esquema clásico de Revuz (Revuz, 1965), realidad-modelo-teoría, se podrá establecer entonces el modelo que permitirá dar respuesta a la situación planteada por el problema.

Como dijimos al principio de este documento, la capacidad para enfrentar un problema verdadero, para elaborar un esquema de resolución, aunque no se llegue siempre a la solución, no se construye en la escuela. Y sin embargo, es a través de este proceso que puede elaborarse el razonamiento lógico, partiendo tal vez de argumentaciones informales en los primeros años para ir formalizando poco a poco los razonamientos elaborados. Lo que generalmente se hace es esperar hasta el último año del ciclo de secundaria para mostrar a los estudiantes fragmentos del razonamiento lógico formal a través de las demostraciones de congruencia de triángulos y de ángulos en el círculo, mientras que en todos los años de la escuela primaria y los primeros dos del ciclo secundaria no se han construido los antecedentes necesarios para que estos procesos puedan ser apreciados, si no comprendidos por los estudiantes.

Glaeser (Glaeser, 1980) dice que los antecedentes de la noción de límite debieran construirse en los diez años que anteceden al primer curso de cálculo; de manera análoga, creo que los antecedentes de la demostración deben construirse a lo largo de todos los años de la enseñanza elemental, y mi argumento es que estos antecedentes pueden construirse a través de la resolución inteligente de problemas a todo lo largo de la escuela primaria y secundaria.

Bibliografía

Alarcón, J.; Parra, B.M. *Cómo los niños resuelven problemas.* Comunicación interna. Sección de Matemática Educativa. **CINVESTAV**. 1978.

Glaeser, G. *Heuristique Générale.* IREM de Estrasburgo, 1980.

Fregona, D. ***La adquisición del concepto de número.*** **Opera Prima, No. 2. Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV**. 1989.

Parra, B.M. *La representación gráfica en la resolución de problemas.* Sección de Matemática Educativa. **CINVESTAV**. 1988.

Revuz, A. *Mathématique moderne, mathématique vivante.* OCDL. París, 1965.

Revuz, A. *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques?* París, PUF. 1980.

Skemp, R. *What is a good environment for the intelligent learning of mathematics? Do schools provide it? Can they?* Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 2, No. 2. 1981.