ARTICULOS

Ambientes gráficos en microcomputadoras para la construcción del concepto de función en matemáticas

1. Introducción:

Un recurso didáctico muy común en la clase de matemáticas es la graficación en el pizarrón, también exponemos a los alumnos a diversas gráficas en tareas, exámenes y materiales didácticos impresos como libros y folletos. La graficación se usa sobre todo para ilustrar conceptos geométricos y en cálculo para visualizar el comportamiento de funciones, también en estadística las gráficas juegan un papel importante.

Con el advenimiento de las microcomputadoras que cada vez están más al alcance de todos se nos presenta una nueva herramienta para la graficación. Existen ya programas comerciales desarrollados especialmente para graficar figuras geométricas o funciones matemáticas. Estos programas tienen muchas ventajas sobre el pizarrón o lápiz y papel ya que despliegan gráficas complejas con gran velocidad y precisión. Lo que interesa en este proyecto de investigación es el tipo de aprendizaje que se puede lograr en un ambiente gráfico con un programa graficador de funciones matemáticas aplicado a tópicos selectos de álgebra y trigonometría para el nivel medio-superior. En álgebra se escogieron los contenidos funciones cuadráticas y sus raíces, en trigonometría se estudiaron familias de funciones y = a sen bx, y = a cos bx.

Como programa graficador se usa el "*Cactusplot*". El objetivo principal de la investigación es estudiar la construcción de conceptos matemáticos en un ambiente gráfico mediante el uso de cápsulas didácticas —graficador para microcomputadoras con un guión de trabajo y asesoría del profesor. Se parte de una hipótesis constructivista de aprendizaje (Schoenfeld, 1987) y se explora el efecto de visualizaciones dinámicas e interactivas sobre la formación de imágenes conceptuales y la transición de representaciones gráficas-geométricas a simbólicas-algebráicas.

Como consecuencia de una serie de estudios en el contexto del proyecto de investigación se quieren desarrollar

Elfriede Wenzelburger Guttenberger
Maestría en Educación en Matemáticas UNAM

métodos para usar graficadores en forma adecuada en la enseñanza de funciones matemáticas a nivel mediosuperior.

2. Revisión de la literatura relacionada

La literatura relacionada se clasificó según cuatro aspectos relevantes para la investigación, importancia del concepto de función, el papel de computadoras en el aprendizaje y la visualización, problemas relacionados con la visualización y la formación de imágenes conceptuales, y la construcción de conceptos matemáticos. Varios de los trabajos de investigación incluidos en esta revisión cubren más de uno de los aspectos mencionados.

Entre las ideas principales de los estudios revisados que son relevantes para la presente investigación se destaca la consideración del concepto de función como un tópico central en matemáticas con características unificadoras y muchos niveles de complejidad (Kleiner, 1989, Dreyfus, 1990). Se presentan dificultades en el aprendizaje al buscar los enlaces entre aspectos geométricos-gráficos y —analíticos formales (Goldenberg, 1988). Los alumnos deben coordinar representaciones visuales y simbólicas ya que las visuales ofrecen una poderosa introducción a abstracciones complejas. En un estudio gráfico la función se ve como objeto gráfico y prevalece la impresión global. Estudiantes se encuentran con funciones en forma de definiciones, de fórmulas o gráficas, esto produce conflictos cognoscitivos y comportamiento inconsistente. La imagen conceptual que tienen los alumnos muchas veces no coincide con la definición matemática ni con la definición que ellos conocen (Vinner, Hershkowitz, 1983).

Gráficas y visualizaciones presentan problemas propios ya que se necesita experiencia matemática y perceptual para interpretarlas. Una gráfica es un modelo de la relación entre variables y es importante que el alumno logre la transición entre representaciones gráficas y algebraicas. (Clement, 1989).

La computadora se considera una tecnología cognitiva que reorganiza amplifica la mente, puede integrar representaciones matemáticas diferentes a través de software adecuado y permite al alumno manipular las gráficas (Pea, 1987). La exploración libre con un graficador puede ayudar para que el estudiante aprenda el trazo de curvas. Las representaciones múltiples con software ofrecen una nueva oportunidad ya que bien planeado, el trabajo con programas graficadores puede ser provechoso dentro de un ambiente cibernético donde el alumno lleva el control. Un enfoque constructivista con un modelo de comprensión que va de comprensión intuitiva, a nivel de procedimiento y nivel de abstración a la formalización es adecuado para explicar la formación de conceptos (Herscovics, Bergeron, 1984).

A partir de los estudios revisados se traza entonces un marco teórico que parte de una visión constructivista de la enseñanza. Se considera la visualización de un ambiente computacional como potencialmente rico para la formación de imágenes conceptuales de funciones matemáticas y la adquisición de estos conceptos.

3. Estudios pilotos

Para llevar a cabo la presente investigación se desarrollaron cápsulas didácticas para los temas funciones cuadráticas y cúbicas simples, raíces de funciones cuadráticas y funciones trigonométricas. Los primeros dos tópicos se usaron en estudios pilotos y con el tercero se trabajó en la experiencia de campo principal.

Las cápsulas didácticas tienen algunas características de "micromundos" (Clime, 1989) en el sentido de que potencialmente son ricos para hacer descubrimientos, se centran en ideas poderosas, son fáciles de iniciar, ofrecen muchas maneras para explorar una idea o resolver un problema, inducen al alumno a hacer preguntas, animan al alumno a explorar, construir estructuras y personalizar su aprendizaje y ayudan al estudiante para tender un puente entre una comprensión intuitiva y formal de las ideas matemáticas.

Específicamente el programa graficador tiene elementos de los organizadores genéricos que describe Tall (1985), como micromundos que hacen posible que el alumno manipule ejemplos de un concepto.

El agente organizador son las guías de trabajo y todo el "sistema genérico organizacional" es la cápsula didáctica —programa graficador, guía de estudio, presencia del profesor— se prevé exploración guiada y tiempo para exploración libre. Una secuencia didáctica típica basada en el método inductivo que se propone en la guía de estudio es la siguiente:

1. Breve introducción al tema.
2. Graficación por computadora de una familia de funciones dadas. Preguntas acerca de lo observado.
3. Graficación aproximada con lápiz y papel (sin hacer tabla de valores) de una familia de funciones dadas. Enseguida graficación con el graficador.
4. Interpretar una familia de funciones dadas en un disco de trabajo. Escribir para cada función una ecuación aproximada. Graficación de las funciones propuestas por los alumnos.
5. Exploración libre de familias de funciones y formulación de conclusiones de la actividad.

a) Primer estudio piloto:

Se realizó un primer estudio exploratorio con un diseño preexperimental (un grupo, pretest-tratamiento-posttest) en Julio, 1989. Participaron 29 estudiantes de 3°. Preparatoria (Grado 12, último año preuniversitario). La duración de la experiencia fue de una semana. La hipótesis de trabajo fue:

Los estudiantes pueden formar ciertos conceptos de funciones polinómicas simples trabajando con el graficador en microcomputadora.

Hay datos completos (pretest, posttest, cuestionario de actitud) de 23 estudiantes. Se observó que hubo aprendizaje, sobre todo en la interpretación de gráficas de las funciones [tabla 1].

El tópico que se presentó fue polinomios de 2° y 3° grado y sus gráficas. Los alumnos participantes estaban cursando Temas Selectos de Matemáticas. Para inducir en los alumnos el aprendizaje que se pretende se desarrolló un material cuidadosamente estructurado según los principios del método inductivo que se delineó en la revisión de la literatura. El tema de funciones cuadráticas y cúbicas se dividió en cinco actividades de acuerdo al tipo de ecuación que se grafica:

I. $y = ax^2$
II. $y = ax^2 + c$
III. $y = ax^2 + bx$
IV. $y = ax^2 + bx + c$
V. $y = ax^3 + d$

Una secuencia didáctica típica consiste de los siguientes pasos:

1. Graficar una familia de 5 gráficas dadas del tipo I.
2. Contestar preguntas acerca del papel de los parámetros a, c, b, d respectivamente.
3. Graficar aproximadamente una familia de funciones dadas, e. d. trazar la gráfica que tiene la forma apropiada.
4. Leer una familia de funciones del disco de trabajo, escribir una ecuación aproximada de cada gráfica, e. d. que tenga las características que corresponden a su forma.

5. Experimentar libremente con ecuaciones y gráficas.
6. Formular conclusiones generales acerca de la forma de la gráfica que puedan tener ecuaciones del tipo IV.

Los exámenes (previo y final) fueron breves, con seis preguntas de selección múltiple cada una. Las tareas que se esperaba que el alumno realizara después de trabajar con el material fueron: identificar una función polinómica dada como ecuación, identificar una función de segundo grado o tercer grado dada como ecuación (preguntas simbólicas), identificar un polinomio de segundo o tercer grado, dado como gráfica, asociar a una gráfica dada, su ecuación funcional (preguntas gráficas). Este primer trabajo de campo fue básicamente un estudio de factibilidad de la investigación. Se vió que los alumnos pueden participar con éxito y entusiasmo en una clase de matemáticas con microcomputadoras en el salón de cómputo.

b) Segundo estudio piloto

Se realizó otro estudio exploratorio con el mismo diseño de a) y la misma hipótesis de trabajo en Diciembre 1989, con duración de una semana.

Participaron 37 estudiantes de primer año de preparatoria (10° grado) de los cuales 18 presentaron el examen previo y final.

Un análisis de las respuestas de los alumnos en las hojas de trabajo y los resultados del examen final muestran que los alumnos lograron los objetivos propuestos para la experiencia de campo sólo parcialmente [tabla 1]. El concepto que se estudió fue el de raíz de una función cuadrática. Con el examen se intentó medir el desempeño en cuatro tipos de tareas: Tarea 1: Reconocer la gráfica dada la ecuación. Tarea: 2: interpretar la ecuación general a partir de ejemplos concretos. Tarea 3: Contestar preguntas acerca de la existencia de raíces a partir de una gráfica o ecuación. Tarea 4: Encontrar la raíz a partir de la gráfica. La tabla 3 muestra que la formación de los conceptos se logró parcialmente y que el provecho que los alumnos sacaron del trabajo con el graficador no fue parejo para todas las tareas. En la tabla 4 se presentan los porcentajes promedios del grupo según el tipo de ecuación estudiado durante la experiencia. Se ve que algunos tipos de ecuaciones fueron muy difíciles para estos estudiantes, lo cual se refleja también en los índices de facilidad de los reactivos del examen que fluctúan entre 100 y 5. ($p = 100\,(Nc/Nt)$, Nc No. de respuestas correctas, Nt No. total de respuestas).

El hecho de que no hubo un mejor desempeño en el examen final de parte de algunos estudiantes se puede deber al material de estudio que usaron y a la situación experimental en la que se encontraban ya que la experiencia se llevó a cabo en un laboratorio de cómputo de la UNAM fuera de las horas normales de clase. Además se notaba la falta de costumbre de los alumnos (1° año de preparatoria) de trabajar en forma independiente y con la microcomputadora. En cuanto al desempeño en las tareas propuestas resulta que la mayoría de las preguntas eran para medir tarea 3 para la cual hubo un ligero avance en el desempeño, también se registraron logros para la tarea 1 y tarea 4, pero no para la tarea 2 que era de generalización. A pesar de esto, sería prematuro concluir que al trabajar con el graficador en la microcomputadora en forma de cápsulas didácticas no es posible lograr la generalización tal como se midió aquí. Hace falta repetir la experiencia con más alumnos durante un período más largo de tiempo e integrarla a las actividades normales de los alumnos. En el cuadro 1 se muestran problemas selectos del examen final.

TABLA 1

PORCENTAJE DE RESPUESTAS CORRECTAS EN LAS PREGUNTAS SIMBOLICAS.

1. EXPERIENCIA DE CAMPO

a)

Pregunta	*Examen Previo*	*Examen Final*	*Diferencia*
1	32%	66.7%	+ 34.6%
2	32%	45.7%	+ 13.7%
3	35%	45.7%	+ 10.1%
			Prom. + 19%

PORCENTAJE DE RESPUESTAS CORRECTAS EN LAS PREGUNTAS GRAFICAS

b)

Pregunta	*Examen Previo*	*Examen Final*	*Diferencia*
4	78.5%	100%	+ 21.5%
5	64.2%	91.6%	+ 27.4%
6	64.2%	95.8%	+ 31.6%
			Prom. + 27%

TABLA 2

RESULTADOS DE LOS EXAMENES (Previo y Final) 100 PUNTOS TOTAL

2. EXPERIENCIA DE CAMPO

Alumno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
Examen Previo	62	35	37	49	39	17	32	35	32	42	42	52	34	27	29	27	34	32	x = 36.5
Examen Final	47	47	42	52	49	56	61	49	62	39	54	62	44	39	54	36	39	44	x = 48.9

TABLA 3

PORCENTAJES PROMEDIOS DEL GRUPO SEGUN TIPO DE TAREA

	Tarea 1	*Tarea 2*	*Tarea 3*	*Tarea 4*
Examen Previo	37 %	36 %	33 %	42 %
Examen Final	50 %	32 %	46 %	94 %

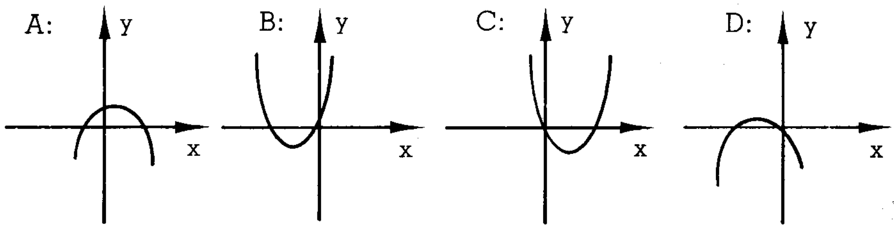
TABLA 4

PORCENTAJES PROMEDIOS DEL GRUPO SEGUN TIPO ECUACION*

	Def. de Raíz	$y = ax^2$	$y = ax^2 + c$	$y = ax^2 + bx$	$y = ax^2 + bx + c$
Examen Previo	55 %	38 %	16 %	41 %	41 %
Examen Final	80 %	42 %	32 %	25 %	71 %

Tarea 1

14.- La función $y = 3x^2 + 4x$ tiene la forma

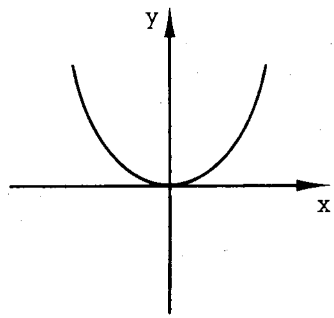


Tarea 2

8.- En una función $y = ax^2 + c$ tiene raíces si

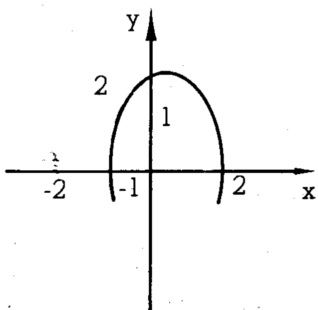
A: a, c son positivos
B: a y c tienen signo diferente
C: a, c son negativos
D: $a = c$

Tarea 3



9.- Una función del tipo
A: No se sabe si tiene raíces
B: Tiene una raíz, $x = 0$
C: Tiene raíz doble, $x = 0$
D: No tiene raíces

10.- La función $y = 4x^2 - 5$ tiene
A: Dos raíces diferentes
B: Solamente una raíz en cero
C: Ninguna raíz
D: Dos raíces iguales



Tarea 4

11.- La función
A: No tiene raíces
B: Tiene como raíces 2 y -1
C: Tiene solamente una raíz en $x = 2$
D: No se sabe si tiene raíces

4. Estudio principal:

a) Metodología.

En el mes de junio de 1990 se llevó a cabo una tercera experiencia de campo en la cual participaron 60 alumnos de un grupo de cálculo del tercer año de preparatoria del plantel 5 de la Escuela Nacional Preparatoria. Se obtuvieron datos completos de 49 alumnos (examen diagnóstico y examen final). Los 60 alumnos se dividieron al azar en dos grupos (grupo 1 y grupo 2). Los contenidos matemáticos eran funciones trigonométricas tipo y = a sen bx y y = a cos bx que normalmente no estan en el plan de estudio. Los alumnos supuestamente aprendían cómo los valores de a y b influyen en el comportamiento de la función en cuanto a la forma de su gráfica, determinada por su frecuencia o período y amplitud.

El Grupo 1 trabajó durante las once sesiones de 50 minutos, que duró la experiencia, en el centro de cómputo del plantel con el programa graficador y el material de estudio, mientras que el Grupo 2 trabajó con el mismo material de estudio con su maestra en el salón de clase. Para las sesiones se respetó el horario usual de la clase de cálculo del grupo.

Una sesión antes de la primera clase en el centro de cómputo, se aplicó un examen diagnóstico a todos los alumnos.

El Grupo 1 utilizó el programa graficador durante la experiencia de campo para graficar familias de funciones trigonométricas del tipo y = a sen x, y = a cos x, y = a sen bx, y = a cos bx. La estrategia didáctica reflejada en la guía de estudio es inductiva y sigue una secuencia que va de situaciones sencillas a más complejas. La intervención de la investigadora fue mínima, en general se contestaron sólo preguntas acerca del manejo del programa. Una secuencia típica se ejemplifica en lo que sigue:

Ejemplo de una secuencia didáctica.

Segundo día:

La primera actividad este día consiste en la graficación con CACTUSPLOT de funciones tipo y = a.cosx para diferentes valores de a. El alumno contesta preguntas acerca de lo observado y fórmula conclusiones con respecto a la amplitud. El alumno determina la amplitud de una función tipo y = a cos x a partir de la ecuación y a partir de gráficas en el disco de trabajo. También se pide que escriba ecuaciones de funciones cuyas gráficas están en el disco. Además tiene que graficar algunas funciones primero con lápiz y papel y luego con el Cactusplot.

Se propone que con este método el alumno construye e interioriza los conceptos involucrados y que no aprende por memorización o repetición.

El Grupo 2 usó el mismo material escrito pero tuvo tutoria de parte de la profesora del grupo; las gráficas que se pedían en la guía de estudio se realizaron con lápiz y papel en la casa o en el pizarrón del salón de clase.

Las sesiones de clase consistieron básicamente de tres etapas: lectura*, análisis y resolución de los ejercicios del material.

Se usó el pizarrón para graficar algunas funciones; en general se graficaron siempre las primeras de cada actividad, y se discutieron las cuestiones planteadas en el material.

Las gráficas que requerían escalas especiales se hicieron en papel milimétrico, unas en clase y otras de tarea en la casa.

El material se trabajó en cinco sesiones. Las primeras sesiones abarcaron menos material que las últimas.

Una de las estrategias para motivar el estudio fue el de dar la menor información posible aparte de la proporcionada por el material, además de insis-

* Dirigida, propiciando algunas veces exposiciones tanto de los alumnos como de la profesora.

tir en que reflexionaran cada pregunta que se planteaba en el mismo.

En general hubo interés, participación y trabajo durante todas las sesiones.

El pizarrón se usó para mostrar las respuestas que los alumnos proporcionaban para cada pregunta, relativa a una o dos gráficas planteadas en el material.

Se efectuaron cálculos con la calculadora para obtener las tabulaciones mínimas necesarias para graficar.

b) Resultados.

En la Tabla 5 se presentan los resultados del examen diagnóstico para el Grupo 1 y el Grupo 2. Los conocimientos previos de los dos grupos eran en promedio casi iguales.

La Tabla 6 muestra los resultados del examen final de los dos grupos y se ve que los resultados en promedio son casi iguales. En ambos grupos hubo un avance significativo en el aprendizaje. El examen diagnóstico y el final contenían las mismas preguntas pero en otro orden. Los exámenes son de selección múltiple de 30 reactivos y para el examen final se calculó la confiabilidad que fue de 0.896 para el Grupo 1 (splithalf) y de 0.92 para el Grupo 2. Se escogió un examen de selección múltiple para mejor control de la validez y confiabilidad de los exámenes.

Para el examen final se determinaron los índices de facilidad. Para el Grupo 1 estos índices varían entre 0.46 y 0.96 y para el Grupo 2 entre 0.5 y 10. Un análisis reactivo por reactivo muestra que las distribuciones son bastante parejas, pero en algunos casos los reactivos resultaron más fáciles para el Grupo 2, en otros para el Grupo 1. Por ejemplo, la pregunta 5 fue contestada correctamente por la mitad del Grupo 1 y por el 72% del Grupo 2, mientras que el reactivo 14 resultó más difícil para el Grupo 2 ya que sólo el 65% lo contestó correctamente comparado con un 85% del Grupo 1. La Fig. 1 muestra estos dos reactivos.

5. La amplitud y el período de $y = 1.2 \bullet \sin(2.7\,x)$ son:

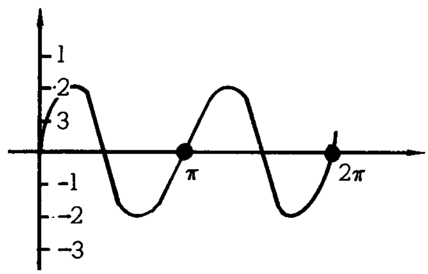
a) $p = \dfrac{2\pi}{2.7}$, $a = 1.2$

b) $p = 1.2$, $a = \dfrac{2\pi}{2.7}$

c) $p = \dfrac{2.7}{2\pi}$, $a = 1.2$

d) $p = 2.7$, $a = 1.2$

14. La función tiene



a) amplitud = 2, período = π
b) amplitud = π, período = 2
c) amplitud = —2, período = 2π
d) amplitud = —2, período = π

FIGURA 1

Sin embargo la tendencia general va en la dirección de que la mayoría de los reactivos (19) resultaron más fáciles para el Grupo 2, 10 resultaron más difíciles y uno resultó igual de fácil. La actitud de los alumnos del Grupo 1 hacia el uso de la microcomputadora y el graficador fue muy positivo como reflejan los comentarios que se resumen en la Tabla 7.

Para el Grupo 2 las preguntas más difíciles con índice de facilidad 0.5, 0.5 y 0.54 del examen final fueron 10, 11 y 26 (Fig. 2). Los índices de facilidad correspondientes del grupo experimental fueron 0.6, 0.64 y 0.53.

10. En la ecuación $y = a\ \mathrm{sen}(bx)$, b determina
   i) el período
   ii) la amplitud
   iii) la frecuencia
   iv) el período y la amplitud
11. En la ecuación $y = a \cos(bx)$, b determina
   i) el período
   ii) la frecuencia
   iii) la amplitud
   iv) el período y la amplitud
26. La función $y = \mathrm{sen}(4x)$ tiene período
   a) 2π
   b) $2\pi/4$
   c) 4
   d) $4/2\pi$

FIGURA 2

Para el Grupo 1, los reactivos más difíciles (índice de facilidad: 0.5, 0.46 y 0.53) fueron 5, 7 y también 26 (Figura 3). Los índices de facilidad correspondientes para el Grupo 2 fueron 0.72, 0.59 y 0.54.

5. La amplitud y el período de $y = 1.2\ \mathrm{sen}(2.7x)$ son:
   a) $p = \frac{2\pi}{2.7}$, $a = 1.2$
   b) $p = 1.2$, $a = \frac{2\pi}{2.7}$
   c) $p = \frac{2.7}{2\pi}$, $a = 1.2$
   d) $p = 2.7$, $a = 1.2$

7. La amplitud y el período de $y = -0.5 \bullet \mathrm{sen}(-1.6x)$ son:
   a) $p = \frac{2\pi}{-1.6}$, $a = -0.5$
   b) $p = \frac{2\pi}{1.6}$, $a = 0.5$
   c) $p = \frac{1.6}{2\pi}$, $a = -0.5$
   d) $p = 0.5$, $a = \frac{2\pi}{1.6}$

FIGURA 3

El caso del reactivo 5 resulta ser interesante ya que este era más fácil para el Grupo 2 que para el Grupo 1.

En lo que se refiere a los diferentes tipos de procesos cognitivos en la construcción de conceptos que se esperaron que ocurrieran en los alumnos distinguimos tres objetivos:

Objetivo 1: Dada la ecuación, el alumno puede hacer o reconocer la gráfica y dada la gráfica, el alumno puede escribir o reconocer la ecuación, además tiene una representación mental del efecto que a y b tienen sobre la gráfica de las ecuaciones $y = a\ \mathrm{sen}\ (bx)$ y $y = a \cos\ (bx)$. En el examen final corresponden al Objetivo 1, 12 reactivos.

Objetivo 2: El alumno puede trabajar con las ecuaciones generales $y = a\ \mathrm{sen}\ bx$ y $y = a \cos bx$ a partir del estudio y la exploración de ejemplos concretos. En el examen final corresponden 6 reactivos al Objetivo 2.

Objetivo 3: El alumno puede coordinar funciones individuales y sacar conclusiones acerca de sus propiedades a partir del estudio y la exploración de familias de funciones. En el examen final se mide el Objetivo 3 con 12 preguntas.

Los resultados del examen diagnóstico y el examen final se analizaron de acuerdo a estos objetivos. Tabla 8 y 9 muestran que no hubo diferencias en el desempeño del Grupo 1 y del Grupo 2 en cuanto al logro de los objetivos.

De acuerdo al diseño experimental usado, (dos grupos de tratamiento formados al azar a partir de un grupo, pretest-posttest), se calcularon para cada grupo puntajes de ganancia entre en Pretest y Posttest (Tabla 10) y se calculó una t entre el Grupo 1 y el Grupo 2 sobre la base de esos puntajes. El valor de t* era de 0.814 lo cual con 47 grados de libertad no muestra una diferencia estadísticamente significativa.

c) Discusión.

Los exámenes contenían seis tipos de preguntas diferentes.

Tipo 1: Dada una ecuación $y = \cos bx$ y $y = \text{sen}\, bx$ donde b toma algún valor real, preguntar el período.
(Corresponde a Objetivo 3).

Tipo 2: Dada una ecuación $y = a\, \text{sen}\, bx$, $y = a \cos bx$ donde a y b toman algún valor real, preguntar por período y amplitud.
(Corresponde a Objetivo 3).

Tipo 3: Dada una ecuación general $y = a\, \text{sen}\, bx$, $y = a \cos bx$, preguntar por la amplitud, período o frecuencia.
(Corresponde a Objetivo 2).

Tipo 4: Dada una gráfica de una función $y = a \cos bx$, $y = a\, \text{sen}\, bx$ determinar la amplitud y el período.
(Corresponde a Objetivo 1).

Tipo 5: Dada una gráfica, identificar la ecuación.
(Corresponde a Objetivo 1).

Tipo 6: Dada una ecuación, identificar la gráfica.
(Corresponde a Objetivo 1).

Al analizar las respuestas incorrectas se notó que los errores más comúnes fueron los siguientes:

1. Confundir a (amplitud) y p (período) en los distractores.
2. Confundir la forma de la gráfica de seno y coseno.
3. Confundir el valor de a y/o b con el período.
4. No poder expresar correctamente el período como múltiplo de 2π.
5. No poder identificar la ecuación, dada la gráfica.
6. No poder reconocer correctamente la amplitud y/o el período de una función a partir de la gráfica.

A pesar de los errores cometidos hubo aprendizaje en ambos grupos y se

---

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)\,S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$$

girador de libertad $28 + 21 - 2 = 47$

nota un avance significativo entre los resutados del examen diagnóstico y el examen final.

Se puede concluir que la computadora no produjo diferencia en los resultados del aprendizaje que se mide en los exámenes que se usaron para la experiencia. Aparentemente la presencia del profesor compensó en el Grupo 2 la ausencia de la computadora. Además puede ser que el instrumento utilizado para medir los aprendizajes no es sensible a las diferencias en la adquisición de los conceptos con la computadora o sin la computadora. La secuencia didáctica propuesta en la guía de estudio que usaron ambos grupos parece ser acertada ya que representa el factor común al método de trabajo de ambos grupos. Por otro lado se puede afirmar que alumnos con una computadora y una guía de estudio pueden aprender tanto como alumnos con una guía de estudio y un profesor.

Una posible explicación para los resultados tan parecidos entre ambos grupos es que la ventaja que tienen los alumnos que usan computadoras en cuanto a la graficación se compensa por la intervención del profesor en el grupo sin computadora. El diálogo didáctico y la formulación de conclusiones puede ser tan útil para inducir aprendizaje que la herramienta gráfica.

Fue la opinión de la mayoría de los alumnos en el Grupo 1 (18 de 28) que una combinación de la computadora con los métodos tradicionales de enseñanza —libro de texto y/o profesor— sería lo mejor para aprender ya que en el grupo experimental, la intervención del experimentador se redujo a un mínimo, e.d., el alumno se encontraba prácticamente sólo frente a la computadora con la guía de estudio y el programa graficador.

TABLA 5

RESULTADOS DEL EXAMEN DIAGNOSTICO
(100 puntos máximo)

Número de Participantes	*Grupo*	*Promedio y desviación estandar*
21	Grupo 1	$\bar{x} = 32.91 \quad \sigma_n = 11.32$
28	Grupo 2	$\bar{x} = 31.07 \quad \sigma_n = 10.13$

TABLA 6

RESULTADOS DEL EXAMEN FINAL
(100 puntos máximo)

Número de Participantes	*Grupo*	*Promedio y desviación estandar*
21	Grupo 1	$\bar{x} = 75.52 \quad \sigma_n = 19.89$
28	Grupo 2	$\bar{x} = 75.39 \quad \sigma_n = 20.43$

TABLA 7

COMENTARIOS DEL GRUPO 1 (EXPERIMENTAL)

Me gustó trabajar con la computadora		*El graficador me parece útil para estudiar funciones*		*Prefiero estudiar de otra manera*					*Aprendí más*	
SI	*NO*	*SI*	*NO*	*Prof. a*	*Libro b*	*comp. + maestro*	*comp. maestro + libro*	*comp. + libro*	*SI*	*NO*
26	0	23	2	6	1	12	5	1	15	10

TABLA 8

RESULTADOS PROMEDIOS
DEL EXAMEN DIAGNOSTICO
SEGUN OBJETIVO

	OBJETIVO 1 46 máximo	*OBJETIVO 2 18 máximo*	*OBJETIVO 3 36 máximo*
Grupo 1	14.46 (31.4%)	6.75 (33.5%)	9.85 (27.4%)
Grupo 2	15.56 (33.8%)	6 (33%)	11.34 (31.5%)

TABLA 9

RESULTADOS PROMEDIOS DEL EXAMEN FINAL
SEGUN OBJETIVO

	OBJETIVO 1 46 máximo	*OBJETIVO 2 18 máximo*	*OBJETIVO 3 36 máximo*
Grupo 1	34.46 (79.3%)	13.39 (74.4%)	22.71 (63%)
Grupo 2	38.28 (83.2%)	13.00 (72.2%)	23.8 (66%)

TABLA 9a

GANANCIAS EN PUNTOS EN PROMEDIO

	OBJETIVO 1	*OBJETIVO 2*	*OBJETIVO 3*
Grupo 1	22.00	6.64	12.86
Grupo 2	22.72	7.00	12.46

TABLA 10

PROMEDIO DE PUNTAJES DE GANANCIA
(EXAMEN PREVIO-FINAL)

Grupo 1	$\bar{x}_1 = 43.5 \quad (\sigma_{n1} = 21.6)$
Grupo 2	$\bar{x}_2 = 42.3 \quad (\sigma_{n2} = 23.7)$

5. Conclusiones:

En esta serie de estudios se trató de explorar algunos aspectos de procesos cognitivos de importancia en la enseñanza de la matemática como son la formación de conceptos, la capacidad de inducir y la visualización (Dreyfus, 1990).

Se observó que el uso de un graficador para computadora en un ambiente estructurado a través de material de estudio que guía al estudiante, puede ser provechoso para la adquisición de conceptos. Este resultado coincide con los de otros trabajos (Goldenberg, 1988, Tall 1985).

En estos estudios se pide al alumno que a través de una visualización guiada y un estudio gráfico de familias de funciones se forme una imagen conceptual que lo lleva finalmente a formar conceptos, a inducir definiciones de conceptos a partir de ejemplos concretos y a aplicar los conocimientos a tareas específicas como son relacionar ecuaciones con gráficas, reconocer ejemplos de gráficas de un cierto tipo, interpretar el papel de los parámetros presentes en ecuaciones, específicamente los efectos de cambios de parámetros sobre la forma gráfica y característica de la función como por ejemplo la existencia de raíces. El uso de cápsulas didácticas como "sistema genérico organizacional" (Tall, 1985) provoca procesos cognitivos complejos en el aprendizaje de funciones y se ha visto aquí y en estudios anteriores que graficadores para computadoras pueden ser útiles en este contexto.

Esta serie de estudios no da resultados que demuestran una superioridad de computadoras para adquirir conceptos a través de métodos gráficos, pero los instrumentos de observación son muy tradicionales y no miden aprendizajes que a lo mejor no se podrían lograr sin computadoras. La estrategia didáctica empleada es que las computadoras se usan más como pizarrón electrónico y menos para una interacción dinámica. El alumno tiene que descubrir conceptos comparando y contrastando miembros de familias de funciones. Otra estrategia que se probaría en estudios futuros es la transformación de gráficas de funciones provocando cambios sucesivos en su ecuación. De acuerdo al modelo constructivista de Herscovics y Bergeron (1984), se pretende pasar con el método gráfico aquí propuesto de una comprensión intuitiva visual por una de nivel procedimiento a un nivel de abstracción y generalización, lo que se logró de cierta manera sobre todo en el estudio principal.

El método gráfico requiere del alumno una interacción continua de dos modos de representación, el gráfico - geométrico con el algebraico-analítico. Se introducen funciones básicamente como objetos que pueden ser transformados- un cambio de la gráfica produce un cambio en la ecuación y viceversa. Se maneja una noción global de función, la de una "regla" o "máquina" que cambia números a otros números y produce pares ordenados. El alumno tiene que interpretar y entender modelos visuales de funciones y asociar cambios en los modelos con cambios en los parámetros de la ecuación, también se requiere que traduzca información simbólica, e.d. ecuaciones e imágenes gráficas.

Las actividades propuestas en el método gráfico ponen énfasis explícitamente en las transiciones entre representaciones gráficas y algebraicas y se llega de esta manera a un cierto nivel de abstracción y generalización como refleja el análisis de las guías de estudio contestadas por los alumnos del estudio principal. Errores detectados en los exámenes pueden deberse en parte a imágenes conceptuales incompletas y a conceptos formados erróneamente, quizás por las imprecisiones que siempre están presentes en las gráficas.

Perspectivas para estudios futuros:

En la serie de estudios reportados aquí se mostró que ciertos aspectos del concepto de función se pueden introducir en un contexto visual y que los alumnos pueden coordinar representaciones visuales y simbólicas.

Será un objetivo de investigaciones futuras, el de encontrar respuestas a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles tópicos del currículo de matemática de nivel medio superior se pueden introducir con el método gráfico aquí propuesto?
2. Qué dificultades encuentran los alumnos expuestos a un método gráfico con la computadora, que ventajas tiene tal método sobre una clase tradicional? (Estudios de casos).

Es claro que en el contexto del uso de computadoras para construir conceptos mediante visualización y representaciones múltiples y la formación de imágenes conceptuales hay muchas más preguntas abiertas que son de interés para este investigador y la comunidad de investigación en educación matemática en general. La finalidad de este tipo de estudios es, siempre, la de encontrar la mejor manera de utilizar esta tecnología cognitiva que representa la computadora en la enseñanza de la matemática.

Este tipo de estudios va de acuerdo a lo expresado por Balacheff (1990) en cuanto a los ambientes de aprendizaje llamados micromundos. Es importante realizar estudios de corte psicológico que investiguen el efecto de tales ambientes de aprendizaje aclarando qué y cómo aprenden los alumnos en ellos, con la finalidad de mejorarlos.

6. Bibliografía

BALACHEFF, N. Beyond a Psychological Approach of the Psychology of Mathematics Education Proceedings of PME 14, 1990.

CLEMENT, I. The Concept of Variation and Misconceptions in Cartesia Graphing. Focus: On Learning Problem in Mathematics, Vol. 11, No, 2, 1989.

CLIME, MICROWORLDS: Towards a Working Definition. Council for Logo in Mathematics Education, Vol. 2, No. 2, April, 1989.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking. ICMI Study Series: Mathematics and Cognition, 1990.

GOLDENBERG, E.P. Mathematics, Metaphors and Human Factors. The Journal of Mathematical Behavior, Vol. 7, No. 2, 135-173, 1988.

HERSCOVICS, N., BERGERON, J. A Constructivist vs A Formalist Approach in the Teaching of Mathematics, Proceedings of PME 8, 1984.

KLEINER, I. Evolution of the Function Concept; A Brief Survey College Mathematics Journal, 20, 282-300, 1989.

PEA, R. D. Cognitive Technologies for Mathematics Education in Cognitive Science and Mathematics Education. Schoenfeld (Ed.), Lawrence Erlbaum Associates, London, 1987.

SCHOENFELD, A. Cognitive Science and Mathematics Educations. An Overview. Lawrence Erlbanym Associates, Hillsdale, p. 1-32, 1987.

TALL, D. Using Computer Graphics Programs as Generic Organisers for the Concepts Image of Differentiation. Proceedings of PME 9, Utrecht, 1985.

VINNER, S., HERSHKOWITZ, R. On Concept Formation in Geometry. ZDM, Vol. 1, 1983.