ARTICULOS

# Criterios de divisibilidad en sumas de potencias finitas

**Resumen**

El objetivo de este trabajo es enunciar criterios de divisibilidad en el conjunto Z mediante desarrollos finitos de potencias enteras. A partir de la generalización de un conocido criterio de divisibilidad por 7 se obtienen criterios del tipo:

$$17 \mid x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1 x_0 \rightleftharpoons 17 \mid \sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t}\, 5^{n-t} x_t \quad (1) \text{ (criterio de div. por 17)}$$

Finalmente se llega a que el criterio de divisibilidad por un número determinado puede expresarse en diferentes desarrollos finitos de potencias del tipo (1). Por ejemplo, el criterio de divisibilidad por 3 se puede expresar en cada uno de los desarrollos finitos de potencias, tipo (1), cuyas bases son los diferentes elementos de la sucesión: 2, 5, 8, 11,..., 3k-1,...,$k \in Z^+$

**Introducción**

El lector es consciente, que de la teoría de los restos potenciales se obtiene el criterio general de la divisibilidad que nos permite enunciar cualquier criterio a un número natural (o entero) arbitrario, en un sistema de numeración determinado. En los libros de textos de la Enseñanza General Básica se particularizan algunos de ellos que son los más utilizados.

El objetivo de este trabajo es enunciar algunos criterios de divisibilidad en el conjunto de los números enteros mediante un desarrollo finito de potencias; para ello nos basaremos en la generalización de un conocido criterio de divisibilidad por 7, que es usado con frecuencia por muchos profesores de Educación General Básica.

El criterio consiste en lo siguiente:

Tómese un número entero positivo cualquiera (obviamente debe tomarse "grande"). Suprímasele la cifra de las unidades y réstesele al número resultante el doble de la cifra suprimida. Si reiterado el proceso se obtiene un múltiplo de 7 conocido, el número inicial también lo será; en caso contrario el número tomado en consideración no será divisible por siete.

Tómese un número negativo cualquiera (obviamente debe tomarse "grande" en valor absoluto). Suprímasele la cifra de las unidades y súmesele al número resultante el doble de la cifra suprimida. Si reiterado el proceso se obtiene un

**José Ángel Dorta Díaz**

Universidad de La Laguna (TENERIFE)

múltiplo de 7 conocido, el número inicial también lo será; en caso contrario el número tomado en consideración no será divisible por siete.

Este método, que es eminentemente práctico, lo expondremos a continuación mediante algunos ejemplos.

Consideremos el número **N** = 39876 y multipliquemos la cifra de las unidades por 21 (21 es un múltiplo de 7 y en consecuencia 21 × 6 también lo será) y restamos esta cantidad del número **N**. Si **N** — (21 × 6) fuese múltiplo de 7, entonces, **N** también lo sería.

$$\boxed{\begin{array}{r} 39876 \\ -\quad 126 \\ \hline 39750 \end{array}}$$

En la práctica lo que se hace es suprimir la cifra de las unidades al número **N** y se resta a la cantidad que resulte el doble de la cifra suprimida, es decir:

$$\boxed{\begin{array}{r} 3987 \\ -\quad 12 \\ \hline 3975 \end{array}}$$

Obsérvese que si 39750 fuera múltiplo de 7, como lo es de 10, sería múltiplo de 70, en cuyo caso 3975 sería múltiplo de 7.

Si repetimos el proceso con el número **N'** = 3975 llegaremos a:

$$\boxed{\begin{array}{r} 397 \\ -\quad 10 \\ \hline 387 \end{array}}$$

Lo mismo con 387:

$$\boxed{\begin{array}{r} 38 \\ -\ 14 \\ \hline 24 \end{array}}$$

y como 24 no es un múltiplo de 7, tampoco lo será el número inicial 39876.

Hagámos brevemente dos ejemplos más:

¿Serán los números 160083 y — 8547 múltiplos de 7?

Siguiendo el método descrito podemos escribir:

$$\boxed{\begin{array}{r} 16008 \\ -\quad 6 \\ \hline 16002 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1600 \\ -\quad 4 \\ \hline 1596 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 159 \\ -\ 12 \\ \hline 147 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 14 \\ -\ 14 \\ \hline 0 \end{array}}$$

luego el número 160083 es múltiplo de 7, por serlo 0.

$$\begin{array}{r} -\,854 \\ +\;\;14 \\ \hline -\,840 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,84 \\ +\;\;0 \\ \hline -\,84 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,8 \\ +\,8 \\ \hline 0 \end{array}$$

luego el número — 8547 es un múltiplo de 7.

## 1. Generalización

Generalizemos el proceso; para ello tomemos en primer lugar un número natural de 6 cifras:

$$\boxed{N = x_5\, x_4\, x_3\, x_2\, x_1\, x_0} \qquad (0)$$

y realizemos un procedimiento análogo al caso del ejemplo concreto. El primer paso sería suprimir la cifra de las unidades y restar del número que resulte el doble de la cifra suprimida, con lo que quedaría:

$x_5\, x_4\, x_3\, x_2\, (x_1 - 2x_0)$

Reiterando el proceso obtendremos:

$$x_5\, x_4\, x_3\, (x_2 - 2(x_1 - 2x_0))$$
$$x_5\, x_4\, (x_3 - 2(x_2 - 2(x_1 - 2x_0)))$$
$$x_5\, (x_4 - 2(x_3 - 2(x_2 - 2(x_1 - 2x_0))))$$
$$x_5 - 2(x_4 - 2(x_3 - 2(x_2 - 2(x_1 - 2x_0))))$$

Esta última expresión se puede escribir:

$$\boxed{x_5 - 2x_4 + 2^2x_3 - 2^3x_2 + 2^4x_1 - 2^5x_0} \qquad (1)$$

con lo que podemos afirmar que:

$$\boxed{7 \mid x_5\, x_4\, x_3\, x_2\, x_1\, x_0 \rightleftharpoons 7 \mid x_5 - 2x_4 + 2^2x_3 - 2^3x_2 + 2^4x_1 - 2^5x_0}$$

Entonces, decir que N es múltiplo de 7 equivale a decir que la expresión (1) es múltiplo de 7.

**Proposición:** La condición necesaria y suficiente para que un número natural $x_n\, x_{n-1}\, x_{n-2} \ldots x_3\, x_2\, x_1\, x_0$ sea un múltiplo de 7 es que lo sea la expresión:

$$\boxed{\sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t}\, 2^{n-t}\, x_t}$$

Hemos obtenido así un criterio general de divisibilidad por 7 mediante un desarrollo finito en potencias de 2. (El criterio, evidentemente, puede extenderse para números enteros; es decir: tomar $N \in Z$)

El lector comprenderá que la razón por la que la suma finita resulta *en potencias de dos*, es porque al reiterar el proceso, siempre se resta *"el doble de la cifra suprimida"* (Obviamente el hecho de restar siempre *el doble* radica en que se resta de N"**21** multiplicado por la cifra de las unidades de N" y se repite el proceso.

*Comprobemos numéricamente que la condición es necesaria:*

Para ello tomemos el número natural 1521296 que es un múltiplo de 7, entonces la suma finita:

$$1 - 2.5 + 2^2 \bullet 2 - 2^3 \bullet 1 + 2^4 \bullet 2 - 2^5 \bullet 9 + 2^6 \bullet 6$$

también lo será, puesto que el desarrollo anterior es:

$$1 + 8 + 32 + 384 - (10 + 8 + 288) = 119 = 7 \bullet 17 = 7$$

*Comprobemos numéricamente que la condición es suficiente:*

Tomemos varias cifras, por ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5, 2., y formemos con ellas y en el orden dado la suma finita (2) de la forma siguiente:

$$1 - 2.2 + 2^2 \bullet 3 - 2^3 \bullet 4 + 2^4 \bullet 5 - 2^5 \bullet 2$$

Si esta suma es múltiplo de 7 (y en efecto lo es, puesto que resulta — 7), también lo será el número formado con las cifras elegidas, en el mismo orden, es decir, el número 123452 es múltiplo de 7 ($123452 = 7 \bullet 17636$). Si la suma anterior no hubiera sido un múltiplo de 7, tampoco lo habría sido el número 123452.

## 2. Otros casos

*Podemos hacernos la siguiente pregunta:* ¿Se podrán enunciar criterios de divisibilidad análogos al que hemos establecido, para otros números?

### CRITERIO DE DIVISIBILIDAD POR 17 EN UNA SUMA FINITA DE POTENCIAS DE 5

Intentemos enunciar un criterio de divisibilidad por el número **17** razonando de la siguiente forma:

Si a un número natural de varias cifras le restamos "51" (51 es múltiplo de 17) podremos razonar exactamente de la misma forma que se hizo en el caso del criterio de divisibilidad por siete, con la única diferencia que ahora, al número que resulte de suprimir la última cifra se le restaría "el quintuple de la misma", y como consecuencia de reiterar el proceso obtendríamos un *criterio de divisibilidad por 17 en una suma finita de potencias de 5.*

Luego:

$$\boxed{17 \mid x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 x_0 \rightleftharpoons 17 \mid x_5 - 5x_4 + 5^2x_3 - 5^3x_2 + 5^4x_1 - 5^5x_0}$$

*Proposición:* La condición necesaria y suficiente para que un número natural $x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_3 x_2 x_1 x_0$ sea un múltiplo de 17 es que lo sea la expresión:

$$\boxed{\sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t} 5^{n-t} x_t} \qquad (3)$$

Estudiados estos dos ejemplos se comprenderá el por qué de los siguientes enunciados relativos a "criterios de divisibilidad".

## CRITERIO DE DIVISIBILIDAD POR 3 EN UNA SUMA FINITA DE POTENCIAS DE 2

*Proposición:* La condición necesaria y suficiente para que un número natural $x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_3 x_2 x_1 x_0$ sea un múltiplo de 3 es que lo sea la expresión:

$$\boxed{\sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t} 2^{n-t} x_t} \qquad (4)$$

Como puede observarse el criterio de divisibilidad por 3 y por 7 coinciden y por ello, evidentemente, el de 21 se enunciará igual.

## CRITERIO POR 11

El lector puede comprobar que el criterio por 11, si utilizamos este método coincide con el criterio convencional de divisibilidad por 11 usado en los libros de textos de la E.G.B., puesto que sería:

*Proposición:* La condición necesaria y suficiente para que un número natural $x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_3 x_2 x_1 x_0$ sea un múltiplo de 11 es que lo sea la expresión:

$$\boxed{\sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t} x_t} \qquad (5)$$

Haciendo uso del método que se ha seguido en este trabajo se pueden construir una amplia variedad de criterios de divisibilidad por números diferentes, expresados en sumas finitas de potencias. De todos ellos los más prácticos son aquellos que tienen la base de las sucesivas potencias que aparecen en el desarrollo, *pequeña,* a pesar de lo cual nos permitimos mediante la siguiente TABLA ADJUNTA exponer algunos de los más significativos.

| CRITERIO POR | EN POTENCIAS DE: |
|---|---|
| $\rightarrow \boxed{1}\,1$ | 1 |
| $11 \mid x_n x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_3 x_2 x_1 x_0 \rightleftharpoons 11 \mid$ | $\sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t}\, 1^{n-t}\, x_t$ |
| $\rightarrow \boxed{2}\,1$ | 2 |
| $21 \mid x_n x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_3 x_2 x_1 x_0 \rightleftharpoons 21 \mid$ | $\sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t}\, 2^{n-t}\, x_t$ |
| $\rightarrow \boxed{3}\,1$ | 3 |
| $31 \mid x_n x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_3 x_2 x_1 x_0 \rightleftharpoons 31 \mid$ | $\sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t}\, 3^{n-t}\, x_t$ |
| $\rightarrow \boxed{4}\,1$ | 4 |
| $41 \mid x_n x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_3 x_2 x_1 x_0 \rightleftharpoons 41 \mid$ | $\sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t}\, 4^{n-t}\, x_t$ |
| $\rightarrow \boxed{5}\,1$ | 5 |
| $51 \mid x_n x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_3 x_2 x_1 x_0 \rightleftharpoons 51 \mid$ | $\sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t}\, 5^{n-t}\, x_t$ |
| $\rightarrow \boxed{6}\,1$ | 6 |

$$61 \mid x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_3 x_2 x_1 x_0 \rightleftharpoons 61 \mid \sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t} \, 6^{n-t} \, x_t$$

$$\rightarrow \boxed{7}\,1 \qquad\qquad 7$$

$$71 \mid x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_3 x_2 x_1 x_0 \rightleftharpoons 71 \mid \sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t} \, 7^{n-t} \, x_t$$

$$\rightarrow \boxed{8}\,1 \qquad\qquad 8$$

$$81 \mid x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_3 x_2 x_1 x_0 \rightleftharpoons 81 \mid \sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t} \, 8^{n-t} \, x_t$$

$$\rightarrow \boxed{9}\,1 \qquad\qquad 9$$

$$91 \mid x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_3 x_2 x_1 x_0 \rightleftharpoons 91 \mid \sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t} \, 9^{n-t} \, x_t$$

$$\rightarrow \boxed{10}\,1 \qquad\qquad 10$$

$$101 \mid x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_3 x_2 x_1 x_0 \rightleftharpoons 101 \mid \sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t} \, 10^{n-t} \, x_t$$

$$\rightarrow \boxed{11}\,1 \qquad\qquad 11$$

$$111 \mid x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_3 x_2 x_1 x_0 \rightleftharpoons 111 \mid \sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t} \, 11^{n-t} \, x_t$$

$$\rightarrow \boxed{12}\,1 \qquad\qquad 12$$

$$121 \mid x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_3 x_2 x_1 x_0 \rightleftharpoons 121 \mid \sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t} \, 121^{n-t} \, x_t$$

## 3. Diferentes criterios por un mismo número

Por último, digamos que el criterio de divisibilidad por un número determinado puede expresarse en diferentes desarrollos finitos de potencias del tipo (2). Por ejemplo, *el criterio de divisibilidad por 3 se puede expresar:*

a) *En potencias de 2* ($7 \bullet 3 = 2\,1$, se suprimirá la cifra de las unidades del número original y se le restaría al número resultante el doble de la misma; al reiterar el proceso quedaría un desarrollo finito en potencias de 2).

b) *En potencia de 5* ($17 \bullet 3 = 5\,1$, se suprimiría la cifra de las unidades del número original y se le restaría al número resultante el quíntuple de la misma; al reiterar el proceso quedaría un desarrollo finito en potencias de 5.)

c) *En potencias de 8* ($27 \bullet 3 = 8\,1$, se suprimiría la cifra de las unidades del número original y se le restaría al número resultante el óctuple de la misma; al reiterar el proceso quedaría un desarrollo finito en potencias de 8.)

d), e), ......

Así pues, el criterio de divisibilidad por 3 se podrá enunciar en una infinidad de desarrollos finitos del tipo (2) diferentes:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $3 \bullet 7 = \boxed{2}\,1$; | $3 \bullet 17 = \boxed{5}\,1$; | $3 \bullet 27 = \boxed{8}\,1$; | $3 \bullet 37 = \boxed{11}\,1$; | ... |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | |
| Pot. de **2.** | Pot. de **5.** | Pot. de **8.** | Pot. de **11.**, | ..... |

→ En otras palabras: El criterio de divisibilidad por **3** puede expresarse en cada uno de los desarrollos finitos de potencias, tipo (2), cuyas bases son los diferentes elementos de la sucesión:

$$2,\ 5,\ 8,\ 11, \ldots,\ 3k - 1, \ldots,$$

k entero positivo arbitrario.

De igual manera el criterio de divisibilidad por 7 lo podremos explicitar:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $7 \bullet 3 = \boxed{2}\,1$; | $7 \bullet 13 = \boxed{9}\,1$; | $7 \bullet 23 = \boxed{16}\,1$; | $7 \bullet 33 = \boxed{23}\,1$; | ... |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | |
| Pot. de **2.** | Pot. de **9.** | Pot. de **16.** | Pot. de **23.**, | ..... |

→ Es decir: **El criterio de divisibilidad por 7** puede enunciarse en cada uno de los desarrollos finitos de potencias, tipo (2), cuyas bases son los diferentes elementos de la sucesión:

$$2,\ 9,\ 16,\ 23, \ldots,\ 7k - 5, \ldots.,$$

k entero positivo arbitrario.

⟶ **El criterio por 9** podrá expresarse en cada uno de los desarrollos finitos de potencias, tipo (2), cuyas bases son los elementos de la sucesión:

$$8, 17, 26, \ldots, 9k - 1, \ldots,$$

k entero positivo.

⟶ **El criterio por 11** podrá expresarse en cada uno de los desarrollos finitos de potencias, tipo (2), cuyas bases son los elementos de la sucesión:

$$1, 12, 23, 34, 45, \ldots, 11k - 10, \ldots,$$

k entero positivo.

⟶ **El criterio por 13** podrá expresarse en cada uno de los desarrollos finitos de potencias, tipo (2), cuyas bases son los elementos de la sucesión:

$$9, 22, 35, 48, 61, \ldots, 13k - 4, \ldots,$$

k entero positivo.

⟶ **El criterio por 17** podrá expresarse en cada uno de los desarrollos finitos de potencias, tipo (2), cuyas bases son los elementos de la sucesión:

$$5, 22, 39, 56, 73, \ldots, 17k - 12, \ldots,$$

k entero positivo.

⟶ **El criterio por 19** podrá expresarse en cada uno de los desarrollos finitos de potencias, tipo (2), cuyas bases son los elementos de la sucesión:

$$17, 36, 55, 74, 93, \ldots, 19k - 2, \ldots,$$

k entero positivo.

⟶ **El criterio por 23** podrá expresarse en cada uno de los desarrollos finitos de potencias, tipo (2), cuyas bases son los elementos de la sucesión:

$$16, 39, 62, 85, 108\ldots, 23k - 7, \ldots,$$

k entero positivo.

⟶ **El criterio por 27** podrá expresarse en cada uno de los desarrollos finitos de potencias, tipo (2), cuyas bases son los elementos de la sucesión:

$$8, 35, 62, 89, 116, \ldots, 27k - 19, \ldots,$$

k entero positivo.

⟶ **El criterio por 29** podrá expresarse en cada uno de los desarrollos finitos de potencias, tipo (2), cuyas bases son los elementos de la sucesión:

$$26, 55, 84, 113, 142, \ldots, 29k - 3, \ldots,$$

k entero positivo.

⟶ **El criterio por 31** podrá expresarse en cada uno de los desarrollos finitos de potencias, tipo (2), cuyas bases son los elementos de la sucesión:

$$3, 34, 65, 96, 127, \ldots, 31k - 28, \ldots,$$

k entero positivo.

⟶ **El criterio por 33** podrá expresarse en cada uno de los desarrollos finitos de potencias, tipo (2), cuyas bases son los elementos de la sucesión:

$$23, 56, 89, 112, 155, \ldots, 33k - 10, \ldots,$$

k entero positivo.

De esta manera se podrán enunciar multitud de criterios de divisibilidad por cualquier número impar que no acabe en 5. Nótese que los criterios de estos números, más los de los números pares, no podrán expresarse mediante este método, puesto que la imposibilidad de conseguir restar del número en cuestión otro multiplo de él, y que acabe en 1, es inmediata.

Para finalizar el presente trabajo queremos dejar explicitado que muchos de los criterios definidos aquí no son prácticos por cuanto su utilización no es cómoda a la hora de realizar nuestra labor diaria como docentes. Otros, evidentemente, sí lo son. Dejamos al criterio de quien nos lea su elección. Nosotros únicamente hemos tratado de exponer a modo de "pequeña investigación" nuestras reflexiones sobre el tema.