ARTICULOS

Acerca de la Demostración en Geometría

Entre todos los estudios sobre causas y efectos naturales, la luz es lo que más deleita al espectador: y entre las características más destacadas de las Matemáticas, lo que tiende sobre todo lo demás a elevar el espíritu del investigador es la certeza de sus demostraciones.

Leonardo da Vinci.

En el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática en el nivel medio superior se ha omitido la cuestión esencial de la matemática: su carácter deductivo. Por razones más o menos evidentes el primer contacto con ella —que se produce regularmente en la niñez— adquiere una característica de mecanización que apela exclusivamente a la memoria. Efectuar operaciones matemáticas de manera automática no es algo negativo en sí mismo, incluso es algo indispensable para efectuar problemas de mayor complejidad. Sin embargo, detenerse completamente en ese aspecto no es, en modo alguno, lo más recomendable. Lo adecuado sería que a medida que el estudiante adquiere ciertas habilidades básicas se buscase superar el carácter mecánico inicial, y pasar gradualmente a un manejo más lógico de la materia. La realidad de la práctica educativa, desafortunadamente, es muy distinta. Después de que un estudiante ha concluido tres ciclos escolares (primaria, secundaria y bachillerato), todavía, se encuentra prácticamente ajeno al método de la matemática. Y con ello, con una grave deficiencia en su formación intelectual.

Un reflejo de tal situación es el sinsentido que encuentran los estudiantes en la necesidad de demostrar una proposición. En ocasiones alguna proposición parece suficientemente clara, pero en el momento de demostrar su veracidad todo el proceso se torna oscuro y complicado. Todo esto, incluso, ha llevado a los mismos profesores a interrogarse: ¿Para qué las demostraciones? La respuesta a esta cuestión se ha traducido, generalmente, en bordear el problema.

Por el contrario, el próposito de este trabajo es transitar por el tema de la demostración de las proposiciones matemáticas. Las proposiciones sobre las que nos interesa llamar la atención son las de la geometría euclideana. Esta parte de la matemática fue primera en sistematizarse de manera lógica. Los geómetras fueron los primeros seres pensantes que se preocuparon por elaborar una demostración rigurosa de sus afirmaciones. La obra que contiene la síntesis del conocimiento geómetrico de la antigüedad lleva el nombre de *Los Elementos*. Su autor fue un gran matemático de Alejandría, llamado Euclides.

En *Los Elementos* de Euclides encontramos no un conjunto de conocimientos dispersos y desordenados, sino un sistema lógico de gran perfección. Las proposiciones mediante las cuales se da cuenta del conocimiento geométrico se

Jesús Salinas

Colegio de Ciencias y Humanidades
UNAM

encuentran ordenadas y relacionadas entre sí por una estructura lógica perfecta. Tales cualidades motivaron desde la antigüedad su imitación. Y, no tan sólo en el ámbito de las ciencias sino en otras expresiones del pensamiento como, por ejemplo, en la filosofía. Baste recordar la gran valoración que sobre ella tenía uno de los más grandes filósofos que han existido, Platón; quien advertía a las puertas de su Academia, que quien quisiera entrar debía conocer la geometría. La misma advertencia sería hecha siglos más tarde por uno de los más grandes artistas del Renacimiento: Leonardo da Vinci. En sus *Cuadernos* escribe: "Que ningún hombre que no sea matemático lea los elementos de mi obra".

Así pues, la geometría euclideana ha constituido un hito en el desarrollo del pensamiento. Y toda ella descansa sobre demostraciones. Cada proposición se encuentra vinculada con otras debido a la demostración. De aquí que sin una comprensión de la demostración estaremos ajenos siempre a la esencia misma del sistema euclideano.

Si un estudiante del nivel medio superior termina sus estudios sin tener alguna comprensión de las demostraciones geométricas, tendrá todo el derecho de lamentarse de sus profesores. Si carece de un conocimiento particular de la geometría no tendrá que preocuparse demasiado, ya que, con mucha probabilidad no lo utilizará ulteriormente. Empero, si desconoce las demostraciones geométricas habrá perdido la oportunidad de conocer los mejores y más sencillos ejemplos de una demostración matemática. Desconocerá el placer intelectual de efectuar un razonamiento riguroso.

Nuestra intención no es presentar una panacea para el problema del aprendizaje de la matemática. No es defender a ultranza una metodología deductiva en la enseñanza de la matemática. Pero, tampoco es olvidarla, como está ocurriendo. Si un curso de Geometría Euclideana esta considerado dentro de la formación de un estudiante, resulta incongruente dejar totalmente de lado lo que constituye un sistema deductivo. En el presente trabajo pretendemos sensibilizar al estudiante (y al profesor) en la importancia de este tema. Y proporcionarle una exposición del mismo, que le esclarezca sus aspectos medulares.

¿Qué es una demostración?

Cuando se presenta la necesidad de convencer a alguna persona en relación a una afirmación que hacemos, buscamos sustentar ésta en una o más proposiciones que nuestro interlocutor pueda aceptar como verdaderas. De este modo, le hacemos ver que la afirmación en cuestión es consecuencia de las otras proposiciones que si puede admitir sin dificultad. Gracias a este proceso podemos convencerlo de la afirmación inicial. Esto es, hemos demostrado tal proposición. Consideremos, por ejemplo, la siguiente situación: nos encontramos conversando con un amigo, un cierto día a las 12:00 hrs. p.m. en la ciudad de Cuernavaca. Y en ese momento afirmamos que hay pocas personas en el Zócalo de la Ciudad de México. Nuestro amigo podría replicar que no debemos hacer tal afirmación, puesto que nos encontramos lejos del lugar citado y sin información directa en ese momento. Sin embargo, no sería complicado argumentar para sostener la veracidad de nuestra afirmación.

Lo que tendríamos que hacer sería formular otras proposiciones, tales que si nuestro interlocutor las aceptase como verdaderas tendría que admitir, también, la verdad de la primera proposición. Así pues, podríamos argumentar:

> En este momento son las 12:00 hrs. p.m. Si son las 12:00 hrs. p.m. entonces pocas personas van al Zócalo de la ciu-

> dad de México. Y, si en este momento pocas personas van al Zócalo de la ciudad de México entonces, en este momento, hay pocas personas en el Zócalo de la ciudad de México.

De este modo, habremos demostrado la proposición formulada.

En el caso descrito se encuentran presentes los elementos característicos de una demostración:

a. Un conjunto de proposiciones que sirven de apoyo para convencer a nuestro interlocutor.
b. Un procedimiento lógico que nos permite encadenar adecuadamente tales proposiciones y que nos conduce de unas a otras hasta la aseveración inicial.

A lo primero le damos el nombre de premisas del razonamiento y, a lo segundo le llamamos deducción. Tal proceso es típico de toda demostración, ya se trate de física, matemáticas o, cualquier otra ciencia.

Puede observarse que de hecho las premisas forman parte de la deducción, es decir, se suponen en la demostración. Si consideramos que son verdaderas, el procedimiento lógico que nos permite encadenarlas hasta la conclusión nos garantiza, también, la verdad de esta última. Tal procedimiento lógico se encuentra sustentado por reglas de inferencia. Estas reglas nos aseguran que los pasos de nuestro razonamiento son correctos. El principio central de tales reglas es que nos permiten pasar de proposiciones verdaderas a otra proposición verdadera, jamás nos conducirían de proposiciones verdaderas a una falsa. En particular, en el ejemplo presentado arriba estamos utilizando una regla de inferencia que se conocía desde la antigüedad y que los escolásticos llamaron *modus ponens*. Esta regla señala que si tenemos una proposición condicional, es decir, una proposición del siguiente tipo:

> Si son las 12:00 hrs. p.m. entonces pocas personas van al Zócalo de la ciudad de México.

y además tenemos la proposición que está como antecedente en la proposición condicional, es decir:

> son las 12 hrs. p.m.;

entonces podemos concluir la proposición que está como consecuente de la proposición condicional, esto es:

> pocas personas van al Zócalo de la ciudad de México.

De manera esquemática podemos representar lo comentado:

$p \rightarrow q$	(Si son las 12:00 hrs. p.m. entonces pocas personas van al Zócalo de la ciudad de México)
p	(Son las 12:00 hrs. p.m.)
q	(pocas personas van al Zócalo de la ciudad de México).

donde: p = son las 12:00 hrs. p.m.
q = pocas personas van al Zócalo de la ciudad de México.
$\rightarrow$ = Si... entonces...

De acuerdo a la simbolización que hemos adoptado, podemos simbolizar todas las premisas de nuestro ejemplo:

p
$p \rightarrow q$
$q \rightarrow r$

donde r = hay pocas personas en el Zócalo de la ciudad de México.

El razonamiento completo queda:

1 p
2 $p \rightarrow q$
3 $q \rightarrow r$
___
4 q (m.p.) 1,2
5 r (m.p.) 3,4

Las proposiciones 1, 2 y 3 son las premisas. La proposición 4 se obtuvo al aplicar la regla *modus ponens* (m.p.) con las proposiciones 1 y 2. La proposición 5 se obtuvo al aplicar la misma regla con las proposiciones 3 y 4. La proposición 5 es la conclusión del razonamiento y la proposición que deseábamos demostrar.

Es importante percatarse de la diferencia entre una demostración lógica y una constatación empírica. Lo que hemos ilustrado es cómo se demuestra lógicamente una proposición. No hemos efectuado una constatación empírica de la misma (lo cual, en el ejemplo presentado, sería imposible). No se está afirmando que no haya habido y no habrá muchas personas en el lugar y la hora señalada. Sino que, por el contexto particular, si nuestro interlocutor acepta la suficiente plausibilidad de nuestras premisas y concede su verdad, entonces habremos demostrado la verdad de la proposición inicial. Siempre que argumentamos a favor de alguna proposición tenemos que apoyarnos en otros enunciados. La verdad de tales enunciados es algo que se supone en la argumentación, puede deberse a que resultan plausibles, intuitivamente aceptables, o se hayan demostrado previamente. Lo importante de una demostración lógica es, precisamente, la garantía que nos brinda de transmitir la verdad de las premisas a la conclusión. En el caso de la geometría, la verdad que el método deductivo filtra a todo el sistema procede de los axiomas. Estos se aceptan como verdaderos por definición.

La demostración que hemos efectuado es una demostración directa. La llamamos así porque vamos de manera directa de las premisas a la conclusión. En ocasiones este tipo de demostraciones no resultan. Entonces es necesario efectuar una especie de rodeo para llegar a la conclusión deseada, es decir, es necesario desarrollar una demostración indirecta (llamada también "por reducción al absurdo"). El procedimiento se conduce de acuerdo con las siguientes indicaciones:

1° Suponer lo contrario de lo que se desea demostrar;
2° Deducir, a partir de tal supuesto, una contradicción;
3° Rechazar, por conducir a una contradicción, dicho supuesto; y
4° Afirmar, por lo tanto, lo que se deseaba demostrar.

En la lógica una contradicción es inadmisible (la forma característica de una contradicción es $P \wedge -P$, es decir, afirmar y negar la misma proposición al mismo tiempo). Por tanto, si una proposición conduce a una contradicción, debe ser rechazada. Esta es la idea fundamental que sustenta al método de demostración indirecto.

Por ejemplo, demostremos por reducción al absurdo que la conclusión del siguiente razonamiento es consecuencia lógica de sus premisas:

> Si el sol no tiene luz propia entonces es un planeta. Pero, el sol no es un planeta. Por lo tanto, el sol tiene luz propia.

Las premisas del razonamiento son:

— Si el sol no tiene luz propia entonces es un planeta
— El sol no es un planeta.

La conclusión es:

> El sol tiene luz propia.

Sigamos las indicaciones que se han establecido.

1° Supongamos como verdadero que el sol no tiene luz propia, lo cual es lo contrario de lo que deseamos demostrar.
2° De el supuesto que el sol no tiene luz propia y, considerando la pri-

mer premisa, tenemos que el sol es un planeta, es decir:

Si el sol no tiene luz propia entonces es un planeta. (Primer premisa)
El sol no tiene luz propia
________ (Proposición supuesta)
El sol es un planeta

Puede observarse que hemos aplicado la regla de inferencia, que ya habíamos comentado (*modus ponens*).

Sin embargo, la proposición que hemos obtenido y la segunda premisa nos plantean una contradicción:

El sol es un planeta y el sol no es un planeta.

Con esto, hemos realizado el 2o. paso.

3° Puesto que la proposición que hemos supuesto: "el sol no tiene luz propia", nos ha conducido a una contradicción, entonces no la podemos aceptar. Se tiene que rechazar.

4° La manera de rechazar una proposición es aceptar su contraria. La proposición contraria de "el sol no tiene luz propia" es "el sol tiene luz propia". Esta última proposición es, entonces, la que podemos afirmar. Con ello, la hemos demostrado por reducción al absurdo.

¿Para qué hace falta la demostración?

Todo discurso científico busca establecer un sistema coherente de proposiciones que den cuenta de su objeto de estudio. Es de interés, por supuesto, que tales proposiciones sean verdaderas. No tendría sentido preocuparse por elaborar proposiciones falsas. La cuestión de cómo construye sus conocimientos una ciencia escapa a toda receta. Tal actividad demanda ciertas cualidades como creatividad, imaginación, intuición, etc. Además, cada ámbito científico posee sus propias particularidades. No obstante la gran importancia de este aspecto psicológico del conocimiento, su discusión se encuentra fuera del propósito del tema que nos interesa.

Ahora bien, una vez que se ha dado esta etapa de invención o construcción de un conocimiento, es necesario darle una justificación lógica. En el caso de la matemática es particularmente importante esto. Una proposición matemática no se comprueba en la experiencia. Su exactitud es inalcanzable por toda prueba experimental. En consecuencia, la verdad de una proposición matemática es independientemente de su correspondencia con el mundo exterior. Su verdad es de carácter lógico, depende de la coherencia interna del sistema en que se encuentre. Su demostración lógica es lo único que nos puede garantizar su verdad.

Consideremos la siguiente proposición:

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

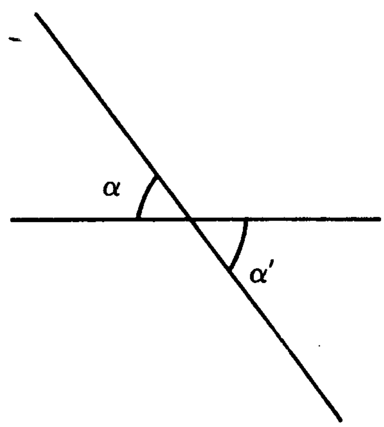

Fig. I

Si quisiéramos constatar la veracidad de esta afirmación de manera experimental o práctica, dibujaríamos una figura (por ejemplo, la Fig. I) y, mediríamos dichos ángulos.

Para tal medición necesitaríamos algún instrumento, por ejemplo un transportador. Es claro, que cuanto mejor fuese nuestro instrumento de medición, más precisa sería nuestra medida. Empero, no resulta difícil percatarse que en todo proceso de medición sólo podemos hablar de modo aproximado. Sólo es factible obtener una medida mejor que otra, pero, nunca una medida exacta.

Además, la proposición anotada no se refiere exclusivamente a la figura presentada. Es igualmente válida si el dibujo fuese más pequeño o más grande, de unos cuantos milímetros o de muchos metros (y la constatación empírica se complicaría aún más). Tal proposición refiere una propiedad geométrica general, no relativa a determinada figura particular. Por tal motivo, su demostración sólo puede ser lógica.

Demostración:

a.- $\alpha + \beta = 180^o$
b.- $\alpha' + \beta = 180^o$
a.- $\alpha + \beta = \alpha' + \beta$
d.- $\alpha = \alpha'$

a.- *De la Fig. II, se puede observar que, independientemente del valor particular que puedan tener α y β, $\alpha + \beta = 180^o$. La suma de los ángulos α y β es equivalente a si trazáramos media circunferencia, porque estamos considerando la abertura entre dos puntos de la misma recta ℓ.* Esto es cierto para toda figura que podamos dibujar o incluso sólo pensar. Y no necesitamos efectuar medición alguna.

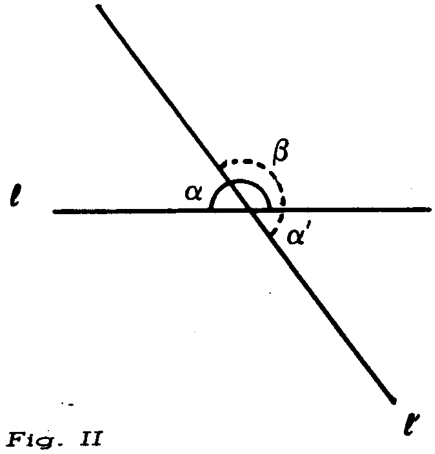

Fig. II

b.- Considerando ahora la recta ℓ' y por una argumentación análoga a la anterior, tenemos:

$$\alpha' + \beta = 180^o.$$

c.- Puesto que $\alpha' + \beta$ están denotando la misma cantidad, a saber, 180^o; entonces son iguales entre sí.

d.- Finalmente, dado que β está sumándose de ambos lados de la igualdad, su cancelación no altera en absoluto la igualdad; por tanto:

$$a = \alpha'$$

Así pues, podemos observar que una proposición matemática no se comprueba en la experiencia sino que se demuestra por una justificación lógica.

Sin embargo, cabe la pregunta; ¿Todo en la matemática se demuestra? Su respuesta es no. Es necesario aceptar cosas sin demostración. Abordemos esta cuestión enseguida.

¿Qué puede admitirse sin demostración?

Hemos señalado que para demostrar una proposición es necesario deducirla de otra(s). Resulta natural pensar que para estar seguros de las proposiciones que nos sirven de apoyo en la demostración es necesario, así mismo, demostrarlas. Esto significa que tendríamos que apelar a otras proposiciones, y así sucesivamente. Pero, a través de un proceso de este tipo, finalmente, no podríamos demostrar nada (a esto se le denomina "regreso al infinito").

La única salida de esta situación es no pretender demostrar todo. Es necesario asumir ciertas proposiciones sin demostración. Sin tales proposiciones se tendría un regreso al infinito o una circularidad viciosa y, en consecuencia, no sería posible una sistematización lógica del conocimiento. A tales proposiciones les llamamos axiomas o postulados.

Es muy importante entender la necesidad de aceptar proposiciones sin demostrar. Algo análogo sucede respecto al significado de las palabras que usamos. Las proposiciones son afirmaciones. En ellas indicamos propiedades de objetos o relaciones entre objetos. Pero, es necesario distinguir dos tipos de términos: términos primitivos y términos definidos. Los primeros no se definen, se dan por conocidos de alguna manera. Los segundos, se dan por definición sobre la base de los términos indefinidos o primitivos. Sería imposible definir todos los términos en función de otros. Sería como tener un diccionario con un vocabulario infinito.

Así pues, la idea fundamental que inspira a la geometría euclideana es que a partir de ciertas proposiciones que se consideran verdaderas, los axiomas, se pueden deducir otras proposiciones. Es así como tomando como pilares a los axiomas, se construye el sistema de la geometría euclideana.

¿Cómo se hace una demostración?

Esta cuestión ya ha sido abordada, pero es importante añadir algunas observaciones más. Esto nos permitirá redondear (aunque sea, por motivos de extensión, de modo muy breve) la idea de la demostración en geometría. Hemos establecido que una demostración consta de una serie de pasos lógicos que llamamos deducción. Y, que es correcta o incorrecta según lo sean los pasos efectuados. Una primera observación, que podemos hacer en relación a las demostraciones realizadas aquí es:

> podemos efectuar demostraciones sin auxiliarnos de alguna imagen gráfica, o bien, otras demostraciones requieren una imagen gráfica para su realización.

El primer ejemplo que vimos no es una demostración geométrica, sin embargo, se presentan frecuentemente demostraciones de este tipo —que no requieren una imagen gráfica para seguir la deducción— en geometría. Son demostraciones en las que nos remitimos a enlazar lógicamente nuestras premisas para llegar a la conclusión, requerimos sólo de algunos esquemas de razonamiento. Por ejemplo, para demostrar la proposición:

Todos los cuadrados son cuadrilátero con diagonales iguales, es suficiente disponer de las siguientes premisas:

1° Todos los rectángulos son cuadriláteros con diagonales iguales, y
2° Todos los cuadrados son rectángulos.

En dicha demostración estamos utilizando el siguiente esquema de razonamiento:

$$\begin{array}{l} \text{Todo M es P} \\ \underline{\text{Todo S es M}} \\ \text{Todo S es P} \end{array} \qquad \text{(A)}$$

donde las letras M, P y S representan clases:

S — cuadros
M — rectángulos
P — cuadriláteros que tienen iguales sus diagonales.

El esquema (A) lo podemos representar gráficamente.

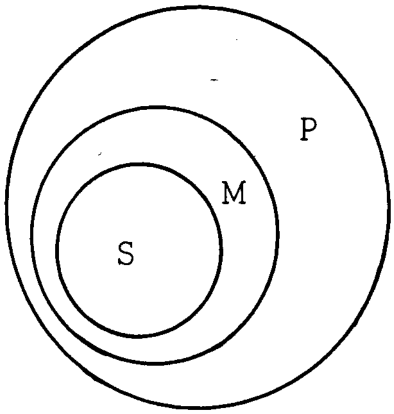

Fig. III

Es claro en la ilustración que, todo elemento de la clase S es elemento de la clase M, y todo elemento de la clase M es elemento de la clase P. Por tanto, todo elemento de la clase S es elemento de la clase P.

Otro ejemplo, la proposición:

> Ningún paralelogramo oblicuángulo es una figura que se puede inscribir en una circunferencia.

se demuestra a partir de las siguientes premisas:

1° Ningún cuadrilatero que tenga la suma de los ángulos opuestos diferente de 180° es una figura que se puede inscribir en una circunferencia.

2° Todo paralelogramo oblicuángulo es un cuadrilátero que tiene la suma de sus ángulos opuestos diferente de 180°.

El esquema de razonamiento es:

Ningún M es P
Todo S es M (B)
―――――――――
Ningún S es P

donde las clases que representamos son:

M cuadriláteros que tiene la suma de los ángulos opuestos diferente de 180°.

S paralelogramos oblicuángulos.

P figuras que se pueden inscribir en una circunferencia.

El esquema de razonamiento (B) se representa gráficamente como sigue:

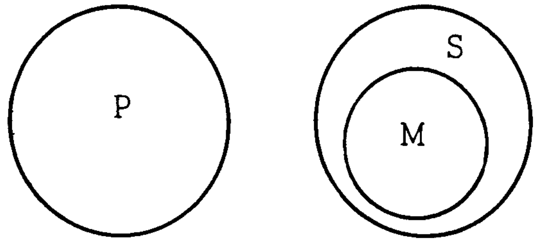

Fig. IV

Se indica, ningún elemento de la clase M es elemento de la clase P, todo elemento de la clase S es elemento de la clase M. Por tanto, ningún elemento de la clase S es elemento de la clase P.

Los esquemas de razonamiento (A) y (B) son conocidos desde la antigüedad. No obstante que disponemos de muchos esquemas similares, llamados silogismos, los dos ejemplificados son particularmente importantes. Una gran cantidad de deducciones en geometría los utiliza.

La presentación gráfica de las demostraciones anteriores no sólo aporta un apoyo intuitivo a nuestro razonamiento, sino que también —lo cuál es muy importante— nos auxilia para describir un error en algún razonamiento. Por ejemplo, consideremos el siguiente razonamiento:

1° Todos los ángulos adyacentes son suplementarios

Premisas

2° Dos ángulos dados son suplementarios.

―――――――――

Los ángulos dados son adyacentes. Conclusión

M — ángulos adyacentes.
P — ángulos suplementarios
S — ángulos dados.

La premisa 1 indica:

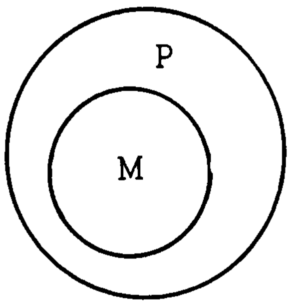

Fig. V

La premisa 2 indica:

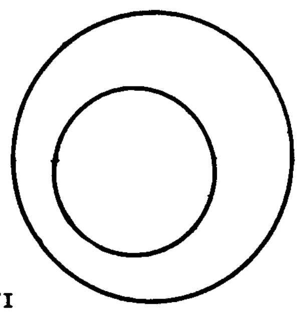

Fig. VI

puede observarse que hemos representado cómo se encuentran relacionadas entre sí las clases M P y P S, sin embargo, no podemos concluir algo sobre S y M; puesto que no conocemos su dependencia.

Veamos ahora otro tipo de demostraciones en las cuales no podemos realizar la deducción sin, paralelamente, ir haciendo una construcción geométrica. En estas demostraciones la intuición geométrica juega un papel central. Consideremos la famosa proposición:

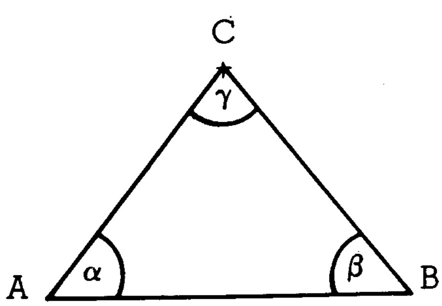

Fig. VII

La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Demostración:

Sea el triángulo ABC de la fig. VII. Queremos ver que se cumple que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

1. Prolongamos el lado AB hasta el punto X.
2. Por el vértice B trazamos una paralela al lado AC. Fig. VIII
3. Considerando la transversal CB respecto de los segmentos paralelos AC y BY, obtenemos $\gamma = \gamma'$ por ser ángulos alterno-internos. Fig. IX.
4. Considerando ahora la transversal AX respecto de los segmentos paralelos AC y BY, tenemos que $\alpha = \alpha'$ por ser ángulos correspondientes. Fig. X.
5. De la Fig. XI es claro que $\alpha' + \beta + \gamma = 180°$, pero, puesto que $\alpha' = \alpha$ y $\gamma' = \gamma$ entonces sustituyendo tenemos.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

lo cual se deseaba demostrar.

Recuérdese que para efectuar alguna demostración es necesario apoyarse en algunas proposiciones que llamamos premisas del razonamiento. Estas pueden ser axiomas (o postulados) u otras proposiciones ya demostradas —que llamamos teoremas— Veamos la justificación de la demostración anterior.

El paso 1 se encuentra apoyado en el postulado II de la geometría euclideana que establece que es posible prolongar en línea recta un segmento. El paso 2 se sustenta en un teorema que afirma, que por un punto dado se puede trazar una recta paralela a otra recta dada. Obsérvese que estos dos pasos no alteran en absoluto al triángulo dado, son trazos auxiliares que nos permiten construir la demostración. Sin ellos no hubiera sido posible demostrar la proposición que nos interesaba. Só-

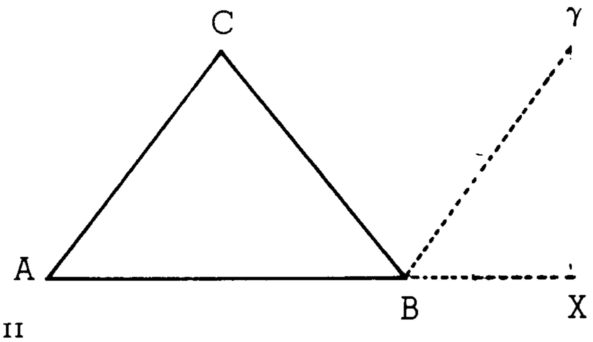

Fig. VIII

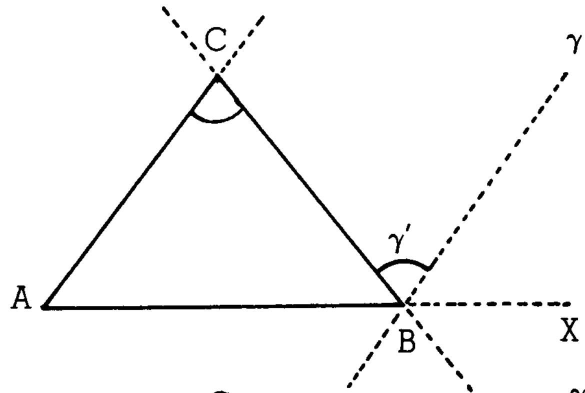

Fig. IX

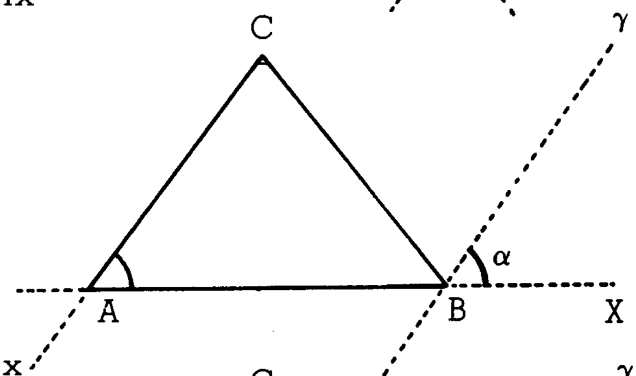

Fig. X

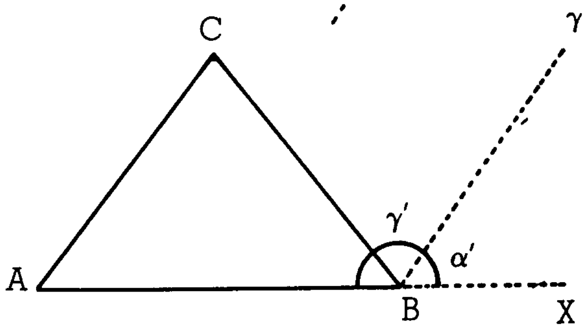

Fig. XI

lo a partir de esta construcción, es posible detectar relaciones geométricas entre ángulos y lados que nos orienten hacia nuestra meta. Así, el paso 3 consiste en reconocer de la construcción hecha, que los ángulos alterno-internos señalados son iguales por un teorema de paralelismo, Y, análogamente con el paso 4. Finalmente, se puede reconocer que los tres ángulos adyacentes que tienen como base AX son suplementarios es decir, suman 180°; y se efectúa la situación pertinente.

Puede observarse que la proposición que se demostró se encuentra vinculada de manera lógica con otras (incluso otras que no fueron explicitadas). Esto es lo característico de la geometría euclideana. No tenemos una colección azarosa de proposiciones sino un sistema de conocimientos construidos con apego estricto a las leyes de la lógica. De aquí la importancia de entender el método deductivo, el método de la matemática.

Por otro lado, es patente el importante papel que ha jugado la imagen gráfica en la demostración. La figura dibujada es una especie de detonador de nuestra intuición que nos impulsa en la construcción de la deducción. Este tipo de demostraciones son las más características de la geometría euclideana, demostraciones en las que es más importante hacer construcciones, dibujar líneas auxiliares; que elaborar cadenas de inferencias formales. Por supuesto, en el proceso subyace un razonamiento lógico, pero éste se encuentra iluminado por la intuición.

Cabe la pregunta: ¿cómo —a partir de las condiciones de una proposición por demostrar— podemos saber el tipo de trazos auxiliares que hay que hacer, el tipo de deducción que es necesario desarrollar? Para esto no hay recetas. En álgebra sí disponemos de algoritmos para resolver problemas. Mediante un procedimiento analítico deducimos todas las reglas del juego. La demostración en geometría procede de una manera sintética: por construcción. Nuestra brújula es la intuición y nuestro barco el pensamiento lógico.

Debemos tener en buenas condiciones ambos. Lo que se puede hacer es acercarse más al trabajo geométrico. Creemos que las reflexiones que hemos señalado aquí, aunque de manera muy sonora, proporcionan una orientación en este camino.