ARTICULOS

Álgebra Lineal con Números Enteros

Resumen. Se presenta un algoritmo de eliminación para encontrar la solución exacta de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con elementos enteros. El método es un auxiliar adecuado en la enseñanza del álgebra lineal. Se incluyen las aplicaciones siguientes:

- Evaluación del determinante de una matriz entera.
- Computación exacta de la inversa de una matriz entera.
- Generación de una matriz entera con determinante dado.
- Construcción de una matriz y de su inversa con elementos enteros.
- Generación de una matriz entera con valores y vectores propios enteros.

1 Introducción

En este trabajo queremos abordar dos problemas que se presentan en el álgebra lineal y en su enseñanza, y para ello al hacer referencias a matrices y sistemas de ecuaciones, asumiremos que están formadas de elementos enteros.

- El primer problema se refiere a la obtención de la solución exacta de un sistema de ecuaciones lineales con elementos enteros. Otras dos cuestiones relacionadas con este problema, son la evaluación del determinante y de la inversa de una matriz con coeficientes enteros.
  Un sistema de ecuaciones con elementos enteros tiene solución racional (suponiendo que tiene solución única); basta con recordar la regla de Cramer para convencerse de ello. Las soluciones del sistema están dadas por

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \; i = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

  siendo A_i la matriz que resulta de sustituir la i-ésima columna de la matriz de coeficientes A, por el lado derecho del sistema de ecuaciones.

M.C. Daniel Gómez García

Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Coahuila; Saltillo, Coah. México.

Dr. Humberto Madrid de la Vega

Escuela de Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila; Saltillo, Coah. México.

Si A es una matriz invertible con elementos enteros, su inversa A^{-1} tiene elementos racionales puesto que

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)},$$

donde adj(A) es la matriz cuyo elemento (i, j) es $a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$ el determinante que resulta de eliminar el renglón j y la columna i de la matriz A, así que adj(A) tiene elementos enteros y el determinante de la matriz A, det(A) también es entero.

La solución de un sistema de n ecuaciones usando la regla de Cramer requiere de la evaluación de $n + 1$ determinantes de orden n. Para la inversión matricial por medio de la matriz adjunta, es necesario calcular n^2 determinantes de orden $n - 1$ y uno de orden n. Esto representa una cantidad considerable de operaciones, por lo que dichos métodos resultan imprácticos. Por ejemplo, la evaluación del determinante de una matriz de orden n, usando la expansión por menores, requiere del cálculo de n determinantes de orden $n - 1$, y cada uno de éstos precisa de la evaluación de $n - 1$ determinantes de orden $n - 2$, y así sucesivamente. Es evidente que el número de operaciones guarda relación con el factorial de n. Alguien pudiera pensar que aún cuando ésta es una cantidad considerable de operaciones, bastaría con hacer uso de la computadora, y el problema estaría resuelto. Esta apreciación sería engañosa, veamos por qué: la evaluación de un determinante de orden n necesita.

$$M(n) = \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right) n!$$

multiplicaciones, es decir $n! < M(n) < (e - 1)n!$, donde $e = 2.71828\ldots$, como se muestra en [1].[3]

La supercomputadora CRAY X-MP-4, que es de las más veloces en la actualidad, y que puede realizar 1,000'000,000 de multiplicaciones por segundo, tardaría ¡más de 132 años en evaluar un determinante de orden 20! La solución de un sistema de 20 ecuaciones ¡requeriría casi 28 siglos, y la inversión de esa matriz tardaría el mismo tiempo!

Un método clásico, que se utiliza normalmente para abordar los problemas anteriores, es el denominado **Eliminación de Gauss**. Este procedimiento es muy económico: requiere $(n^3 + 2n - 3)/3$ multiplicaciones para evaluar un determinante de orden n. Para calcular un determinante de orden 20, se necesitan solamente 2679 multiplicaciones. La computadora mencionada anteriormente efectúa estas operaciones ¡en una fracción de segundo! Lo mismo ocurre con la solución de un sistema de 20 ecuaciones y la inversión de una matriz de orden 20.

En cada paso, el método de Gauss necesita la evaluación de un cociente de números enteros. Desde el punto de vista de la enseñanza, esto presenta un inconveniente, porque requiere del uso de decimales o bien de fracciones.

[3] Las referencias bibliográficas, numeradas entre paréntesis rectangulares, aparecen al final del artículo.

Por todo lo expresado anteriormente, sería deseable disponer de un método —resultante de modificar el de Gauss— que en cada paso usara únicamente operaciones con números enteros.

- Para fines didácticos, es conveniente disponer de ejemplos cuyos datos sean números enteros y su solución se exprese mediante números enteros. Por ejemplo, encontrar una matriz de orden dado con elementos enteros, tal que su inversa también tenga elementos enteros.

Presentaremos una forma de enfrentar los problemas anteriores a partir de dos algoritmos fundamentales, que se muestran en las dos secciones siguientes.

2 Algoritmo D.G.O.

Este algoritmo fue desarrollado en 1976 por uno de los autores, quien lo presentó en 1984 en el XVIII Congreso Nacional de Matemáticas [2]. Permite resolver sistemas de ecuaciones lineales con elementos enteros, usando solamente aritmética entera.
Introduciremos el procedimiento a través de ejemplos, ofreciendo algunas versiones del mismo.

Primera versión.
Para empezar, veamos lo que ocurre al resolver el sistema de tres ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Por comodidad operaremos con su matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

reduciéndola por medio de la eliminación algebraica de resta, manipulándola de la forma usual, es decir, llevando la matriz de coeficientes a una forma triangular.
Para tal efecto, realizamos las operaciones siguientes:

(a) Restamos la primera ecuación, al triple de la segunda ecuación.
(b) Restamos el cuádruple de la primera ecuación, al triple de la tercera ecuación:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & 7 & 9 \\ 0 & -14 & 13 & 12 \end{array}\right).$$

En esta primera eliminación se puede ver que aparte de los ceros, sólo seis elementos cambiaron de valor, por lo que podemos escribir la información anterior en una forma compacta:

$$\begin{array}{|ccc|c|} \boxed{3} & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -4 \\ \hline & -5 & 7 & 9 \\ & -14 & 13 & 12 \\ \hline \end{array} \tag{3}$$

Si se denominan **pivotes** a los elementos que van quedando sobre la diagonal principal, entonces los valores que cambiaron, excepto los ceros, se pueden expresar mediante seis determinantes de orden dos, que involucran en cada caso a los cuatro elementos que están en el renglón y en la columna del pivote $\boxed{3}$, y en los renglones y columnas restantes. Estos determinantes se muestran a continuación

$$-5 = \begin{vmatrix} \boxed{3} & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad 7 = \begin{vmatrix} \boxed{3} & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 9 = \begin{vmatrix} \boxed{3} & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$-14 = \begin{vmatrix} \boxed{3} & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, \quad 13 = \begin{vmatrix} \boxed{3} & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad 12 = \begin{vmatrix} \boxed{3} & -6 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}.$$

(c) Multiplicamos la tercera ecuación por -5, y le restamos la segunda ecuación multiplicada por -14:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & 7 & 9 \\ 0 & -14 & 13 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 33 & 66 \end{array}\right). \tag{4}$$

Sin contar el cero, sólo dos elementos cambiaron de valor, por lo que la segunda eliminación se puede escribir también en forma compacta:

$$\begin{array}{|cc|c|} \hline \boxed{-5} & 7 & 9 \\ -14 & 13 & 12 \\ \hline & 33 & 66 \\ \hline \end{array} \tag{5}$$

y los valores que cambiaron, excepto el cero, se pueden expresar mediante dos determinantes de orden dos:

$$33 = \begin{vmatrix} \boxed{-5} & 7 \\ -14 & 13 \end{vmatrix}, \quad 66 = \begin{vmatrix} \boxed{-5} & 9 \\ -14 & 12 \end{vmatrix}.$$

(d) Para concluir, resolvemos en orden regresivo el sistema (4), que equivale a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -6 \\ -5x_2 + 7x_3 &= 9 \\ 33x_3 &= 66 \end{aligned}$$

De la tercera ecuación se obtiene $x_3 = 2$.

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación, resulta $x_2 = 1$.
Al reemplazar x_1 y x_2 en la primera ecuación, se encuentra que $x_1 = -2$.
Como los sistemas (2) y (4) son equivalentes, hemos obtenido la solución deseada

$$x_1 = -2, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 2.$$

El procedimiento con el que se obtuvo la solución anterior se puede presentar en forma reducida mediante dos etapas: la primera, eliminación, formando el arreglo compacto, sobreponiendo los dos arreglos (3) y (5); la segunda, sustitución regresiva, despejando algebraicamente en las ecuaciones pivotales, que corresponden a los renglones de la matriz del lado derecho en (4), quedando resumida la información de la forma siguiente:

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline \boxed{3} & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -4 \\ \hline & \boxed{-5} & 7 & 9 \\ & -14 & 13 & 12 \\ \hline & & 33 & 66 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 = -2, \\ \\ \\ x_2 = \;\;1, \\ \\ x_3 = \;\;2. \end{array} \tag{6}$$

En el proceso de eliminación anterior se puede observar que para una posición dada del pivote a_{pp}, $p = 1,2, \ldots, n - 1$, siendo n el número de ecuaciones, sólo es necesario modificar los elementos que están situados a la derecha y abajo del pivote, es decir, los renglones $i = p + 1, p + 2,\ldots, n$, y las columnas $j = p + 1, p + 2,\ldots, n$, así como la columna del lado derecho.
También se observa que la sustitución regresiva se desarrolla sistemáticamente con las ecuaciones pivotales, despejando la variable x_i de las ecuaciones $i = n, n - 1,\ldots,1$.
Generalizando el procedimiento anterior, el sistema de n ecuaciones con solución única:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right), \tag{7}$$

se puede resolver con el siguiente algoritmo:

Primera versión del D.G.O.

$p = 1,2,\ldots,n - 1$

$i = p + 1, p + 2,\ldots,n$

$$a_{ij} \leftarrow \begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pj} \\ a_{ip} & a_{ij} \end{vmatrix}, \; j = p + 1, p + 2,\ldots,n$$

$$b_i \leftarrow \begin{matrix} a_{pp} & b_p \\ a_{ip} & b_i \end{matrix}$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right\}$$

Segunda versión.

En la segunda etapa del algoritmo anterior es necesario dividir entre a_{ii}, que en consecuencia debe ser no nulo. No obstante, pueden presentarse algunas dificultades, como se aprecia en el ejemplo siguiente, donde sólo se muestra el arreglo compacto de la matriz aumentada.

	$\boxed{7}$	0	2	1	0	$x_1 = 0,$	
	3	0	0	−1	−2		
	1	0	3	−1	−5		
	2	1	−2	−2	0		
pivote nulo →		0	−6	−10	−14		
		0	19	−8	−35		
		7	−18	−16	0		
renglones →		7	$\boxed{-18}$	−16	0	$x_2 = 2,$	(8)
		0	19	−8	−35		
intercambiados →		0	−6	−10	−14		
			$\boxed{133}$	−56	−245	$x_3 = -1,$	
			−42	−70	−98		
				−11662	−23324	$x_4 = 2.$	

Al intentar la segunda eliminación se tiene un pivote cero, por lo que es necesario permutar las ecuaciones segunda y cuarta, llevando a la posición del pivote un elemento no nulo. Esto es posible, ya que siendo sistemas equivalentes, la permutación de las ecuaciones no modifica la solución de las mismas.

En general, siempre que se tenga un pivote igual a cero, se busca hacia abajo en la columna del pivote hasta encontrar un elemento diferente de cero, el que es llevado a la posición del pivote por medio de la permutación de los renglones correspondientes. Es decir, si en algún paso el elemento pivote a_{pp} es cero, entonces se permutan los renglones p y k, donde $p < k \leq n$ y $a_{kp} \neq 0$. Si el sistema tiene solución única, la existencia de tal $a_{kp} \neq 0$ está garantizada. Esta posibilidad de intercambiar renglones se incluye en la versión siguiente del algoritmo:

Segunda versión del D.G.O.

$p = 1,2,\ldots,n-1$

si $a_{pp} = 0$, intercambiar los renglones p y k,
con $a_{kp} \neq 0$, $p < k \leq n$
$i = p+1, p+2,\ldots,n$

$$a_{ij} \leftarrow \begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pj} \\ a_{ip} & a_{ij} \end{vmatrix}, \; j = p+1, p+2,\ldots,n$$

$$b_i \leftarrow \begin{vmatrix} a_{pp} & b_p \\ a_{ip} & b_i \end{vmatrix}$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$i = n-1, n-2,\ldots,1$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \quad b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j$$

Tercera versión.

El algoritmo anterior resulta conveniente en sistemas pequeños. Pero hay sistemas en los cuales los elementos crecen en valor absoluto de una forma indeseable, en cuyo caso resulta útil efectuar un escalamiento de los valores que permita reducir su magnitud. Uno de los procedimientos de escalamiento consiste en dividir cada valor obtenido durante la primera etapa, entre el pivote anterior; manteniéndose la aritmética entera [2]. Por congruencia se define $a_{00} = 1$. Para mostrar el uso del algoritmo, se resuelve el ejemplo dado por (2), utilizando un arreglo compacto:

$$\begin{array}{|rrrr|} \hline \boxed{3} & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -4 \\ \hline & \boxed{-5} & 7 & 9 \\ & -14 & 13 & 12 \\ \hline & & 11 & 22 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 = -2, \\ \\ \\ x_2 = 1, \\ \\ x_3 = 2. \end{array} \tag{10}$$

Los valores de la primera etapa están dados abajo:

$$-5 = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{3} & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{1}, \quad 7 = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{3} & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{1}, \quad 9 = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{3} & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{1},$$

$$-14 = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{3} & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\;}, \qquad 13 = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{3} & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{1}, \qquad 12 = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{3} & -6 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}}{1 \quad 1}$$

$$11 = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{-5} & 7 \\ -14 & 13 \end{vmatrix}}{3}, \qquad 22 = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{-5} & 9 \\ -14 & 12 \end{vmatrix}}{3}$$

Al confrontar los arreglos (6) y (10), vemos que sólo se redujo el último renglón de (10). Sin embargo, en sistemas más grandes la reducción que se obtiene puede ser notable.

El lector puede verificar que la solución del ejemplo dado en (8), mediante la aplicación del algoritmo (9) produce el arreglo compacto siguiente:

	$\boxed{7}$	0	2	1	0	$x_1 = 0,$	
	3	0	0	−1	−2		
	1	0	3	−1	−5		
	2	1	−2	−2	0		
pivote nulo →		0	−6	−10	−14		
		0	19	−8	−35		
		7	−18	−16	0		(11)
renglones →		$\boxed{7}$	−18	−16	0	$x_2 = 2,$	
		0	19	−8	−35		
intercambiados →		0	−6	−10	−14		
			$\boxed{19}$	−8	−35	$x_3 = -1,$	
			−6	−10	−14		
				−34	−68	$x_4 = 2.$	

Como se puede observar, el arreglo con escalamiento (11) muestra una clara ventaja sobre el arreglo sin escalamiento (8).

Añadiendo estas ideas de escalamiento, la tercera versión del procedimiento se puede expresar de la forma:

Tercera versión del D.G.O.

$a_{00} = 1$

$p = 1,2,\ldots,n-1$

si $a_{pp} = 0$, intercambiar los renglones p y k,

con $a_{kp} \neq 0$, $p < k \leq n$

$i = p+1, p+2,\ldots,n$

$$a_{ij} \leftarrow \frac{\begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pj} \\ a_{ip} & a_{ij} \end{vmatrix}}{a_{p-1,\,p-1}}, \; j = p+1, p+2,\ldots,n$$

$$b_i \leftarrow \frac{\begin{vmatrix} a_{pp} & b_p \\ a_{ip} & b_i \end{vmatrix}}{a_{p-1,p-1}}$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$i = n - 1, n - 2, \ldots, 1$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right\}$$

Versión definitiva.

Los ejemplos presentados hasta ahora han sido escogidos de tal manera que tienen solución entera. En general, las soluciones x_i serán racionales, como lo establece la regla de Cramer (1), y en consecuencia pueden aparecer fracciones en la sustitución regresiva. Esto representa un inconveniente que se puede evitar mediante la modificación de la sustitución regresiva de forma tal que se mantenga la aritmética entera, como se aprecia en el ejemplo siguiente.
Ejemplo. Sustitución regresiva entera y solución racional:

$\boxed{3}$	2	1	1	11(1)
1	−1	2	0	
4	−2	3	0	
	$\boxed{-5}$	7	−1	11(−1)
	−14	13	−4	
		11	2	11(2)

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{11(1) - 2(5) - (-1)(2)}{3} = 1, & x_1 &= \frac{1}{11}, \\ y_2 &= \frac{11(-1) - 7(2)}{-5} = 5, & x_2 &= \frac{5}{11}, \\ y_3 &= \frac{11(2)}{11} = 2, & x_3 &= \frac{2}{11}. \end{aligned} \tag{13}$$

La nueva sustitución regresiva consta de los pasos siguientes:

- Después de la etapa de eliminación, se añade una columna que contiene a los elementos del lado derecho de los renglones pivotales multiplicados por el último elemento de A, a_{nn}, en este caso 11.

- Luego se efectúa la sustitución regresiva con esos valores, obteniendo las y_i, que siempre tendrán valores enteros.
- Se encuentra la solución $x_i = y_i/a_{nn}$.
  Esta idea se incorpora en el algoritmo siguiente:

Algoritmo D.G.O.

$a_{00} = 1$
$p = 1, 2, \ldots, n - 1$

si $a_{pp} = 0$, intercambiar los renglones p y k,
con $a_{kp} \neq 0$, $p < k \leq n$

$i = p + 1, p + 2, \ldots, n$

$$a_{ij} \leftarrow \frac{\begin{matrix} a_{pp} & a_{pj} \\ a_{ip} & a_{ij} \end{matrix}}{a_{p-1,\,p-1}}, \; j = p+1, p+2, \ldots, n \tag{14}$$

$$b_i \leftarrow \frac{\begin{matrix} a_{pp} & b_p \\ a_{ip} & b_i \end{matrix}}{a_{p-1,p-1}}$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

$$y_i = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i\, a_{nn} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} y_j \right\}, \quad x_i = \frac{y_i}{a_{nn}}$$

Como se verá más adelante, $a_{nn} = \det(A)$. Al comparar $x_i = y_i/a_{nn}$ con la expresión (1), se aprecia que $y_i = \det(A_i)$; así que D.G.O. obtiene exactamente los numeradores y el denominador de la regla de Cramer.

Cabe recalcar que el sistema (7) tiene solución única, solamente si al terminar la primera etapa en los procedimientos (9), (12) ó (14), la diagonal principal tiene todos sus elementos no nulos. De no ocurrir esto, el sistema tiene un número infinito de soluciones, o no tiene ninguna. Estos casos no serán tratados aquí.

Evaluación de determinantes con D.G.O.

Si se evalúa el determinante de la matriz A, de orden 3, por medio de la expansión por menores del primer renglón, resulta:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

El lector puede verificar que al aplicar la primera etapa del algoritmo D.G.O., sin intercambio de renglones, se obtiene

$\boxed{a_{11}}$	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}
	$\boxed{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$	$a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}$
	$a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$	$a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$
		$\det(A)$

Si se aplicó el algoritmo D.G.O. a la matriz cuadrada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} & & \end{pmatrix},$$

y requirió m intercambios de renglón en la primera etapa, y d es el elemento que resultó ubicado en el renglón n y en la columna n; entonces el determinante se puede expresar, según se demuestra en [3], mediante

$$\det(A) = (-1)^m d.$$

De acuerdo con esto, se evalúan los determinantes

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 11, \qquad \det\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 34;$$

que son los valores d con su signo correspondiente, obtenidos de las ecuaciones (10) y (11), respectivamente, al terminar la primera etapa del D.G.O., es decir:

$$11 = (-1)^0(11), \qquad 34 = (-1)^1(-34);$$

el primer ejemplo mantiene el valor de d porque no requirió intercambio de renglones; mientras que el segundo ejemplo es $-d$, por que necesitó un intercambio de renglones.

A continuación se verifica que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 11 & 18 & 23 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 21 & -10 \end{pmatrix} = -5,$$

por medio del arreglo:

$\boxed{1}$	2	3	5
5	11	18	23
1	2	4	5
1	7	21	−10
	$\boxed{1}$	3	−2
	0	1	0
	5	18	−15
		$\boxed{1}$	0
		3	−5
			−5

Es interesante hacer notar que al resolver sistemas de ecuaciones como (10), (11) y (13), el valor del determinante se obtiene como un resultado intermedio en la primera etapa del D.G.O., sin necesidad de realizar cálculos adicionales.

Inversión matricial con D.G.O.

Si A es una matriz no singular, entonces por definición:

$$AA^{-1} = I,$$

y haciendo la sustitución

$$X = A^{-1},$$

en la expresión anterior, resulta

$$AX = I,$$

que representa un sistema de ecuaciones simultáneas, en donde el lado derecho consta de n vectores que forman la matriz identidad I.

Con esto, se puede establecer una comparación que se presenta en la tabla siguiente.

Sistema	Matriz aumentada	Coeficientes	Lado derecho	Solución	
$Ax = b$	$(A\|b)$	A	b	x	(15)
$AX = I$	$(A\|I)$	A	I	A^{-1}	

Entonces para invertir una matriz con el algoritmo D.G.O., basta con operar con la matriz aumentada $(A|I)$, y al efectuar la sustitución regresiva para cada uno de los vectores del lado derecho se obtienen n soluciones que corresponden a las columnas de la matriz inversa.

Para mostrar lo anterior, veremos que:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \\ -8 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

para lo cual usaremos el arreglo compacto siguiente.

$$\begin{array}{|ccc|ccc|}
\hline
\boxed{3} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & \boxed{5} & 4 & -2 & 3 & 0 \\
 & -2 & -1 & -4 & 0 & 3 \\
\hline
 & & 1 & -8 & 2 & 5 \\
\hline
 & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

$$x_1 = -1, \qquad x_1 = 0, \qquad x_1 = 1,$$

$$x_2 = 6, \qquad x_2 = -1, \qquad x_2 = -4,$$

$$x_3 = -8, \qquad x_3 = 2, \qquad x_3 = 5.$$

3 Un algoritmo para generar una matriz de orden y determinante dados.

Se desea construir una matriz A de orden n cuyo determinante sea d, donde n y d son proporcionados por el usuario. Para tal efecto, haremos uso del resultado siguiente:

- Al aplicar la primera etapa del algoritmo D.G.O., sin intercambio de renglones, el último elemento, $a_{nn} = d$, es el determinante de la matriz A.

Para entender el método, conviene empezar a mostrarlo con casos particulares. Comenzaremos con matrices de orden 2. Es claro que las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

Siendo t_1 cualquier entero, tienen determinante d. Si t_2 es otro entero arbitrario, ahora deseamos determinar el valor de x tal que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ t_2 & x \end{pmatrix},$$

tenga determinante d.
Usando D.G.O. resulta

$$\begin{array}{|cc|} \hline \boxed{1} & t_1 \\ t_2 & x \\ \hline & x - t_1t_2 \\ \hline \end{array}$$

por lo que se requiere que $x - t_1t_2 = d$, es decir $x = d + t_1t_2$. Entonces

$$\det \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ t_2 & d + t_1t_2 \end{pmatrix} = d$$

Así se genera el determinante deseado de orden 2.
Para matrices de orden 3 se puede usar el resultado anterior de la forma siguiente: si $t_1, t_2, t_3 t_4$ son enteros arbitrarios, entonces las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t_1 \\ 0 & t_2 & d + t_1t_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & t_3 & t_4 \\ 0 & 1 & t_1 \\ 0 & t_2 & d + t_1t_2 \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

tienen determinante d, como se puede ver fácilmente con D.G.O.

$$\begin{array}{|ccc|} \hline \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t_1 \\ 0 & t_2 & d + t_1t_2 \\ \hline & \boxed{1} & t_1 \\ & t_2 & d + t_1t_2 \\ \hline & & d \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|ccc|} \hline \boxed{1} & t_3 & t_4 \\ 0 & 1 & t_1 \\ 0 & t_2 & d + t_1t_2 \\ \hline & \boxed{1} & t_1 \\ & t_2 & d + t_1t_2 \\ \hline & & d \\ \hline \end{array} \qquad (17)$$

¿Cómo se debe modificar la segunda matriz de (16), si los ceros de la primera columna se sustituyen por los enteros arbitrarios t_5 y t_6? Esto es, ¿cuánto deben valer x_1, x_2, x_3 y x_4 para que la matriz siguiente tenga determinante d?

$$\begin{pmatrix} 1 & t_3 & t_4 \\ t_5 & 1 + x_1 & t_1 + x_2 \\ t_6 & t_2 + x_3 & d + t_1t_2 + x_4 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

Realizando un paso del D.G.O., se obtiene

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
\boxed{1} & t_3 & t_4 \\
t_5 & 1 + x_1 & t_1 + x_2 \\
t_6 & t_2 + x_3 & d + t_1t_2 + x_4 \\
\hline
 & \boxed{1 + x_1 - t_3t_5} & t_1 + x_2 - t_4t_5 \\
 & t_2 + x_3 - t_3t_6 & d + t_1t_2 + x_4 - t_4t_6 \\
\hline
\end{array}$$

Para que este arreglo coincida con el primer paso desarrollado en el segundo arreglo de (17), se requiere que $x_1 = t_3t_5$, $x_2 = t_4t_5$, $x_3 = t_3t_6$ y $x_4 = t_4t_6$. La matriz (18) con estos valores de x_i, se convierte en

$$\begin{pmatrix} 1 & t_3 & t_4 \\ t_5 & 1 + t_3t_5 & t_1 + t_4t_5 \\ t_6 & t_2 + t_3t_6 & d + t_1t_2 + t_4t_6 \end{pmatrix},$$

que tiene determinante d. El lector puede verificar que al aplicar D.G.O. a la matriz anterior, se obtiene el segundo arreglo de (17).
En esencia, el método anterior consiste en aplicar el algoritmo D.G.O. en sentido inverso, y funciona para matrices de cualquier orden.
Ejemplo. Generar una matriz de orden 4, cuyo determinante valga −4.
Para encontrar la matriz deseada, se efectúan los pasos:

1. En el formato del D.G.O. se prepara un arreglo inicial:

   (a) con el último elemento igual al determinante.
   (b) Con pivotes unitarios.
   (c) Con enteros arbitrarios en los elementos restantes de los renglones y columnas pivotales.

   Por ejemplo

$$\begin{array}{|cccc|}
\hline
\boxed{1} & -1 & 2 & 3 \\
0 & & & \\
1 & & & \\
2 & & & \\
\hline
 & \boxed{1} & 4 & -2 \\
 & 1 & & \\
 & 0 & & \\
\hline
 & & \boxed{1} & 1 \\
 & & 2 & \\
\hline
 & & & -4 \\
\hline
\end{array}$$

2. Calcular retrospectivamente los elementos restantes.

$$
\begin{array}{|cccc|}
\hline
\boxed{1} & -1 & 2 & 3 \\
0 & & & \\
1 & & & \\
2 & & & \\
\hline
 & \boxed{1} & 4 & -2 \\
 & 1 & & \\
 & 0 & & \\
\hline
 & & \boxed{1} & 1 \\
 & & 2 & -2 \\
\hline
 & & & -4 \\
\hline
\end{array}
\quad -2 = -4 + (2)(1),
$$

$$
\begin{array}{|cccc|}
\hline
\boxed{1} & -1 & 2 & 3 \\
0 & & & \\
1 & & & \\
2 & & & \\
\hline
 & \boxed{1} & 4 & -2 \\
 & 1 & 5 & -1 \\
 & 0 & 2 & -2 \\
\hline
 & & \boxed{1} & 1 \\
 & & 2 & -2 \\
\hline
 & & & -4 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
5 = 1 + (1)(4),\ -1 = 1 + 1(1)(-2), \\
2 = 2 + (0)(4),\ -2 = -2 + (0)(-2),
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|cccc|}
\hline
\boxed{1} & -1 & 2 & 3 \\
0 & 1 & 4 & -2 \\
1 & 0 & 7 & 2 \\
2 & -2 & 6 & 4 \\
\hline
 & \boxed{1} & 4 & -2 \\
 & 1 & 5 & -1 \\
0 & 2 & -2 & \\
\hline
 & & \boxed{1} & 1 \\
 & & 2 & -2 \\
\hline
 & & & -4 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{lll}
1 = 1 + (0)(-1), & 4 = 4 + (0)(2), & -2 = -2 + (0)(3), \\
0 = 1 + (1)(-1), & 7 = 5 + (1)(2), & 2 = -1 + (1)(3), \\
-2 = 0 + (2)(-1), & 6 = 2 + (2)(2), & 4 = -2 + (2)(3).
\end{array}
$$

3. Optativamente, con el mismo arreglo anterior, se puede verificar con D.G.O. que en efecto

$$
\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = -4.
$$

Los arreglos anteriores se han presentado desglosados por razones de claridad, pero una vez que se ha entendido el procedimiento, se puede realizar todo en un solo arreglo.

Para expresar el algoritmo general que genera determinantes, se tomarán en cuenta las consideraciones siguientes:

- Si al utilizar el procedimiento D.G.O. para evaluar un determinante, se tiene que todos los pivotes a_{pp} valen 1, entonces la expresión que actualiza los valores de a_{ij}

$$a_{ij} \leftarrow \frac{\begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pj} \\ a_{ip} & a_{ij} \end{vmatrix}}{a_{p-1,\,p-1}},$$

se reduce a

$$a_{ij} \leftarrow \begin{vmatrix} 1 & a_{pj} \\ a_{ip} & a_{ij} \end{vmatrix},$$

que es equivalente a

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ip}a_{pj},$$

haciendo innecesario el intercambio de renglones y la división entre el pivote anterior, que siempre será 1. De la ecuación anterior, se puede despejar a_{ij} del miembro del lado derecho:

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + a_{ip}a_{pj},$$

expresión que permite obtener los valores previos de a_{ij}.

- El desarrollo retrospectivo se logra avanzando hacia atrás, partiendo de $a_{nn} = d$.

Incorporando estas consideraciones, el esquema se puede generalizar para una matriz A de ordena n y determinante d —que son valores propuestos— a través del algoritmo:

Generación de un determinante

$a_{nn} = d$

$p = n - 1, n - 2, \ldots, 1$

$a_{pp} = 1$

$i = p + 1, p + 2, \ldots, n$

a_{ip} = entero arbitrario

$j = p + 1, p + 2, \ldots, n$

a_{pj} = entero arbitrario

$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + a_{ip}a_{pj}$ (19)

4 Construcción de A y A^{-1} con elementos enteros.

Se desea construir A de orden n cuya inversa tenga elementos enteros.
En la introducción mencionamos que

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)},$$

donde adj(A) es la matriz cuyo elemento (i, j) es $a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$, siendo M_{ji} el determinante que resulta de eliminar el renglón j y la columna i de la matriz A. Entonces si $\det(A) = \pm 1$, A^{-1} tendrá elementos enteros.
Por lo tanto:

(a) Se genera A con el algoritmo (19), con determinante $d = \pm 1$.
(b) Se calcula A^{-1} como se indica en (15), utilizando el algoritmo D.G.O.

Ejemplo. Construir A y A^{-1} de orden 3 y elementos enteros.
Se genera A con el algoritmo (19), por ejemplo:

$$\begin{array}{|rrr|}
\hline
\boxed{1} & 1 & 1 \\
4 & 5 & 2 \\
-2 & 0 & -5 \\
\hline
 & \boxed{1} & -2 \\
 & 2 & -3 \\
\hline
 & & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Se invierte A con el algoritmo D.G.O.

$$\begin{array}{|rrr|rrr|}
\hline
\boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
-2 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & \boxed{1} & -2 & -4 & 1 & 0 \\
 & 2 & -3 & 2 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 10 & -2 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

$x_1 = -25,\quad x_1 = 5,\quad x_1 = -3,$

$x_2 = 16,\quad x_2 = -3,\quad x_2 = 2,$

$x_3 = 10,\quad x_3 = -2,\quad x_3 = 1.$

Las construcciones deseadas son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -25 & 5 & 3 \\ 16 & -3 & 2 \\ 10 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 Construcción de A con valores y vectores propios enteros.

Se desea generar A de orden n, con elementos enteros, tal que sus valores propios sean enteros dados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, y cuyos vectores propios correspondientes tengan elementos enteros.
Recordemos que λ es un valor propio de A si existe un vector $x \geqq 0$, tal que se cumple $Ax = \lambda x$. Se dice que el vector x es un vector propio correspondiente a λ.
Se puede demostrar que si A y B satisfacen $A = CBC^{-1}$, entonces A y B tienen los mismos valores propios, como se puede ver en [3, 4].
Consideremos ahora la matriz $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, que es una matriz diagonal con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en su diagonal principal. Construyamos C y C^{-1}, con elementos enteros, por el método de la sección anterior. Por consiguiente, la matriz $A = CDC^{-1}$ tiene elementos enteros y valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
Si se postmultiplica $A = CDC^{-1}$ por C, se obtiene $AC = CD$. Si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son las columnas de C, es fácil ver, de la última igualdad, que $Ac_1 = \lambda_1 c_1$, $Ac_2 = \lambda_2 c_2, \ldots, Ac_n = \lambda_n c_n$. Así pues las columnas de C son los vectores propios de A, correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
Podemos resumir el procedimiento anterior de la forma siguiente:

1. Sea $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

2. Se construyen C y C^{-1} con elementos enteros, como se indica en la sección anterior.

3. Se forma $A = CDC^{-1}$.

Esta matriz A tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, y las columnas $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de C son los vectores propios correspondientes.
Ejemplo. Sean $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 3$, los valores propios propuestos. Para generar la matriz A se construyen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

como se puede ver en el arreglo compacto siguiente:

$\boxed{1}$	2	0	1	0	0
2	5	1	0	1	0
3	8	3	0	0	1
	$\boxed{1}$	1	−2	1	0
	2	3	−3	0	1
		1	1	−2	1

$x_1 = 7$, $\quad x_1 = -6$, $\quad x_1 = 2$,

$x_2 = -3$, $\quad x_2 = 3$, $\quad x_2 = -1$,

$x_3 = 1$, $\quad x_3 = -2$, $\quad x_3 = 1$.

La matriz A es

$$A = CDC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 16 & -15 & 6 \\ 27 & -30 & 13 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$, y los vectores propios correspondientes son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es decir, se verifica $Ac_i = \lambda_i c_i$, para $i = 1,2,3,$:

$$\begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 16 & -15 & 6 \\ 27 & -30 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 16 & -15 & 6 \\ 27 & -30 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 16 & -15 & 6 \\ 27 & -30 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Referencias.

1. Madrid de la V., Humberto. "Calculando determinantes por computadora". Por aparecer en: Revista de Matemáticas. Universidad Autónoma de Coahuila.

2. Gómez G., Daniel. "D.G.O. Algoritmo para obtener la solución exacta de sistemas de ecuaciones lineales". Folleto técnico, Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro. Buenavista, Saltillo, Coah., México. Vol. 1 Núm. 3, 1985.

3. Grossman S. *Algebra Lineal*, 2a. Ed. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., México, D.F., 1988.

4. Herstein I.N. y Winter J. W. *Algebra Lineal y Teoría de Matrices*, 2a. Ed. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., México, D.F., 1989.

5. Noble B. y Daniel J.W. *Algebra Lineal Aplicada*, 3a. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., México, D.F. 1989.