

El álgebra en el curriculum de la secundaria. La Reforma de los 90's

Una nota preliminar

Hoy en día, gracias al avance que han tenido las investigaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática en general, y sobre los procesos de adquisición y uso del lenguaje algebraico en lo particular, es factible anticipar a partir de casi cualquier propuesta curricular de matemáticas para la secundaria, las repercusiones que dicha propuesta pueda llegar a tener en los procesos de instalación del lenguaje algebraico en los estudiantes de ese nivel escolar. Así, aunque en este artículo me estaré refiriendo al caso específico de las propuestas de programas nacionales 1990 y 1991, dadas a conocer por la Secretaría de Educación Pública (SEP, México), los argumentos que aquí se vierten a favor de la presencia del pre-álgebra en el curriculum de matemáticas correspondiente al final de la primaria e inicios de la secundaria, son aplicables a cualquier caso en el cual se advierta la omisión de este importantísimo contenido temático.

De la Primaria a la Secundaria — De la Aritmética al Álgebra

Parte de los procesos de adquisición del lenguaje algebraico tienen lugar dentro de un periodo de transición de un tipo de pensamiento, el aritmético, a otro, el algebraico y por lo tanto, una

observación que puede hacerse en relación a las propuestas de programas nacionales es que la casi total ausencia en ellos del tema del pre-álgebra puede conducir a una agudización de las dificultades a vencer, ya reportadas por la investigación, para que los alumnos puedan apropiarse de las nociones y del uso del álgebra simbólica.

El conocimiento algebraico, como todo nuevo conocimiento, se erige basándose e imponiéndose a un conocimiento anterior. En este caso, este cuerpo de conocimientos anteriores lo constituye la aritmética. Es bastante conocido el hecho de que el anclaje en un modo aritmético de pensar y de abordar ciertas tareas matemáticas como la resolución de los llamados problemas algebraicos verbales, persiste en alumnos que ya han cursado la escuela secundaria y aún en algunos que ya han cursado la materia de álgebra en el bachillerato (Booth, 1981 y Filloy/Rojano, 1989).

Esta negación de los métodos algebraicos de resolución de problemas por parte de los estudiantes y su predilección por los llamados métodos primitivos o numéricos obstruyen de manera

Teresa Rojano

Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados del IPN.

progresiva la apropiación de los repertorios de herramientas algebraicas contemplados en los currícula de enseñanza media básica y superior, observándose así una instalación muy débil de los contenidos algebraicos en los alumnos de estos niveles escolares (Ortega, 1987).

Aunque las explicaciones a los fenómenos de anclaje en la aritmética son de naturaleza diversa, las investigaciones realizadas en esta dirección señalan que, salvo para una pequeñísima proporción de la población estudiantil de entre 12 y 16 años de edad (a lo más un 10%), dicha permanencia en el nivel aritmético sólo se rompe con intervención directa y deliberada desde la enseñanza; en otras palabras, que es la enseñanza bien localizada y explícita del pre-álgebra lo que posibilita la instalación del nuevo lenguaje, tanto en sus aspectos propios como en aquellos que pueden ser construidos por extensión desde la aritmética.

El Pre-álgebra

El conocimiento pre-algebraico está constituido fundamentalmente por la resolución de ecuaciones de uno o más pasos, en las que basta con operar sobre los datos de la ecuación (sin operar la o las cantidades por determinar). A través de la resolución "aritmética" y del planteamiento de este tipo de ecuaciones, es factible modelar situaciones provenientes de los enunciados de problemas verbales y resolver éstos con herramienta "pre-simbólica" (i.e. previa al álgebra simbólica), pero ya mostrando lo que más tarde constituirá en un primer nivel el método algebraico de resolución de problemas, a saber, el reconocimiento de un problema como un miembro de una familia de problemas y su consecuente modelación con una ecuación, cuyo procedimiento de resolución es independiente de la semántica del enunciado original. Este método contrasta con el acercamiento arit-

mético, consistente en un análisis de los datos del problema y sus interrelaciones, el cual culmina con la determinación de la(s) operación(es) que resuelve(n) el problema, sin mediar acciones de modelaje en un nivel de lenguaje libre de los significados específicos presentes en el enunciado.

Además de la resolución y uso de ecuaciones como las ya descritas, a las que podríamos llamar "ecuaciones aritméticas", se consideran también tópicos pre-algebraicos, entre otros, el manejo de fórmulas a un cierto nivel de generalidad (como por ejemplo, a través de la sustitución numérica); el manejo de expresiones numéricas equivalentes (como por ejemplo, $17 = 11 + 9 - 3$); el reconocimiento de patrones numéricos o geométricos; y el registro (no necesariamente en lenguaje algebraico) de situaciones o propiedades generalizadas por el sujeto.

Los Sistemas Numéricos

Pero no sólo el progreso hacia un modo más abstracto de resolver problemas o hacia una manera más general de expresar situaciones es lo que propicia el paso por el pre-álgebra, sino también la posibilidad de extensión de los dominios numéricos que el niño maneja en la escuela primaria. Me refiero a que en el contexto de las "ecuaciones aritméticas", tales dominios numéricos, pensados tanto para los coeficientes como para las soluciones de dichas ecuaciones, tienen que ser extendidos, a fin de englobar, dentro de las mencionadas familias de problemas una mayor diversidad de situaciones. Específicamente, en este terreno, tienen una gran relevancia la operatividad con los enteros relativos (con signo) y con los decimales y las fracciones (racionales), concebidos estos dos últimos también como números con signo, y una cierta explicitación de los aspectos estructurales de estos sistemas numéricos. A es-

te respecto, cabe mencionar que las propuestas curriculares 1990 y 1991 atienden de manera extensa en el primer grado de secundaria la enseñanza de los sistemas numéricos, poniendo un énfasis, a mi manera de ver, extremo, en el tema de los números racionales.

No obstante la preocupación manifiesta en la nueva propuesta por el desarrollo conceptual-operativo de lo numérico, se advierte en ella una presentación desbalanceada en el tema de sistemas numéricos, al dedicar cuatro de las seis unidades del primer grado a los números racionales y sólo una a los números naturales y una a los números enteros, cuando hoy en día se reconoce en estos últimos una complejidad conceptual y operatoria para esas edades comparable a la de los racionales.

Además de la desproporción temática, hay que señalar que en el programa del primer grado de secundaria, los sistemas numéricos aparecen desvinculados de los contextos en los que más adelante la componente numérica jugará un papel fundamental, a saber, los dominios de coeficientes, exponentes y soluciones de una ecuación algebraica.

La enseñanza del álgebra

La omisión del pre-álgebra en el primer año de secundaria y la consecuente limitación a un solo año escolar de la enseñanza del álgebra propiamente dicha (Propuesta de Programa Nacional de Matemáticas II, SEP) cancelan la posibilidad de una construcción adecuada del simbolismo algebraico, ya que dicha construcción requiere de los tiempos didácticos correspondientes para que por un lado, se logre el rompimiento con ciertos conceptos y hábitos anclados en la aritmética (como ya se ha mencionado en párrafos anteriores) y por otro, para que se pueda proveer de nuevos significados a los viejos

símbolos y de nuevos sentidos a las anteriores operaciones. Me refiero al hecho de que, a pesar de que la mayoría de los símbolos utilizados en el álgebra ya están presentes prácticamente desde la aritmética de la primaria (números, signos de operación $+$, $-$, \times , la igualdad, letras), éstos sufren cambios drásticos en su significado y uso. Así, las letras que en la primaria son utilizadas principalmente en las fórmulas de área y volumen e interpretadas por tanto como "etiquetas" o iniciales de las dimensiones de la figura correspondiente (p para perímetro, h para altura, b para base, etc.), en el álgebra denotan o bien incógnitas específicas (las cantidades a determinar en las ecuaciones) o bien números generalizados (las letras que intervienen en las tautologías o equivalencias algebraicas, que se cumplen para cualesquiera valores numéricos que se sustituyen en ellas) o bien variables (cuando intervienen en la expresión de una relación funcional).

Los signos $+$, $-$ y \times , que en la aritmética denotan las operaciones binarias de suma, resta y multiplicación y evocan la ejecución de un algoritmo que dará por resultado un tercer número, en el álgebra estos signos tienen un significado dual, por un lado, significan una operación binaria pero "suspendida" (cuando conectan términos que involucran literales como $a + b$ o $x + 3$), y por otro, son interpretados como el signo de un número (cuando aparecen asociados a un número o a un monomio como en $a + (-5)$ o en $-x + 3x$).

La igualdad aritmética que la compone el miembro izquierdo conteniendo las operaciones a ejecutar y el miembro derecho conteniendo el resultado de haber efectuado tales operaciones (como en $3 + 5 - 2 = 6$), también se transforma en un signo de equivalencia, ya sea restringida (como en las ecuaciones, por ejemplo $3x + 2 = 5x$ válida sólo para $x = 1$) o no (como en las tautologías o equivalencia de ex-

presiones algebraicas, por ejemplo $a(b + c) = ab + ac$.

También las operaciones realizadas con los objetos algebraicos son de una naturaleza distinta de aquella de las operaciones en la aritmética. Así, mientras las operaciones de suma, resta, producto y división se realizan de manera efectiva vía algoritmos y parten de una escritura y disposición específica de los términos (por lo general ésta es vertical), esas operaciones en el álgebra son operaciones "suspendidas" y su escritura es horizontal.

Las transformaciones que se realizan en la simplificación de una expresión algebraica abierta se representan por medio de encadenamientos horizontales de igualdades tautológicas, mientras que las transformaciones realizadas sobre una ecuación para resolverla se registran de manera vertical, con el restablecimiento de la ecuación en cada paso.

En fin, que los anteriores son sólo algunos de los ejemplos de los cambios de concepción y manejo que median entre la aritmética y el álgebra y el que ese paso puedan darlo los estudiantes es responsabilidad de la enseñanza escolar. En la literatura especializada de investigación se encuentran reportadas las dificultades propias de este tránsito de un tipo de pensamiento a otro y hay un señalamiento claro de cuáles de tales dificultades dependen en buena medida de los acercamientos de enseñanza (Booth, 1981; Filloy/Rojano, 1984 y 1989; Freudenthal, 1983; Gallardo/Rojano, 1989; Kieran, 1981; Matz, 1979).

Yo insistiría, sin embargo, en que no es sólo una cuestión de acercamientos de enseñanza adecuados, sino que éstos llevan implícito el factor tiempo de apropiación de los nuevos significados y de desarrollo de los nuevos sentidos a través del uso de los símbolos algebraicos. Este tiempo didáctico, que se corresponde con el periodo de transición del pensamiento aritmético al algebraico en los estudiantes de entre 11

y 14 años de edad, no puede concebirse restringido a las primeras lecciones de álgebra del segundo año de secundaria; por el contrario, presupone un preámbulo amplio, que puede remontarse a edades tempranas, como pueden ser los 9 o 10 años, en el cual el estudiante esté expuesto a un uso diversificado de los símbolos aritméticos que más tarde devendrán en algebraicos.

De este modo, las propuestas curriculares en que se limita la introducción del simbolismo algebraico a dos o tres sesiones sobre monomios, binomios y polinomios parecieran suponer que el complejo proceso de instalación del lenguaje algebraico pudiera darse de manera súbita, sin oportunidad alguna de acceder a etapas intermedias del pre-álgebra, al parecer necesarias para el acceso al álgebra propiamente dicha.

El álgebra y otros Contenidos Curriculares

La defensa que en este artículo se hace de la presencia del pre-álgebra y por tanto, del álgebra misma, se debe tanto a que se considera que el aprendizaje de esta última debe permanecer como una meta en sí misma, como al hecho de que el algebraico es el lenguaje básico en el que se expresan conceptos, operaciones y procedimientos de otras áreas del conocimiento. En particular, la enseñanza de contenidos tales como la geometría, la probabilidad y la trigonometría (contenidos ya clásicos de la secundaria) y la geometría analítica y el cálculo (contenidos tradicionales del bachillerato) sería casi impensable si el sustrato de la instalación previa de dicho lenguaje.

Lo anterior no quiere decir que no medien dificultades en la utilización del álgebra como medio de expresión de otras ramas de la matemática, pues ahí también los símbolos, las operaciones y los métodos sufren transformaciones

en significado y sentido, y la traducción al álgebra de una situación de un contexto extra-algebraico no debe entenderse como una acción directa e inequívoca. Sin embargo, es sostenible que vale la pena realizar el esfuerzo de intentar enseñar además esta utilización del álgebra en otros campos del saber, ya que el papel histórico que la misma ha desempeñado en el desarrollo del conocimiento matemático en su conjunto, así como su presencia desde la edad media en la enseñanza escolarizada dirigida a los adolescentes en la cultura occidental (Egmond, 1980) constituyen razones sólidas para ello.

Tendencias Internacionales, las nuevas tecnologías

No se puede hablar en este momento de tendencias internacionales en términos de mera inclusión o eliminación del álgebra elemental en el curriculum de la secundaria, pero sí se puede hablar de una situación en la que ante la presencia de las nuevas tecnologías (la utilización de los medios computacionales para la enseñanza, por ejemplo) han surgido propuestas, desde mi punto de vista radicales, de la eliminación de la enseñanza de los aspectos manipulativos del álgebra. Y es que existen ambientes computacionales que posibilitan el proceso de los alumnos en, por ejemplo, la resolución de problemas, quedando en ese proceso la manipulación correspondiente a cargo de la máquina (Thompson, 1989). Por otro lado, la investigación realizada sobre el desarrollo de conceptos algebraicos en ciertos ambientes computacionales conduce a la posibilidad de plantear la incorporación del uso de esos nuevos medios del curriculum escolar. En este último caso, se respertaría la presencia del álgebra en los programas, pero poniendo énfasis en sus aspectos conceptuales (Hoyles/Sutherland, 1989). Ejemplos de las posiciones aquí

descritas pueden encontrarse en "Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra" (Wagner/Kiera, 1989).

Las propuestas curriculares más novedosas en el ámbito internacional en relación a los temas algebraicos están bastante ligadas a la incorporación de los ambientes computacionales al curriculum. Esto, en cierto modo aleja la discusión de nuestro propio caso de esas propuestas. Sin embargo, en el fondo de los mencionados planteamientos se advierte una vieja polémica sobre si es el aspecto operativo del álgebra o su aspecto conceptual lo que debe tener preminencia en la enseñanza. Lo cierto es que algunas de las investigaciones más recientes señalan que estos dos aspectos son elementos indisolubles en la construcción del conocimiento algebraico. Y este señalamiento sí es pertinente traerlo a colación en el caso de las propuestas de programas que aquí nos ocupan.

Un comentario final

Aunque buena parte de las observaciones hechas a lo largo de este escrito tienen que ver con omisiones serias en los documentos aludidos, no quisiera incurrir en una situación análoga al ahora yo misma, hacer caso omiso de aspectos importantísimos de una reforma de planes y programas de estudios, como son la formación de maestros o del contexto social y económico de la educación, sin aclarar que esta parcialización del problema ha sido deliberada de mi parte. Y es que consideré de suma importancia hacer señalamientos desde los resultados de la investigación básica desarrollada en los últimos 20 años en el campo de la Educación Matemática, la cual, aunque no es más que uno de los tantos factores a considerar en los procesos de los cambios educativos, parecía, una vez más, no haber sido tomada en cuenta.

Referencias

- BOOTH, L.** Child-Methods in Secondary Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 12, 29-41, 1981.
- EGMOND, V.** Practical Mathematics in the Italian Renaissance. Suplemento agli Annali dell' Instituto e Museo di Storia della Scienza, Fascicolo I. Firenze, 1980.
- FILLOY, E.; Y ROJANO, T.** Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. For the Learning of Mathematics, 9.2, Montreal, June, 1989.
- FREUDENTHAL, H.** Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Reidel, 1983.
- GALLARDO, A. Y ROJANO, T.** Áreas de Dificultad en la Adquisición del Lenguaje Aritmético-Algebraico. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9, No. 2, 1989.
- HOYLES, C. Y SUTHERLAND, R.** Logo Mathematics in the Classroom. Routledge, 1989, London, New York.
- KIERAN, C.** Concepts Associated with the Equality Symbol. Educational Studies in Mathematics, 12, pp 317-326, 1981.
- MATZ, M.** Towards a Process Model for High School Algebra Errors. Cambridge Massachusetts Institute of Technology, Artificial Intelligence Laboratory, 1979.
- ORTEGA, O.** Errores de Sintaxis Algebraica: Un Experimento de Enseñanza Remedial. Tesis de Maestría. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV, 1987.
- THOMPSON, P.** Artificial Intelligence, Advanced Technology and Learning and Teaching Algebra. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, Wagner/Kieran Eds. NCTM, Lawrence Erlbaum, pp 135-161, 1989.
- WAGNER, S. Y KIERAN, C. (Eds)** Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, Vol. 4 of Research Agenda in Mathematics Education, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1989.

Educación Matemática

es una publicación que surge de la necesidad y el interés de varios sectores de la comunidad educativa de México, por tener un medio de comunicación adecuado y continuo para difundir ampliamente reflexiones, sugerencias didácticas, ensayos y reportes de investigación en torno a los aspectos de la Educación Matemática, propiciando su conocimiento, discusión y estudio para contribuir así, en forma significativa, al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles educativos, tanto de nuestro país como del resto de Latinoamérica.

NO SE PIERDA DE NINGUN NUMERO DE LA REVISTA.