

# Algunas dificultades de aprendizaje detectadas en alumnos de Cálculo Diferencial

## I. Introducción

Es de todos conocido que los alumnos de las cátedras de Cálculo tienen dificultades en el manejo de las funciones. Estas dificultades según I. Guzmán (Cf. [1], [2]) para alumnos de entre 15 y 16 años provienen del hecho que, el aprendizaje del concepto de función pone en juego simultáneamente diversos registros de expresión, además de aspectos conceptuales y para alumnos de esta edad la articulación de registros resulta una tarea difícil.

Nos hemos preguntado por el tipo de dificultades en torno al concepto de función que encuentran alumnos que cursan Cálculo Diferencial. ¿Ellas tienen relación con las que presentan alumnos más jóvenes? Si la hay ¿cuál sería ésta?

Para responder a estas interrogantes hemos elaborado en la primera etapa de nuestra investigación un cuestionario sobre rectas y parábolas. En la construcción de los ítems hemos considerado los registros algebraico y gráfico y dos tipos de tareas, las internas a cada registro y las de pasaje entre ellos.

Los resultados obtenidos son sorprendentes ya que muestran que las dificultades coinciden con aquellas encontradas en alumnos más jóvenes: éstas aparecen cuando las tareas exigen articular los registros, esto es, **interpretar** informaciones dadas en un registro y **traducirlas** en términos del otro.

## II. Marco Teórico

La internalización del concepto de función requiere la puesta en juego de todos los registros de expresión que este concepto involucra [Cf. 2]. La mayoría de las experiencias con alumnos entre 14-16 años muestran que los diseños de aprendizaje que enfatizan lo conceptual, la definición de función por ejemplo, acompañado de los ejercicios tradicionales típicos, no logran la internalización

**Ismenia Guzmán Retamal**  
**Lidia Consigliere Dezerega**

Instituto de Matemáticas  
Universidad Católica de Valparaíso

del concepto. Los alumnos manipulan y responden muchas veces con acierto los ejercicios propuestos, los cuales presuponen o no toman en cuenta los aspectos de comprensión. Cuando un alumno responde con acierto una pregunta planteada no siempre comprende a fondo lo que está haciendo, él está dando una respuesta para que su profesor quede conforme.

El concepto de función pone en juego cuatro registros, a saber: el algebraico, el gráfico, las tablas de valores y el algorítmico. De éstos, en los actuales diseños de aprendizaje se utiliza con privilegio el registro algebraico y con muy pocas conexiones con los otros, el gráfico y las tablas de valores se utilizan como soporte, pero no se explota lo que cada uno puede aportar en representaciones concretas del concepto en cuestión, aparte de que quedan sin tratar una serie de situaciones interesantes que se presentan al hacer interactuar distintos registros: tablas de valores-expresiones algebraicas; gráficos— lenguaje natural, etc. Cf. ([1], [2]).

La noción de registro es una noción semiótica. Un registro está constituido por signos, en el más amplio sentido de la palabra: trazo, símbolo, icono, figura, etc. Estos signos están asociados de manera interna según los lazos de pertenencia a una misma red semántica y de manera externa según las reglas de combinación de signos en expresiones o configuraciones, estas reglas son propias de la red semántica considerada (Cf. R. Duval [4]).

Un registro se caracteriza por su sistema semiótico, es decir, por sus signos propios y la manera en que éstos se organizan. De modo que podemos entender un registro como un medio de expresión o de representación. Un registro tiene la posibilidad de expresar o de representar un objeto, idea o concepto no necesariamente del ámbito matemático (Cf. I. Guzmán [2]).

En el presente trabajo consideramos los registros algebraico y gráfico. El registro algebraico constituido por el sistema semiótico del álgebra relativa a las funciones reales y el registro gráfico constituido por el sistema semiótico asociado al plano provisto de un sistema de referencia rectangular.

El pasaje entre registros se refiere a la confrontación de dos representaciones de un mismo objeto. Este pasaje da lugar a fenómenos de congruencia y de no congruencia semántica (Cf. R. Duval, "Graphiques et équations" [4]). Cuando hay congruencia semántica, el pasaje entre registros es trivial, cuando no la hay, este pasaje resulta ser una tarea difícil. Es un obstáculo al aprendizaje, aunque no necesariamente de tipo conceptual. R. Duval encontró estas dificultades examinando alumnos de 15-16 años. Los alumnos involucrados en nuestra experiencia son universitarios y aún cuando fueron sometidos a otros problemas, estos fenómenos de congruencia y de no congruencia semántica vuelven a aparecer con las mismas características.

A continuación damos dos enunciados que ilustran los conceptos de congruencia y de no congruencia semántica:

A partir de la representación gráfica de la recta de ecuación:  $y = 2x + 1$  decidir la naturaleza (creciente o decreciente) de la función representada por la recta.

Se refiere a un pasaje del registro gráfico al algebraico en el que hay congruencia semántica, ya que el dibujo muestra una recta que sube (crece) de izquierda a derecha y este movimiento se asocia de manera natural con el concepto de crecimiento de la función en cuestión. En cambio no hay congruencia semántica en el enunciado que sigue:

Dados dos puntos A y B de coordenadas (3, 0) y (0, 5), respectivamente, construir la recta AB y decidir si la función representada por la recta AB es creciente o decreciente.

Puesto que la recta del dibujo también sube pero ahora de derecha a izquierda y en este caso asociar este movimiento con la noción de crecimiento conduce a error, aquí se requiere entonces una comprensión del concepto libre de aprehensiones intuitivas, habría que asociar el signo del coeficiente director (pendiente) de la ecuación de la recta con la naturaleza creciente o decreciente de la función representada.

La importancia de poner en juego distintos registros de expresión radica en la posibilidad de articular dos a dos todos los registros que involucra la noción tratada, lo que da lugar a proponer una serie de problemas nuevos que no están contemplados en el esquema tradicional.

En la construcción del cuestionario hemos considerado los registros algebraico y gráfico en dos tipos de tareas, las internas a cada registro y las de pasaje entre ellos; estas últimas tienen en cuenta la articulación de los registros.

### III. Presentación del Cuestionario

El Cuestionario, en cuanto a contenido está centrado en las ecuaciones de rectas y parábolas, tema que en general en los cursos de Cálculo en Chile, tiene un carácter de prerrequisito. Los objetivos específicos considerados son:

- 1.- Interpretar una situación gráfica sencilla que involucra una recta y un punto.
- 2.- Calcular la pendiente de rectas que pasan o no por el origen.
- 3.- Confrontar una expresión algebraica con la representación gráfica de una recta, para determinar si esta expresión es la ecuación o no de la recta.
- 4.- Determinar ecuaciones de rectas, dadas la pendiente y las coordenadas de un punto, o dadas las coordenadas de dos puntos.
- 5.- Verificar la colinealidad de puntos.
- 6.- Determinar la ecuación de una parábola simple con vértice en el origen dada su representación gráfica.
- 7.- Interpretar una situación gráfica que involucra una recta y una parábola.
- 8.- Hallar el dominio de funciones reales, definidas por una fórmula que contiene un cociente con una raíz por denominador.

A continuación proponemos el cuestionario.

## Universidad Católica de Valparaíso Instituto de Matemáticas

### Cuestionario No. 1

1. Se considera el plano cartesiano de ejes perpendiculares.

Sea D la recta que pasa por el origen y el punto  $(8, -7)$

(Marque con una cruz su respuesta)

a) ¿El punto  $(-8, 7)$  pertenece a D?

SI            NO

b) ¿El punto  $(24, -23)$  pertenece a D?

- c) ¿El punto  $(28, -32)$  pertenece a D?
- d) ¿El punto  $(-4\sqrt{2}, 7/\sqrt{2})$  pertenece a D?

2. Sean  $A(2, 5)$  y  $B(-3, 1)$

a) Determine la pendiente numérica de la recta AB

$$m = \dots\dots\dots$$

b) La recta que pasa por el origen y el punto  $C(12, 11)$  ¿Es paralela a la recta AB?

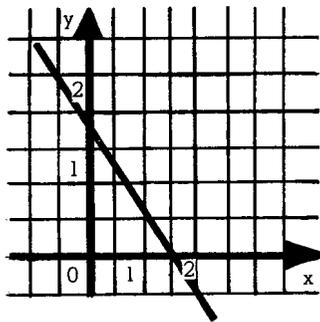
Marque con una cruz su respuesta.

- SI  NO

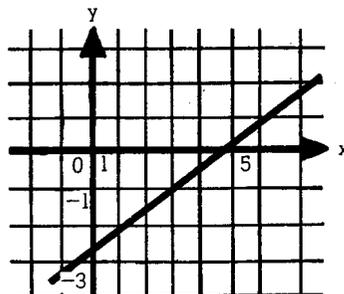
3. Aproximadamente:

a) ¿Puede ser  $\sqrt{2}y + \sqrt{3}x = \sqrt{6}$  la ecuación de la recta dibujada? Marque con una cruz su respuesta.

- SI  NO



b) Dar un valor lo más exacto posible a la ordenada de un punto de abscisa 25 que pertenece a la recta dibujada.



4. Dados los puntos  $A = (-4, 8)$ ,  $B = (1, 5)$ ,  $C = (11, -1)$  y  $D = (5, 3)$   
 a) La ecuación de la recta cuya pendiente es  $-3/5$ , y que pasa por  $A$  es:

.....

- b) La ecuación de la recta que pasa por  $A$  y  $C$  es:

.....

- c) Los puntos dados  $A$ ,  $B$  y  $C$  ¿Son colineales? Marque con una cruz su respuesta.

SI                       NO

Justifique la respuesta dada.

.....  
 .....

- d) Se afirma que:

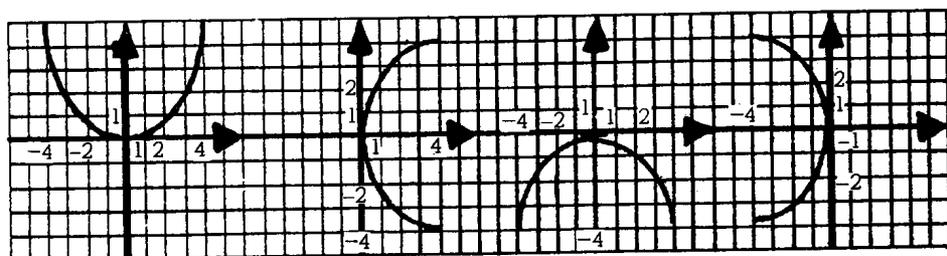
Los puntos dados  $A$ ,  $B$  y  $D$  no son colineales, modificar la ordenada de  $D$  (conservando la abscisa 5), para que sean colineales.

.....  
 .....

El punto modificado  $D$  es:  $(5, \dots)$

5. Entre las parábolas siguientes identifique aquella de Ecuación:

$$y = \frac{-x^2}{4}$$



(a)                      (b)                      (c)                      (d)

Marque con una cruz su respuesta:

(a)     (b)     (c)     (d)

- c) ¿El punto  $(28, -32)$  pertenece a D?
- d) ¿El punto  $(-4\sqrt{2}, 7/\sqrt{2})$  pertenece a D?

2. Sean  $A(2, 5)$  y  $B(-3, 1)$   
 a) Determine la pendiente numérica de la recta AB

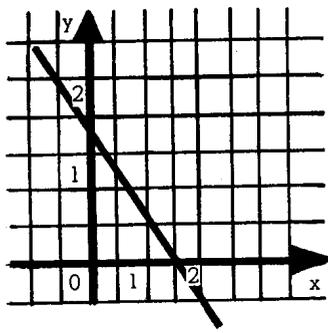
$m = \dots\dots\dots$

b) La recta que pasa por el origen y el punto  $C(12, 11)$  ¿Es paralela a la recta AB?  
 Marque con una cruz su respuesta.

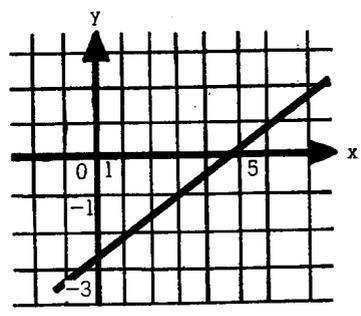
- SI  NO

3. Aproximadamente:  
 a) ¿Puede ser  $\sqrt{2}y + \sqrt{3}x = \sqrt{6}$  la ecuación de la recta dibujada?  
 Marque con una cruz su respuesta.

- SI  NO



b) Dar un valor lo más exacto posible a la ordenada de un punto de abscisa 25 que pertenece a la recta dibujada.

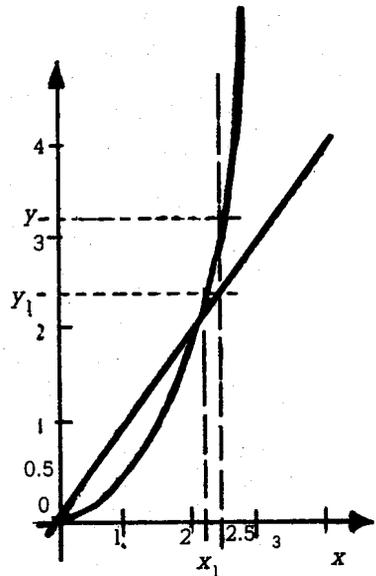


Escriba las ecuaciones de cada una de las parábolas:

- a) .....
- b) .....
- c) .....
- d) .....

6. La figura ilustra la representación gráfica de la parábola de ecuación  $y = \frac{x^2}{2}$  y de la recta de ecuación  $y = x$ . Complete las coordenadas de los 2 puntos:

- a)  $y =$  .....
- b)  $y_1 =$  .....
- c)  $x_1 =$  .....
- d)  $y =$  .....
- e)  $y_1 =$  .....
- f)  $x_1 =$  .....



7. Cada una de las fórmulas siguientes define una función real. Indique cada vez el dominio de la función.

a)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$                       Dominio: .....

b)  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$                       Dominio: .....

c)  $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$                       Dominio: .....

d)  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$                       Dominio: .....

## **Análisis de las Preguntas**

Las preguntas 1 y 2 demandan tareas internas al registro algebraico:

La pregunta 1 exige una tarea sencilla de manipulación algebraica pues, pone en juego la ecuación de una recta determinada por el origen y las coordenadas de otro punto y se trata de verificar si diferentes puntos dados por sus coordenadas pertenecen o no a la recta.

La pregunta 2 contiene dos tareas: 1) determinar la pendiente de una recta dadas las coordenadas de dos puntos y 2) verificar si la recta anterior es o no paralela a otra recta determinada por el origen y otro punto del cual se dan sus coordenadas.

La pregunta 3 confronta los registros algebraico y gráfico. Demanda también dos tareas:

- 1) Decidir si una escritura algebraica representa el "mismo objeto" que la figura del gráfico propuesto y
- 2) Determinar la ordenada de un punto que pertenece a una recta a partir del gráfico de ésta.

La pregunta 4 está formulada en el registro algebraico, con dos tareas, la primera es de manipulación y consiste en determinar ecuaciones de rectas conociendo: a) la pendiente y las coordenadas de un punto y b) las coordenadas de dos puntos. La otra tarea hace jugar el concepto de colinealidad de puntos traducido en términos algebraicos. Ésta resulta ser una tarea menos habitual que la anterior, hecho que quedará de manifiesto en el análisis de resultados.

La pregunta 5 contiene también dos tareas y las dos se refieren a pasajes entre los registros. En la primera se trata de reconocer el gráfico de una parábola dada su ecuación, este es un pasaje del registro algebraico al gráfico en el que hay congruencia semántica, hecho que facilita la tarea.

La otra tarea pedida se refiere al pasaje inverso, hay que determinar las ecuaciones de las parábolas a partir de sus respectivas representaciones gráficas, este pasaje exige la articulación de ambos registros. Las informaciones gráficas deben ser interpretadas y traducidas en términos algebraicos. A pesar de que la tarea *a priori* no parece difícil, los resultados mostrarán lo contrario.

La pregunta 6 también trata del pasaje del registro gráfico al algebraico. Contiene dos tareas, la primera es de lectura; basta leer en la figura propuesta informaciones numéricas. La segunda tarea es de una dificultad mayor pues, demanda generalizar para lo cual se exige la articulación de los registros en juego, es decir, una interpretación de las informaciones dadas en el gráfico y una traducción en términos algebraicos.

La pregunta 7 se refiere a una tarea habitual en el registro algebraico que trata de la noción de dominio de una función. Sin embargo, hay en juego en esta pregunta los conceptos de raíz cuadrada y de composición de funciones, de modo que la tarea exige un buen nivel de manejo de estos conceptos.

A continuación proponemos un cuadro resumen en el que destacamos las Tareas y los Registros considerados en cada pregunta y sus ítems. Queda de manifiesto que en la formulación de las preguntas hemos privilegiado el Registro Algebraico y el Pasaje entre Registros. En la 1ª columna aparece identificado el ítem y en las 2ª y 3ª aparecen los resultados generales obtenidos, en las respuestas omitidas (nulas) y malas, por los 235 alumnos examinados (Cf. L. Consigliere. Un avance del Cuestionario: datos estadísticos. Anuario IMA 1989). En la 4ª columna aparece resumido el objetivo mismo de la pregunta, recordándose la tarea precisa solicitada.

	Item	% Nulas	% Malas	Tareas
R E G I S T R O	1a)	3.4	13.2	Determinar la ecuación de una recta dados, el origen y las coordenadas de un punto; verificar la pertenencia o no de puntos en ella.
	1b)	11.1	7.2	
	1c)	13.6	6.4	
	1d)	20.4	46.8	
	2a)	6.0	17.9	Determinar la pendiente de una recta dadas las coordenadas de puntos y verificar paralelismo entre dos rectas.
	2b)	8.1	7.2	
A L G E B R A I C O	4a)	8.9	19.1	Dados 4 puntos, determinar ecuaciones de rectas y reconocer colinealidad de puntos.
	4b)	18.9	28.9	
	4c)	24.7	28.9	
	4d)	54.9	18.3	
	7a)	7.2	12.8	Determinar el dominio de funciones reales.
	7b)	11.1	33.6	
	7c)	14.5	10.2	
	7d)	20.9	44.7	
P A S A J E	3a)	17.0	26.4	Dada una recta y una ecuación, reconocer si la ecuación corresponde a la recta.
	3b)	47.1	40.0	
E N T R E	5i)	18.7	8.9	Dadas cuatro parábolas determinar cuál tiene por ecuación: $y = \frac{-x^2}{4}$ determinar la ecuación correspondiente a cada una.
	5a)	34.5	11.5	
	5b)	51.5	15.3	
	5c)	36.6	3.4	
	5d)	51.5	14.9	
R E G I S T R O S	6a)	39.1	18.7	Dadas la parábola de ecuación: $y = \frac{x^2}{2}$ y la recta de ecuación $y = x$ . Determinar abscisas y ordenadas de puntos en casos concretos y en general.
	6b)	49.4	7.2	
	6c)	59.1	15.7	
	6d)	54.9	2.6	
	6e)	59.6	3.8	
	6f)	66.8	9.4	

### REGISTROS Y TAREAS

El porcentaje de respuestas correctas es la diferencia entre la suma de las Nulas (omitidas) y las Malas. Las preguntas que exigen pasar de un registro a otro son las más difíciles.

**Resultados Globales del Cuestionario**  
**Muestra: 235 Alumnos**

Preguntas	No contestadas %	Correctas %	Incorrectas %	
1	a	3.4	83.4	13.2
	b	11.1	81.7	7.2
	c	13.6	80.0	6.4
	d	20.4	32.8	46.8
2	a	7.6	76.2	16.2
	b	8.1	84.7	7.2
3	a	17.0	56.6	26.4
	b	41.7	18.3	40.0
4	a	8.9	71.9	19.2
	b	18.7	52.4	28.9
	c	24.7	46.4	28.9
	d	54.9	26.8	18.3
5	i	18.7	72.4	8.9
	a	34.5	54.0	11.5
	b	51.5	33.2	15.3
	c	36.6	60.0	3.4
	d	51.5	33.6	14.9
6	a	39.1	42.2	18.7
	b	49.4	43.4	7.2
	c	59.1	25.1	15.8
	d	54.9	42.6	2.5
	e	59.6	36.6	3.8
	f	66.8	23.8	9.4
7	a	7.2	80.0	12.8
	b	11.1	55.3	33.6
	c	14.5	75.3	10.2
	d	20.9	34.5	44.7

El Cuestionario elaborado fue aplicado en Noviembre de 1989 a una muestra de 285 alumnos de la U.C.V., correspondiente a 8 cursos: 2 de Cálculo I (Diferencial) y 6 de Cálculo II (Integral)

**IV. Análisis de Respuestas**

En las respuestas a la pregunta 1 encontramos que sólo el ítem 1 d) presenta una alta dificultad, un 46.8% no responde correctamente; se puede concluir que la razón no es de orden conceptual sino de manipulación algebraica debido a la presencia de las raíces.

En el ítem 2 a), es alto el porcentaje de respuestas incorrectas. Se observó una memorización en la "fórmula de la pendiente" y ninguna otra estrategia para enfrentar el problema, la pendiente que se debía obtener era  $6/5$  y la mayor parte de las respuestas incorrectas dan  $5/6$ . La pendiente de la recta fue calculada como el cociente entre la diferencia de abscisas y la diferencia de las ordenadas.

En la pregunta 3, se observa la dificultad que produce el confrontar los dos registros. En el ítem 3 a), para determinar si las coordenadas de los puntos de la recta del gráfico verifican la ecuación propuesta, el procedimiento que se impone es el de chequear las coordenadas de los puntos de intersección con ambos ejes, pero los alumnos se limitaron a chequear solamente la intersección con el eje de las  $y$ . En el ítem 3 b), la interpretación del gráfico exige considerar un dato que no aparece en él, debido a la natural limitación que ofrece el trazado de figuras. Lo que más sorprendente resulta es la falla en la lectura de datos gráficos como también la falta de ubicación en el gráfico, ya que las respuestas incorrectas entregan un número negativo en lugar de uno positivo.

En la pregunta 4 los resultados son correctos en el ítem 4 a), no así en los otros; es curioso el fracaso en el ítem 4 b), ya que se trata de un problema habitual. Se detecta que los errores no provienen del desconocimiento de la fórmula, sino más bien de errores de manipulación algebraica. La dificultad detectada en los ítems 4 c) y 4 d) se debe a la interpretación de la colinealidad, problema al parecer inhabitual; observar que un 53% omite la respuesta 4 d).

En la pregunta 5, el ítem 5 i) obtuvo un 72% de respuestas correctas. Pero, cabe destacar el 18% de omisiones. En los restantes ítems se debía producir una expresión algebraica adecuada, el porcentaje de respuestas correctas baja al 50%. A pesar de que el ítem 5 i) estaba relacionado con el 5 c) no hubo coherencia en las respuestas. Nuevamente aparece aquí la dificultad en el pasaje del registro gráfico al algebraico.

La pregunta 6 fue omitida por más del 50% de los alumnos, lo que nos indica que se trata de una pregunta inhabitual. La gran dificultad es la interpretación de un gráfico cuyos datos son simples, del punto de vista del contenido. Este tipo de ejercicio los profesores lo consideran trivial y la conducta involucrada la suponen adquirida. Sin embargo el obstáculo es otra vez el pasaje del registro gráfico al algebraico a pesar de que el ítem 6 a) sólo exigía una lectura.

La pregunta 7 es una pregunta habitual. Hallar dominios de funciones reales. La mayor dificultad se encuentra en la manipulación algebraica de las raíces tal como en el ítem d de la pregunta 1. Los errores más frecuentes son provocados por no poder decidir para qué valores de  $x$  en la cantidad subradical la raíz es positiva.

## V. Conclusiones

El análisis del cuestionario deja en evidencia que el cambio de registro es la gran dificultad que encuentran los alumnos, sobre todo cuando el paso es del Registro Gráfico al Algebraico. Esta misma dificultad es la que encontramos en Francia examinando alumnos de Troisième (14-15 años) y de Seconde (15-16 años) en torno a las funciones afines. R. Duval (Cf. [3]) examinando alumnos de Seconde en torno a la representación de relaciones encontró esta misma dificultad. El hecho que esta dificultad la encuentren alumnos de distinta madurez establece que el carácter de esta dificultad no es de orden conceptual, sino de orden conductual, ella está relacionada con una falta de sensibilización o

de experiencia de los alumnos con problemas que involucran estos cambios de registro de expresión. Por otra parte el excesivo privilegio del Registro Algebraico, hecho innegable en todos los diseños de aprendizaje actualmente en práctica y la ausencia de otros Registros en la presentación y en la práctica de las materias va en desmedro de los alumnos, ya que no tienen la posibilidad de sensibilizarse en problemas que exijan articular distintos registros.

Las respuestas que nos han dado los alumnos dejan establecido que esta articulación es un objetivo que no está tomado en cuenta por los actuales diseños de instrucción. El Registro Gráfico es utilizado, en general, con carácter ilustrativo o de soporte. El hecho sorprendente de que alumnos de primer año de Universidad fracasen en sus respuestas por no poder interpretar datos en un gráfico muestra dos aspectos del comportamiento de los alumnos: uno, la falta de práctica o de manipulación en el trabajo con gráficos y dos, una suerte de incapacidad para enfrentar situaciones no habituales. Esto es lo más sorprendente en alumnos del nivel de esta muestra, ya que ellos resuelven problemas de una complejidad cognoscitiva superior para los cuales han sido preparados y frente a situaciones no habituales sencillas no reaccionan con el éxito esperado.

En consecuencia, por una parte habría que investigar más a fondo las estrategias que emplean los alumnos frente a problemas, habituales o no, de distinto grado de dificultad. Por otra parte, tenemos que denunciar la falta metodológica consistente en la no explotación de distintos registros en la presentación de las materias y en el planteo de situaciones nuevas.

Con respecto al cuestionario, en una segunda versión estamos mejorando las preguntas, pidiendo justificar explícitamente la respuesta en aquellas preguntas que no lo hacían, de modo de tener información respecto de las estrategias empleadas por alumnos. También incluiremos preguntas relativas al concepto de función y nociones asociadas. La segunda versión la someteremos a una población más grande, incluyendo alumnos de otras universidades del país, para observar si estos resultados son particulares a nuestra universidad o son más generales.

### **Bibliografía**

- [1] **I. GUZMAN**, "Registres mis en jeu par la notion de fonction" *Annales de Didactiques et des Sciences Cognitives*. 1989 Vol. II (P. 230-260).
- [2] **I. GUZMAN**, "Le role des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction". Tesis de doctorado. Universidad Louis Pasteur de Estrasburgo. 1990.
- [3] **I. GUZMAN**, "Registros en juego en el concepto de función. Comportamiento de una muestra de alumnos chilenos". Cursillo, XVII Semana de la Matemática de la Universidad Católica de Valpo. 1990.
- [4] **R. DUVAL**, "Graphiques et équations: l'articulation de deux registres" *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 1988. Vol. I (P. 235-253).
- [5] **L. CONSIGLIERE**, "Un avance del análisis del Cuestionario: datos estadísticos" *Anuario Instituto de Matemáticas U.C.V.* 1989.