ARTICULOS

La Feria de Pitágoras

(1a. de dos partes)

Introducción

El teorema de Pitágoras ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas. Mediante él fueron descubiertos los números irracionales: usando el teorema, sabemos que la diagonal de un cuadrado de lado 1 tiene longitud $\sqrt{2}$, que es un número irracional, es decir, la diagonal del cuadrado resulta inconmensurable con el lado. El teorema nos sugiere una forma de definir distancia en un plano coordenado. La generalización del teorema de Pitágoras a tres dimensiones nos indica cómo se puede definir distancia en espacios de más dimensiones. Además el teorema de Pitágoras es característico de la geometría plana: el teorema no es válido en espacios curvos.

El teorema afirma que en un triángulo rectángulo (ver fig. 1), la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa

$$a^2 + b^2 = c^2$$

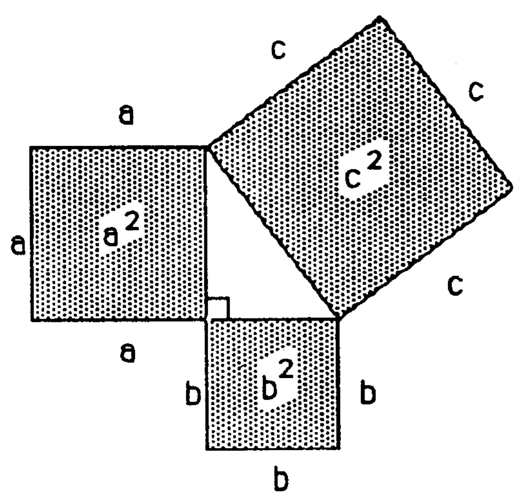


Figura 1

Alfinio Flores

San Diego State University

ARTICULOS

La Feria de Pitágoras

(1a. de dos partes)

Introducción

El teorema de Pitágoras ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas. Mediante él fueron descubiertos los números irracionales: usando el teorema, sabemos que la diagonal de un cuadrado de lado 1 tiene longitud $\sqrt{2}$, que es un número irracional, es decir, la diagonal del cuadrado resulta inconmensurable con el lado. El teorema nos sugiere una forma de definir distancia en un plano coordenado. La generalización del teorema de Pitágoras a tres dimensiones nos indica cómo se puede definir distancia en espacios de más dimensiones. Además el teorema de Pitágoras es característico de la geometría plana: el teorema no es válido en espacios curvos.

El teorema afirma que en un triángulo rectángulo (ver fig. 1), la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa

$$a^2 + b^2 = c^2$$

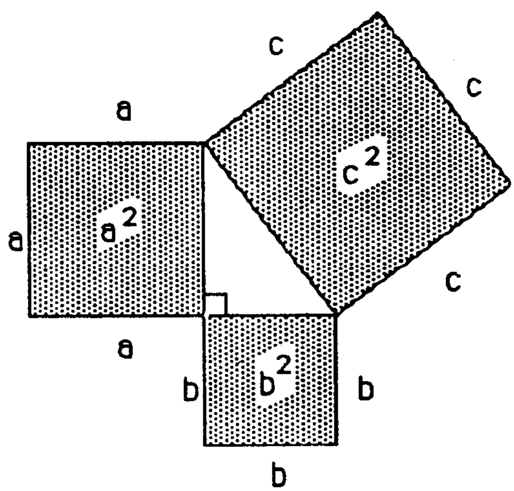


Figura 1

Alfinio Flores

San Diego State
University

Este artículo sigue a grandes rasgos el modelo de Van Hiele (1986) de niveles de desarrollo de madurez cognitiva en geometría. Empieza con casos particulares, a fin de familiarizar al alumno con el teorema y sus partes. Luego se dan distintas demostraciones del teorema de Pitágoras, adecuadas para diferentes niveles de desarrollo de los alumnos, primero demostraciones informales, luego demostraciones formales. Después se generaliza el teorema en varias direcciones, pero siempre en un contexto euclideano: en el espacio, trigonometría. Finalmente se analiza el teorema en $\mathbf{R}^2$ visto como espacio métrico y vectorial, donde una métrica euclideana, sugerida por el teorema de Pitágoras, es una de las posibles métricas, pero no la única. Finalmente se ve el teorema en la esfera, la cual es un modelo de geometría no euclideana. El artículo contiene más de lo que una sola persona pueda asimilar o estar interesada. Hay actividades adecuadas para alumnos de primaria y de secundaria, para que tengan un primer contacto con el teorema de manera empírica o informal. Hay demostraciones formales y resultados al alcance de los alumnos de nivel medio. Hay otras partes dirigidas al maestro de matemáticas y al alumno de matemáticas de nivel superior, a fin de que reconozcan el papel y la importancia del teorema, no sólo en la geometría, sino en otras áreas de las matemáticas. Como en las ferias, hay mucho de donde escoger. Que cada quien se lleve lo más adecuado a su nivel e interés.

Enfoque empírico

Casos particulares

Este teorema es conocido desde la antigüedad. Los egipcios conocían el triángulo de lados 3, 4, 5, y sabían que éste es un triángulo rectángulo. Se puede verificar que la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa: $9 + 16 = 25$, esto es, $3^2 + 4^2 = 5^2$.

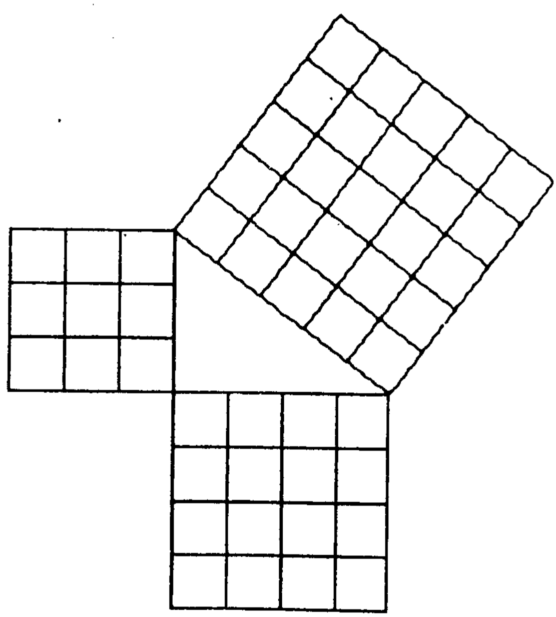


Figura 2

El alumno puede usar papel cuadriculado para ilustrar algunos otros casos particulares, como el triángulo con lados 5, 12, 13.

Un ángulo recto con una soga

El converso del teorema también es válido y puede ser utilizado para formar ángulos rectos. Si se toma una soga y se marcan en ella 12 segmentos de igual longitud, y luego se cierra y se tensa formando un triángulo cuyos lados sean 3, 4 y 5 se verá que se forma un ángulo recto (ver fig. 3).

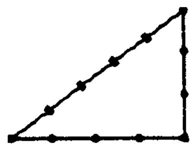


Figura 3

Aunque el método empírico no constituye una demostración matemática, ya que está limitado por la imprecisión de las mediciones, y porque sólo se hace para algunos casos, es conveniente, sin embargo, que antes de demostrar el teorema los alumnos efectúen algunas construcciones y mediciones. Algunos materiales concretos como tangramas y el geoplano se pueden utilizar para familiarizar al alumno con el resultado del teorema, sus partes y relaciones.

Tangramas

Los tangramas son piezas de cartón u otros materiales que vienen en varias formas, incluyendo triángulos rectángulos isósceles (con ángulos de 45°). Las piezas se pueden acomodar como indica la figura 4. Se ve claramente que para este caso particular, la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos (dos triángulos cada uno) es igual al área del cuadrado de la hipotenusa (cuatro triángulos).

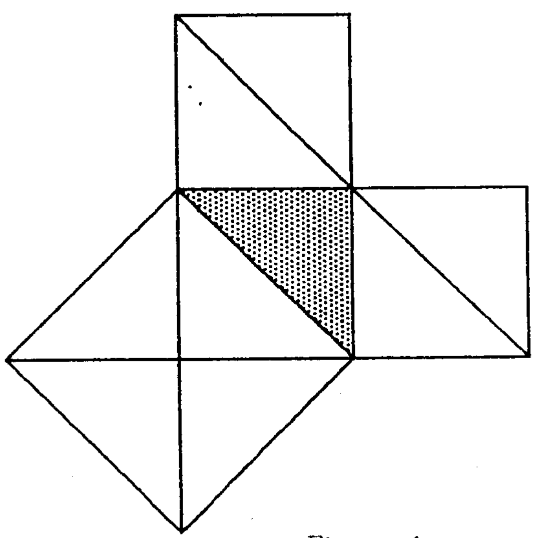


Figura 4

Pitágoras en el geoplano

El geoplano también puede ser utilizado para que los alumnos ilustren algunos casos particulares del teorema. El geoplano es una tablilla con una cuadrícula de clavos, donde se pueden colocar ligas. También se puede utilizar papel cuadriculado y lápiz.

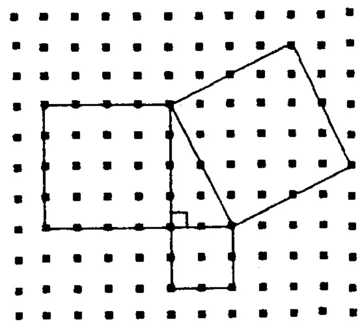


Figura 5

El geoplano puede ser utilizado también por los alumnos para explorar generalizaciones del teorema de Pitágoras, tales como las sugeridas por las figuras (ver fig. 6). Se construyen figuras semejantes en cada uno de los lados de un triángulo rectángulo. La suma de las áreas de las figuras sobre los catetos es igual al área de la figura sobre la hipotenusa.

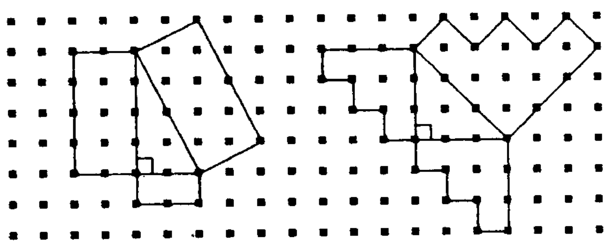
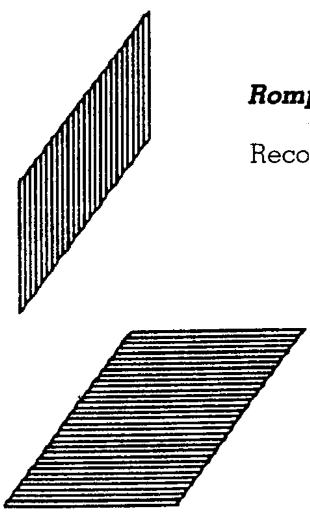


Figura 6 Extensiones de Pitágoras



Rompecabezas de Pitágoras

Recorta las piezas del rompecabezas

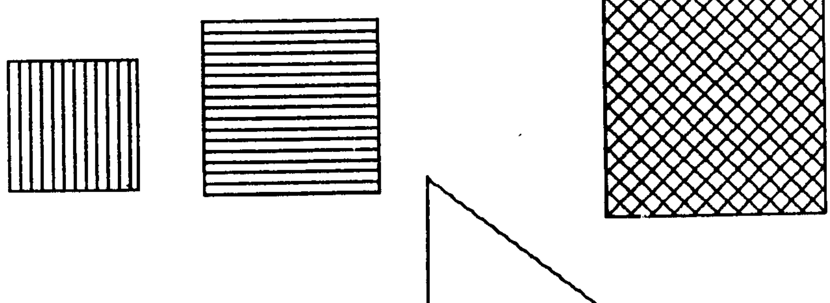


Figura 7

Con estas piezas armaremos el rompecabezas siguiente.

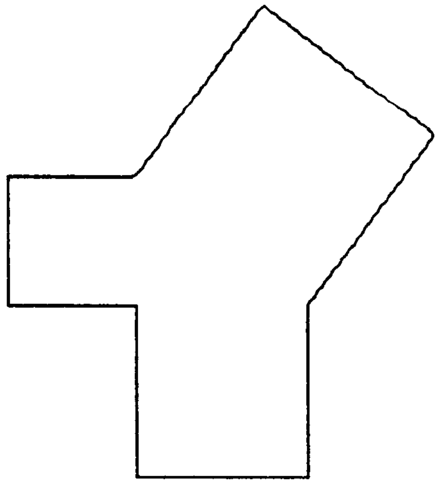


Figura 8

1) Utilizando el triángulo y los tres cuadrados arma el rompecabezas sobre la plantilla base.

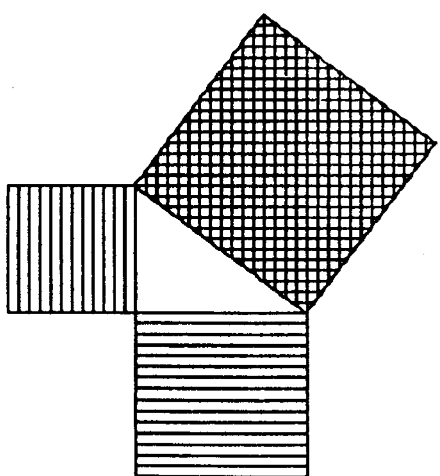


Figura 9

2) Con el triángulo, los dos cuadrados mayores y el paralelogramo menor arma el rompecabezas. ¿Qué puedes concluir con respecto a las áreas del paralelogramo que acabas de usar y el cuadrado menor?

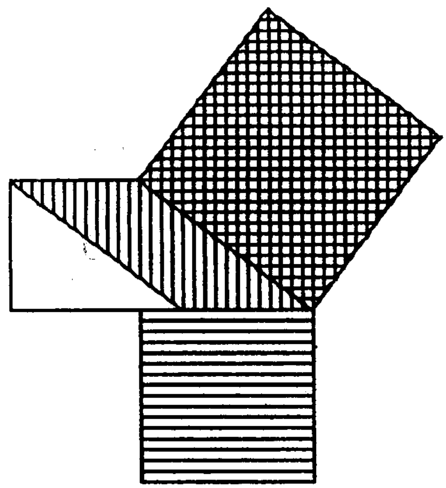


Figura 10

3) Con el triángulo, el cuadrado mayor, el cuadrado menor, y el paralelogramo mayor arma el rompecabezas. ¿Qué puedes concluir sobre las áreas del paralelogramo mayor y el cuadrado que no usaste?

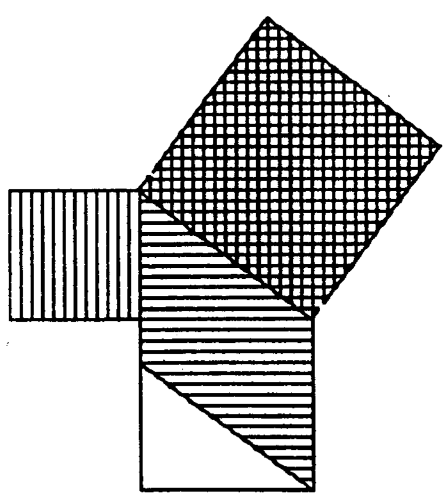


Figura 11

4) Con el triángulo, los dos paralelogramos y los dos cuadrados menores arma el rompecabezas. ¿Qué puedes concluir acerca de las áreas de los dos paralelogramos y el área del cuadrado mayor?

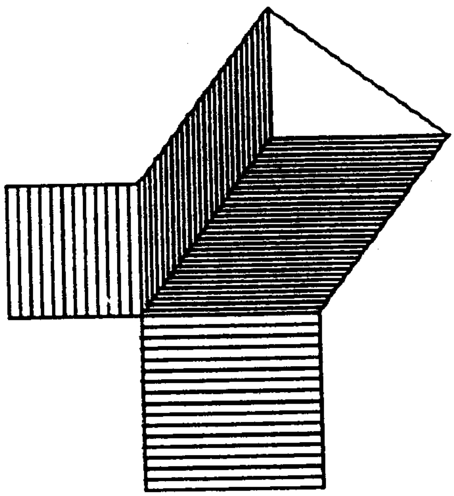


Figura 12

Usando la información de 2), 3) y 4) ¿a qué conclusión puedes llegar?

Demostraciones con triángulos rectángulos

Recorta 4 triángulos rectángulos del mismo tamaño

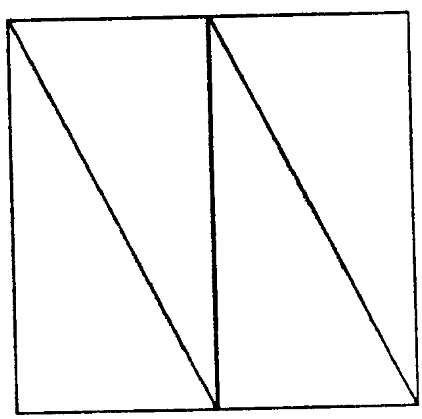


Figura 13

Utiliza los cuatro triángulos y el cuadrado de la hoja adjunta para demostrar el teorema de Pitágoras.

a) Acomoda los triángulos del modo que se indica en la figura 14.

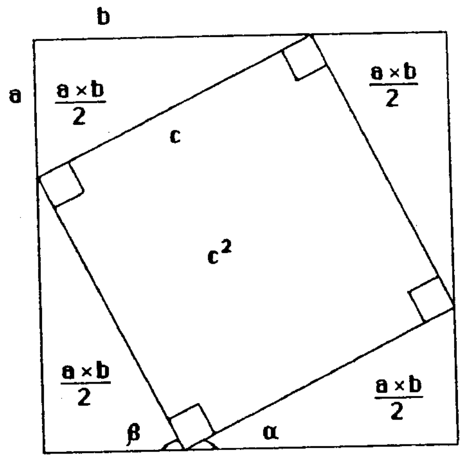


Figura 14

Si **a** es el cateto menor, **b** el cateto mayor, el lado del cuadrado total será $(a + b)$ y su área $(a + b)^2$. Este cuadrado queda parcialmente cubierto por los cuatro triángulos. La figura que queda sin cubrir en el centro es un cuadrado de lado c y por tanto su área es c^2.

b) Ahora acomoda los triángulos del modo indicado en la figura 15.

En este caso el cuadrado total queda también parcialmente cubierto por los cuatro triángulos y el área que queda sin cubrir está compuesta por dos cuadrados, uno de área b^2 y el otro de área a^2.

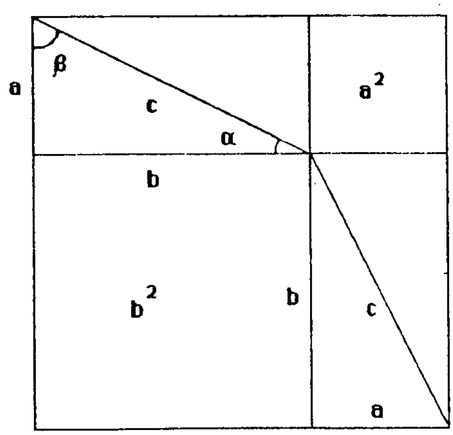


Figura 15

De la figura 14 y de la figura 15 se obtiene la siguiente ecuación:

$$c^2 + 4 \times ab/2 = a^2 + b^2 + 4 \times ab/2$$

De donde

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Otra demostración usando los cuatro triángulos

Coloca los triángulos como se muestra en la figura 16, para demostrar de otra forma el Teorema de Pitágoras. El cuadrado tiene ahora lado c y queda parcialmente cubierto por los cuatro triángulos. Enmedio queda un cuadrado de lado (b − a) sin cubrir. De aquí se tiene la siguiente relación:

$$(b - a)^2 + 2ab = c^2$$

de donde

$$a^2 + b^2 = c^2$$

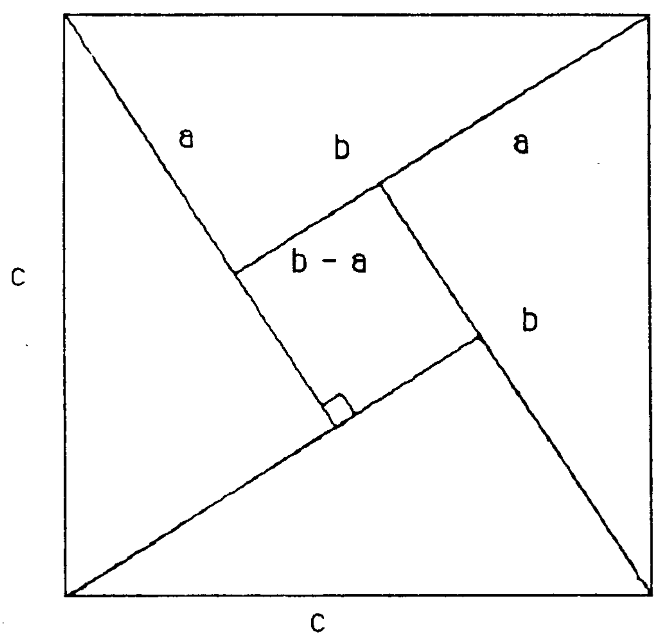


Figura 16

Otra demostración

La figura 17 está compuesta por los cuadrados de los catetos y dos triángulos rectángulos (ver fig. 18).

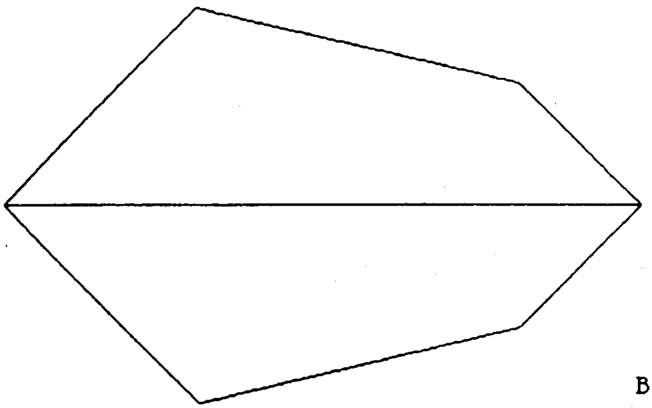


Figura 17

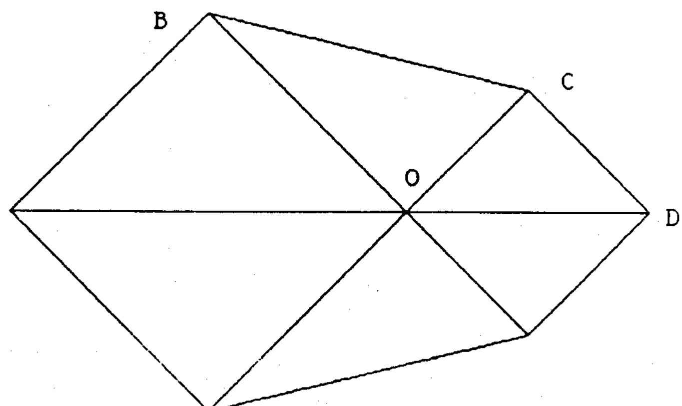


Figura 18

Corta la figura 17 por la línea central. Voltea la mitad y únela a lo largo del corte de la manera siguiente (ver fig. 19).

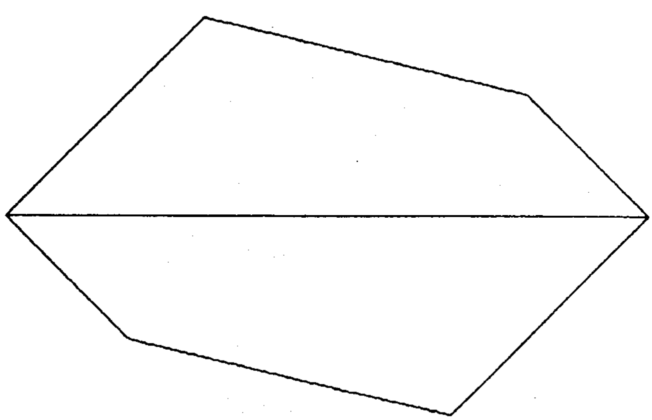


Figura 19

Si se une C con E y B con F se obtienen dos triángulos congruentes con los originales (ver fig. 20). La figura restante es un cuadrado de lado de longitud c. Para eso basta ver que el ángulo BCE es recto. Por una parte (fig. 20) el ángulo BCD = ángulo BCE + ángulo ECD. Por otro lado (fig. 18) BCD = ángulo BCO + 90°. Como ángulo BCO = ángulo ECD se tiene que ángulo BCE = 90°.

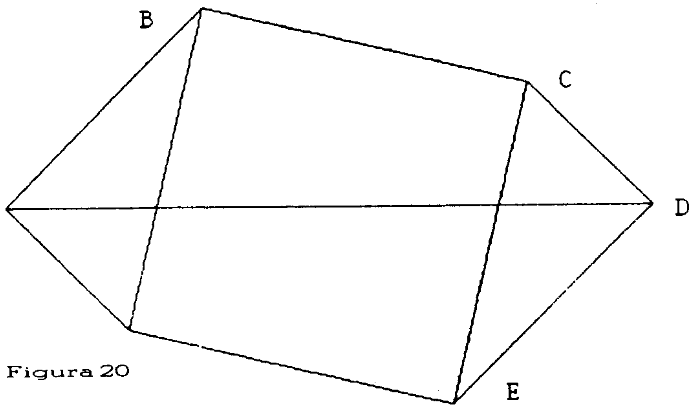


Figura 20

Como el área total de las figuras 17 y 19 es la misma, y en ambas tenemos los dos triángulos rectángulos, podemos concluir que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Demostraciones por descomposición y reagrupamiento

La siguiente figura sugiere una demostración del teorema de Pitágoras descomponiendo el cuadrado sobre el cateto mayor b y utilizando las piezas junto con el cuadrado del cateto menor a para obtener el cuadrado de la hipotenusa. Por el centro del cuadrado del cateto mayor se trazan una parelela a la hipotenusa, y una perpendicular a esta línea. Se puede comprobar que las piezas así obtenidas se pueden acomodar sobre el cuadrado de la hipotenusa y que el hueco que queda es exactamente a^2

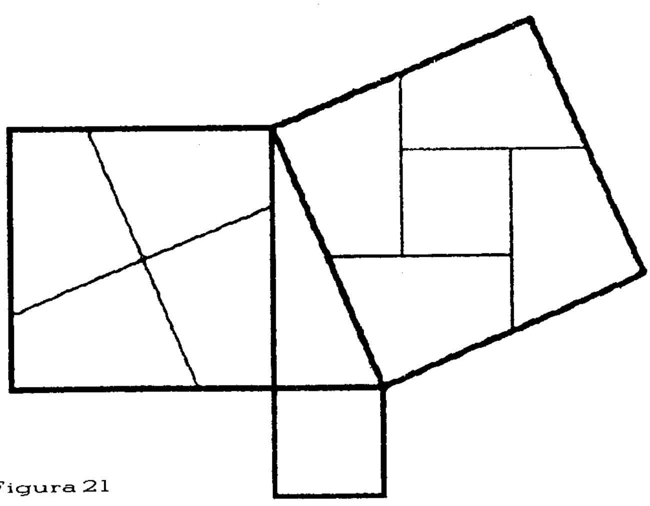


Figura 21

Múltiples formas de descomponer los cuadrados $a^2 + b^2$ son posibles de modo que al juntar las piezas de manera conveniente se obtiene c^2.

Otra demostración se sugiere con la siguiente figura

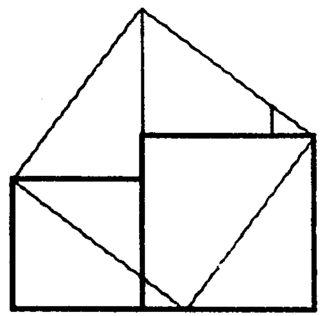


Figura 22

Un lema importante

Las siguientes demostraciones del teorema se basan en este lema:
En un triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de ese cateto (ver fig. 23).

$b^2 = cq$

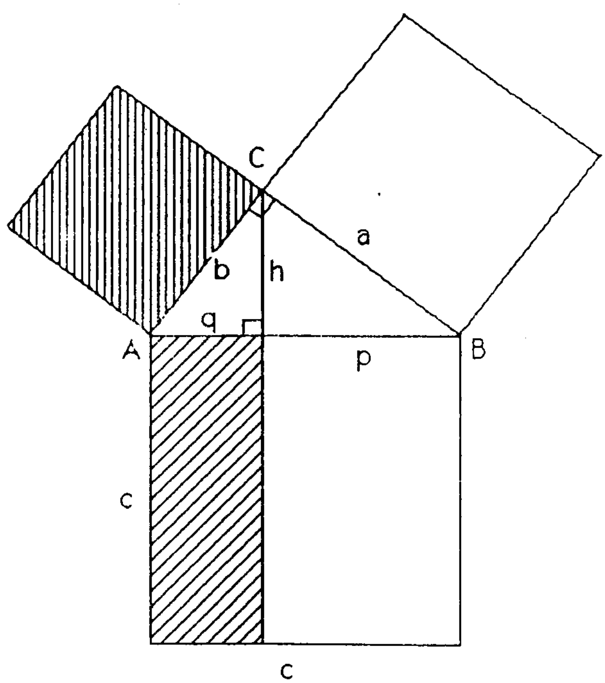


Figura 23

De manera análoga se puede probar que $a^2 = cp$

El teorema de Pitágoras se puede obtener sumando los dos resultados.

$$a^2 + b^2 = cq + cp = c(q + p) = c^2$$

Primera demostración del lema

El cuadrado ACSR tiene la misma área que el paralelogramo ABR'R ya que tienen la misma base RA y la misma altura AC (ver fig. 24).

Si ahora rotamos el paralelogramo 90° alrededor de A en el sentido de las manecillas del reloj, la línea RA coincidirá con AC y AB con AT el paralelogramo ATT'C tiene la misma área que el rectángulo ATT"H, entonces se tiene que el cuadrado original b^2 también tiene igual área (ver fig. 25).

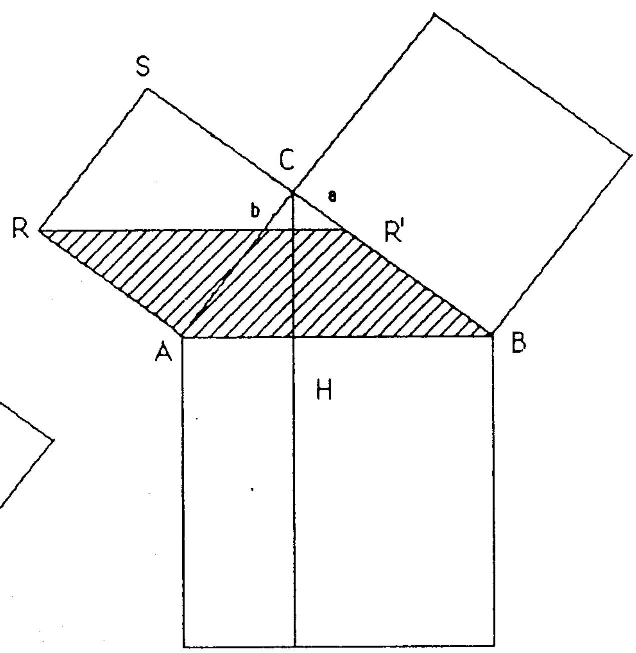


Figura 24

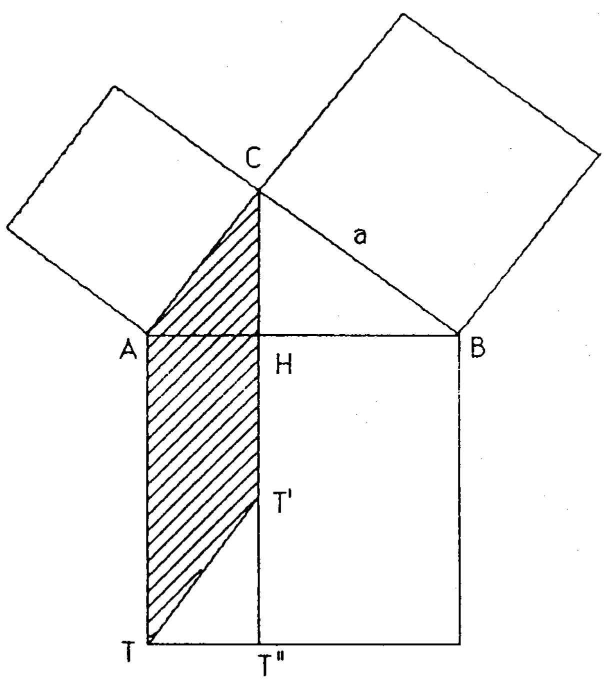


Figura 25

Otra demostración del lema

Se prolongan los lados de los cuadros de los catetos RS y UV, y sea D la intersección. Si se une D y C se obtienen 2 triángulos congruentes a ABC. Como el ángulo VCD y el HCA son iguales por ser opuestos por el vértice, y como el ángulo BAC es igual a VDC, se tiene que los triángulos AHC y ABC son semejantes por lo que H es la altura de ABC (ver fig. 26).

El paralelogramo ACDS' tiene la misma área que el cuadrado ACSR ya que tienen la misma base AC y la misma altura SC (ver fig. 27). Si trasladamos el

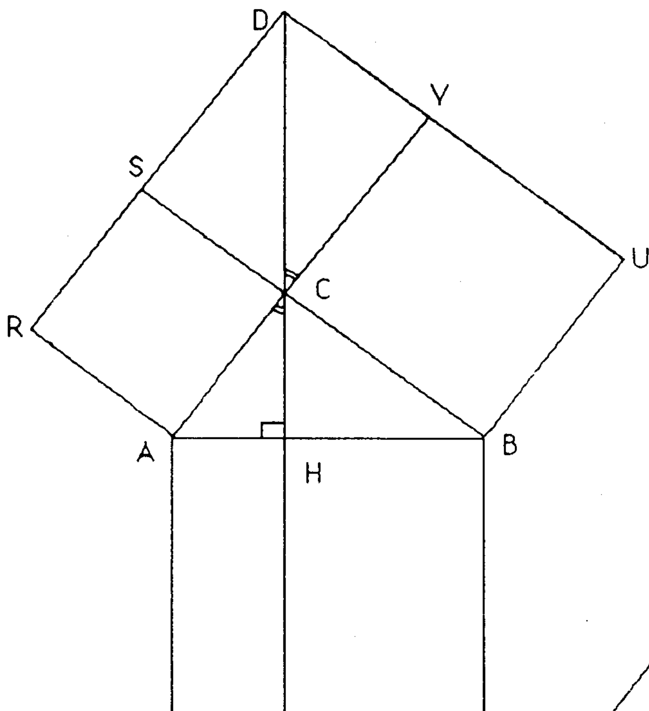


Figura 26

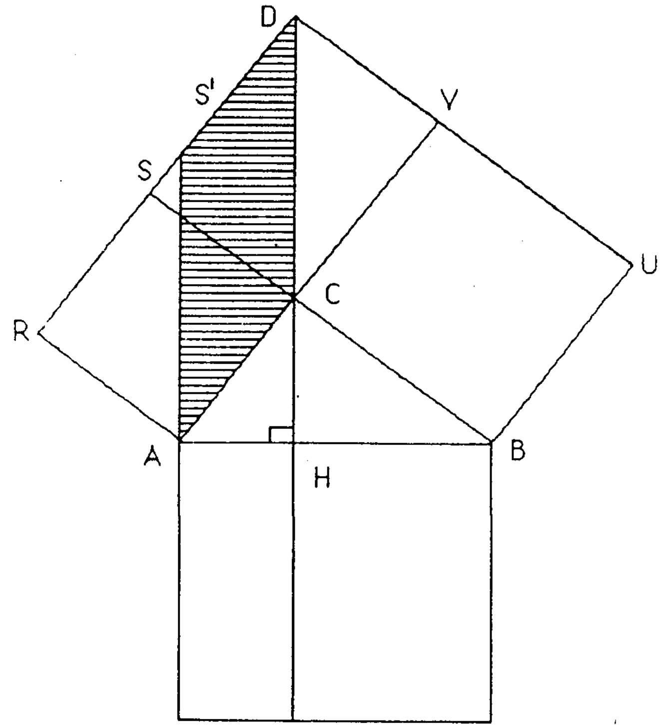


Figura 27

paralelogramo hacia abajo, una distancia c, como CD = AB, el paralelogramo queda como ATT'C (ver fig. 28). Y este paralelogramo tiene la misma área que el rectángulo ATT''H.

La demostración de Euclides

La siguiente es esencialmente la demostración de la proposición 47 de los Elementos de Euclides:
El triángulo ACR tiene la misma área que el triángulo ABR ya que tienen la misma base RA y la misma altura AC (ver fig. 29).

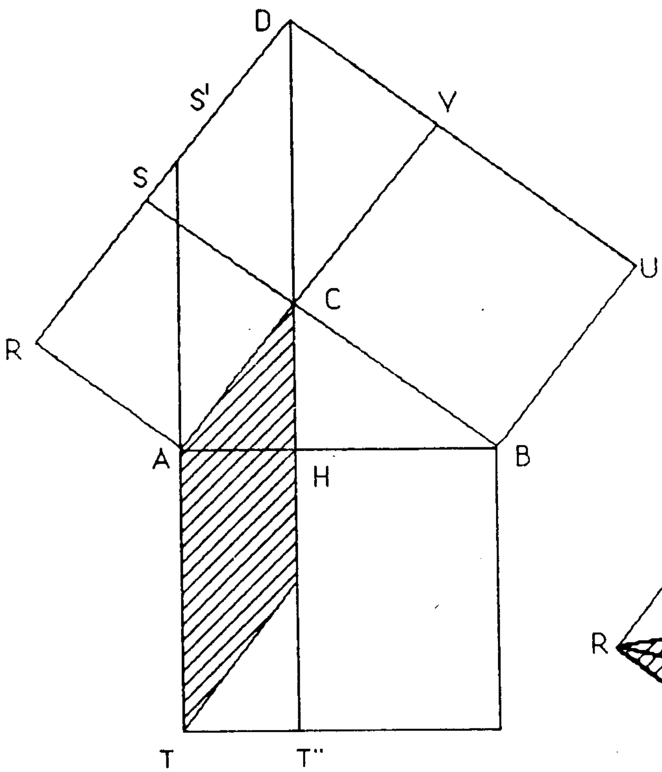


Figura 28

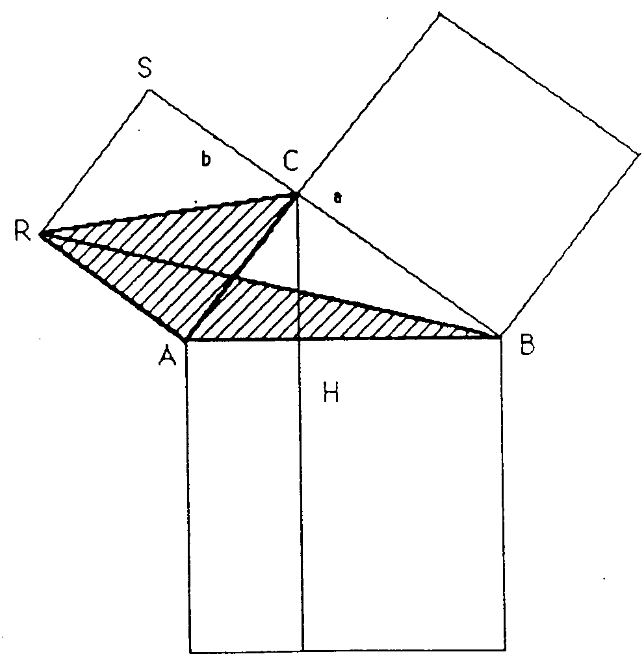


Figura 29

Los triángulos ABR y CAT son congruentes ya que el segmento RA es congruente con AC, y AB con AT, y los ángulos BAR y TAC son iguales.

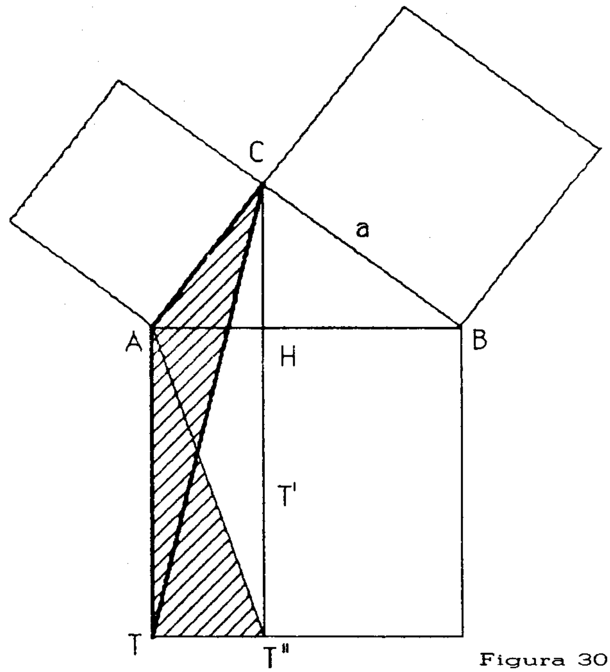


Figura 30

El triángulo CAT tiene la misma área que el triángulo ATT" ya que tienen la misma base y la misma altura. Por lo tanto el triángulo ACR, tiene la misma área que el triángulo ATT". Como estos triángulos son respectivamente la mitad del cuadrado b^2 y del rectángulo ATT"H, éstos tienen la misma área.

Demostración con triángulos semejantes

Hemos demostrado el lema utilizando argumentos de áreas que

$$b^2 = cq$$

Una forma alternativa de probar el lema es utilizar triángulos semejantes y proporciones.

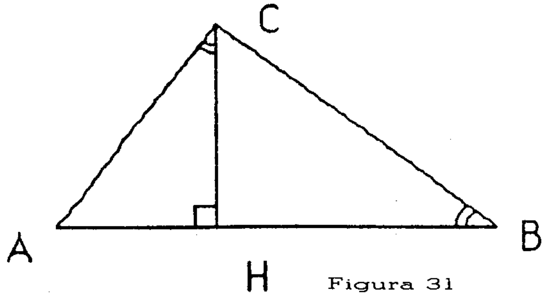


Figura 31

CH es la altura del triángulo ABC, por tanto el ángulo HCA es igual al ángulo HBC, ya que ángulo HAC + ángulo HCA = 90, y ángulo HAC + ángulo HBC = 90. Por lo tanto los triángulos ABC y AHC son semejantes, por lo que los lados correspondientes son proporcionales.

$$b/c = q/b$$

de donde multiplicando ambos lados por b y por c se obtiene la relación buscada.

$$b^2 = cq$$

El converso del teorema de Pitágoras

La relación Pitagórica nos da condiciones necesarias y suficientes para que un triángulo sea rectángulo. Es decir, $a^2 + b^2 = c^2$ si y sólo si el ángulo C es recto.

Si el ángulo C es agudo, se tiene

$$a^2 + b^2 > c^2$$

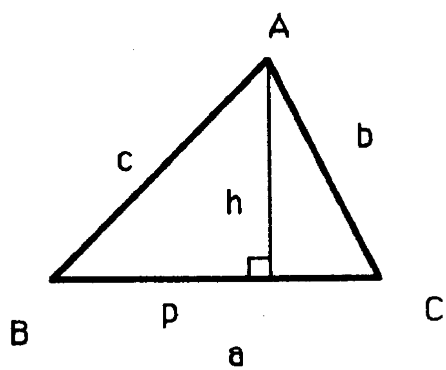


Figura 32

Como $c^2 = p^2 + h^2$, como $h < b$ y $p < a$, se tiene $a^2 + b^2 > c^2$.

Si el ángulo en C es obtuso, entonces

$$a^2 + b^2 < c^2$$

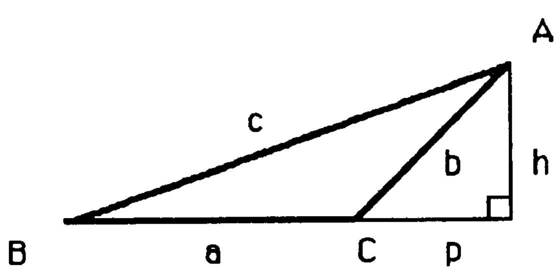


Figura 33

Se tiene $b^2 = h^2 + p^2$, y $c^2 = (a + p)^2 + h^2$

Como $a^2 + p^2 < (a + p)^2$, se tiene $a^2 + b^2 < c^2$.

Ternas Pitagóricas

Tres números enteros a, b y c que satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$ constituyen una terna pitagórica. Los egipcios conocían y utilizaban la terna pitagórica 3, 4, 5. Los hindús conocían otras ternas pitagóricas tales como

5, 12, 13
8, 15, 17
12, 35, 37

y los babilonios, dos milenios antes de nuestra era, elaboraron listas de ternas pitagóricas, con algunas ternas tan impresionantes como

3367, 3456, 4825

De cualquier terna pitagórica a, b, c, se pueden obtener una familia de ternas: ra, rb, rc, donde r es cualquier entero. Así de 3, 4, 5 se obtiene 6, 8, 10 para $r = 2$ ó 15, 20, 25 para $r = 5$. Familias de ternas corresponden a triángulos semejantes.

La siguiente fórmula, atribuida a Pitágoras, nos permite obtener ternas pitagóricas:

(1) $$m^2 + [(m^2 - 1)/2]^2 = [(m^2 + 1)/2]^2$$

Esta ecuación se satisface para cualquier valor de m, y si m es impar se obtienen ternas pitagóricas, sustituyendo el valor de m en los tres términos m, $[(m^2 - 1)/2]$, y $[(m^2 + 1)/2]$ de la fórmula. Por ejemplo si $m = 3$ se obtiene la terna 3, 4, 5. ¿Cuáles son las ternas que se obtienen para $m = 5$ y $m = 7$?

Sin embargo, no todas las ternas pitagóricas se obtienen a partir de esta fórmula. La siguiente expresión es un método todavía más general para obtener ternas pitagóricas

(2) $$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

Si $n = 1$ se obtiene la fórmula anterior (1).

Usa la fórmula (2) para obtener las ternas pitagóricas para los siguientes valores de m y n:

$m = 2, n = 1$	$m = 3, n = 1$
$m = 3, n = 2$	$m = 4, n = 1$
$m = 4, n = 2$	$m = 4, n = 3$