■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 4 - No. 1 • Abril 1992 ■ © GEI ■ Pág. 21 ■

Sobre un Teorema de Karl Marx

Introducción

El objeto de este artículo es mostrar cómo conocimientos elementales de álgebra lineal pueden ser utilizados para estudiar algunos problemas considerados por Karl Marx en *El Capital*. Los requisitos son cubiertos fácilmente en cualquier curso introductorio de álgebra lineal, a exepción quizá de algunos resultados de matrices no-negativas, que incluímos a continuación.

La mayor parte del material de este artículo aparece en los libros de J.W.S. Cassels, D., Gale y L. Pasinetti.

La siguiente notación es usada en este trabajo. Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, ,y_n)$ dos vectores del espacio real n-dimensional. Entonces:

$x \geq y$ significa que $x_i \geq y_i$ para toda i.

$x > y$ significa que $x_i \geq y_i$ para toda i, pero $x \neq y$.

$x >> y$ significa que $x_i > y_i$ para toda i.

Existe toda una teoría acerca de matrices con entradas no-negativas, que tuvo su origen en los trabajos de Perron y Frobenius. Nosotros sólo utilizaremos el siguiente resultado, cuya demostración puede verse en el libro de Cassels.

TEOREMA. (Perron-Frobenius). *Sea* A *una matriz cuadrada con* $A > 0$. *Entonces* A *tiene un valor propio real* $\mu > 0$ *con un vector propio* $p > 0$, *tales que:*

(i) *Todo valor propio* λ *de* A *satisface* $|\lambda| \leq \mu$.
(ii) *Para un real* $\sigma \geq 0$ *existe* $d > 0$ *con* $d >> \sigma A d \leftrightarrow \mu\sigma < 1$.
(iii) *Para un real* $\sigma \geq 0$ *se tiene que* $[I - \sigma A]^{-1} > 0$ *si* $\mu\sigma < 1$.
(iv) $\mu(A) = \mu(A^t)$*.

* t: denota transposición.

Guillermo Pastor

Departamento de Matemáticas, ITAM
Río Hondo No. 1
San Angel 01000, D.F.

Modelos de Leontief

Consideremos una economía con *n bienes* producibles y con *n procesos (actividades)* básicos $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$. Supongamos además que el proceso $\mathbf{P}_i$ solamente produce el bien i, y que para producir una unidad del bien i se requieren a_{1i} unidades del bien 1, a_{2i} unidades del bien 2, ..., a_i unidades del bien n, como insumos del proceso $\mathbf{P}_i$. Si los *rendimientos son constantes a escala,* para producir $\mathbf{y}_i$ unidades del bien i se requieren, como insumos del proceso $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{y}_i a_{1i}$ unidades del bien 1, ..., $y_i a_{ni}$ unidades del bien n. Diremos que la *economía produce a intensidad* $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ cuando se producen $\mathbf{y}_1$ unidades del bien 1, ..., $\mathbf{y}_n$ unidades del bien n. Al vector $\mathbf{y}$ se le llama *vector de intensidad*. Cuando la economía produce a intensidad $\mathbf{y}$, requiere en conjunto de los siguientes insumos:

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{y}_1 a_{11} + \mathbf{y}_2 a_{12} + & \ldots + \mathbf{y}_n a_{1n} & \text{unidades del bien 1} \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\mathbf{y}_1 a_{ni} + \mathbf{y}_2 a_{n2} + & \ldots + y_n a_{nn} & \text{unidades del bien } n
\end{array}
$$

En notación matricial es simplemente $\mathbf{Ay}$ donde la matriz $\mathbf{A}$ es la matriz con entradas a_{ij}. La matriz $\mathbf{A}$ es llamada *matriz de coeficientes de producción* y es claramente una matriz no-negativa. Así, el *producto neto* es $\mathbf{y} - \mathbf{Ay}$. Diremos que un modelo de producción es *productivo* si existe $\mathbf{y} \geq 0$ con $\mathbf{y} - \mathbf{Ay} \geq 0$. Una matriz tal se le llama también *productiva*. Este modelo se le conoce como *modelo de Leontief cerrado.*

(1) **LEMA.** *Si* $\mathbf{A}$ *es productiva y* $\mathbf{y} \geq \mathbf{Ay}$, *entonces* $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

Demostración. Si $\mathbf{A}$ es productiva, existe $\mathbf{z} \geq 0$, $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n)$, tal que $\mathbf{z} >> \mathbf{Az}$. Pero entonces, $\mathbf{z}_j >$ (renglón j de $\mathbf{A}$)$\cdot\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$. Por lo tanto, $\mathbf{z} >> 0$.

Si $\mathbf{y} \geq \mathbf{Ay}$, y además, $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ tuviese algunas coordenadas negativas, entonces $\theta > 0$, donde

$$\theta = \mathrm{MAX}\{-(\mathbf{y}_1/\mathbf{z}_1), \ldots, -(\mathbf{y}_n/\mathbf{z}_n)\}.$$

Digamos que $\theta = -(\mathbf{y}_1/\mathbf{z}_1)$ y definamos $\mathbf{y}' = \mathbf{y} + \theta\mathbf{z} = (\mathbf{y}'_1, \ldots, \mathbf{y}'_n)$. Entonces, $\mathbf{y}' \geq 0$ con $\mathbf{y}'_1 = 0$. Pero

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} + \theta\mathbf{z} \geq \mathbf{Ay} + \theta\mathbf{z} >> \mathbf{Ay} + \theta\mathbf{Az} = \mathbf{Ay}' \geq \mathbf{0}$$

de donde se sigue que $\mathbf{y}'_1 > 0$, contradiciendo que $\mathbf{y}'_1 = 0$.

(2) **COROLARIO.** *Si* $\mathbf{A}$ *es productiva, entonces* $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ *es invertible.*

Demostración. Si $(I - A)y = 0$, *entonces* $\mathbf{y} \geq \mathbf{Ay}$ *y* $(-y) \geq \mathbf{A}(-y)$, *y por el lema,* $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ *y* $-y \geq 0$. *Por lo tanto* $y = 0$.

La matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ *juega un papel muy importante en la teoría de los modelos lineales de producción y tiene una interpretación económica interesante:*

Si denotamos por $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ a las columnas de $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, entonces $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{w}_j = \mathbf{e}_j = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Así, $\mathbf{w}_j$ representa la intensidad a la que tiene que trabajar el sistema para obtener como producto neto precisamente una unidad del bien j.

(3) **EJEMPLO.** Consideremos una economía con 3 bienes y 3 procesos: básico, industrial y de servicios. Si la matriz **A** de coeficientes de consumo está dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.4133 & 2.57 & 0.5 \\ 0.0266 & 0.2857 & 0.05 \\ 0.02 & 0.2857 & 0.25 \end{pmatrix}$$

entonces

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 2.1626 & 8.5909 & 2.0145 \\ 0.0869 & 1.7835 & 0.1768 \\ 0.0908 & 0.9085 & 1.4544 \end{pmatrix}$$

Así, para obtener como producto neto una unidad del bien 1 es necesario producir, en términos brutos (brutalmente), 2.1626 unidades del bien 1, 0.0869 unidades del bien 2, y 0.0908 unidades del bien 3. Si deseamos obtener como producto neto una unidad de cada uno de los bienes, es necesario que el sistema trabaje a una intensidad igual a la *suma de los renglones*. En este caso, para obtener una unidad básica, una unidad industrial y una unidad de servicios es necesario trabajar a intensidad

$$\begin{pmatrix} 2.1626 \\ 0.0869 \\ 0.0908 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8.5909 \\ 1.7835 \\ 0.9085 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.0145 \\ 0.1768 \\ 1.4544 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.768 \\ 2.0472 \\ 2.4537 \end{pmatrix}$$

El próximo teorema afirma que si **A** es productiva, entonces es posible encontrar un vector de intensidad que nos proporciona ¡cualquier producto neto!

(4) **TEOREMA.** *Si* **A** *es productiva y* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, *entonces la ecuación*

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{y} = \mathbf{x}$$

tiene solución única $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

Demostración. Por ser **A** productiva, sabemos que $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ es invertible y por lo tanto existe un único **y** con $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Como por hipótesis $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{y} \geq \mathbf{Ay}$ y por el lema se tiene que $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

Si $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$ es un *vector de precios*, la ganancia de la actividad $\mathbf{p}_i$ al producir cada unidad del bien i está dada por

$$\mathbf{P}_i - \sum_j (\mathbf{p}_j \, a_{ji})$$

El *vector de ganancias* **q** viene entonces dado por $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{pA}$. Las coordenadas de este vector son las ganancias o pérdidas que tienen las distintas actividades cuando cada una produce una unidad.

(5) **TEOREMA.** *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) *La matriz* **A** *es productiva.*

(ii) *La matriz* $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ *es no-negativa, i.e.,* $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \geq \mathbf{0}$.
(iii) *Todo valor propio* λ *de* $\mathbf{A}$ *satisface* $|\lambda| < 1$.
(iv) *Existe un vector de precios* $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$ *con* $\mathbf{p} >> \mathbf{pA}$.

Demostración. (1) → *(ii)*. Si denotamos por $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ a las columnas de la matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, entonces

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{w}_i = \mathbf{e}_i = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

Por el teorema (4) se tiene que $\mathbf{w}_i$ es único y además $\mathbf{w}_i \geq \mathbf{0}$.

(ii) → (i). Si $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \geq \mathbf{0}$ y definimos $\mathbf{x}$ como $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es el vector columna con 1's en todas sus componentes. Entonces $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ y $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{u}$, de donde $\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{u}$, y por tanto $\mathbf{x} >> \mathbf{Ax}$.

(i) ↔ (iii). Es una consecuencia inmediata del inciso (ii) del teorema de matrices no negativas del apéndice ($\sigma = 1$).

(i) ↔ (iv). Es también una consecuencia directa de los incisos (iv) y (ii) del mismo teorema ($\sigma = 1$).

La propiedad (ii) del teorema (5) nos proporciona un criterio muy simple para decidir si una matriz $\mathbf{A}$ es σ no es productiva. El inciso (iv) nos asegura que existe un sistema de precios donde toda actividad produce ganancias, de hecho, es posible ajustar $\mathbf{p}$ a un esquema de ganancias:

(6) TEOREMA. *Si* $\mathbf{A}$ *es productiva y* $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$, *entonces existe un sistema de precios* $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ *con* $\mathbf{q} = \mathbf{p}(\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

Demostración. Si $\mathbf{A}$ es productiva sabemos que $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ es invertible. Por lo tanto, dado $\mathbf{q}$ existe $\mathbf{p}$ con $\mathbf{q} = \mathbf{p}(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. De hecho, $\mathbf{p} = \mathbf{q}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Como tanto $\mathbf{q}$ como $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ son no-negativos se tiene que $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$.

Si un bien no es producido por ningún proceso entonces se llama un *factor de producción*. Ejemplos típicos de factores de producción son el trabajo, la maquinaria y la tierra cultivable.

Un modelo de producción con un solo factor de producción (trabajo) se le llama un *modelo de Leontief abierto*. Supondremos que cada actividad $\mathbf{P}_i$ requiere de $\mathbf{l}_i > 0$ unidades de trabajo para producir una unidad del bien i. Denotaremos por $\mathbf{l}$ al vector de trabajo $(\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n)$.

(7) TEOREMA. *Si el precio por unidad de trabajo es* 1, *entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
(i) *La matriz* $\mathbf{A}$ *es productiva.*
(ii) *Existe un sistema de precios* $\mathbf{p} >> 0$ *tal que* $\mathbf{p} \geq (\mathbf{pA} + \mathbf{l})$, *i.e., ninguna actividad tiene pérdidas después de pagar los salarios.*

Demostración. (i) → (ii). Basta tomar $\mathbf{p} = \mathbf{l}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, pues en este caso $\mathbf{p} = \mathbf{pA} + \mathbf{l} \geq \mathbf{l} >> \mathbf{0}$.

(ii) → (i). Si $\mathbf{p} \geq (\mathbf{pA} + \mathbf{l})$, por ser $\mathbf{l} >> 0$, claramente $\mathbf{p} >> \mathbf{pA}$, y el resultado se sigue del teorema (5).

Si se satisfacen las condiciones del teorema (7), entonces vimos que, de hecho, existe un único sistema de precios $\mathbf{v} >> \mathbf{0}$ tal que la ganancia de toda actividad es cero, es decir, la ganancia de cada actividad es pagada íntegramente como salarios. Este sistema de precios $\mathbf{v}$ satisface

(8) $\quad \mathbf{v} = \mathbf{l}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

Si $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{Ay}$ es el producto neto a intensidad y, entonces la cantidad de trabajo necesaria para producir, en términos netos, el haz de bienes $\mathbf{x}$ es el producto punto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$, pues

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{l}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{y} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{y}.$$

Así, $\mathbf{v}$ representa una medida del trabajo necesario para producir una unidad neta de cada bien por el sistema económico. Al vector $\mathbf{v}$ se le conoce como el *vector de valores*. Recordemos que si $\mathbf{w}_i$ es la i-ésima columna de la matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, entonces $\mathbf{w}_i$ es la intensidad a la que debe trabajar el sistema para obtener una unidad de producto neto del bien i, y si $\mathbf{v}_i$ denota la i-ésima componente del vector de valores $\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{v}_i = \mathbf{l} \cdot \mathbf{w}_i$ es la cantidad de trabajo necesaria para producir una unidad de producto neto del bien i.

Modelos de Marx

Formalizaremos ahora algunas ideas de Marx. Sea $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n)$ el *haz de subsistencia* de un trabajador en un periodo de tiempo de producción ('un año'). Es conveniente pensar en $\mathbf{d}$ como un vector columna. La *matriz aumentada* $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} + \mathbf{dl}$ tiene por entradas a los coeficientes de consumo incluidos los salarios en especie.

Consideramos dos sistemas: el de valores y el de precios de producción.

(a) Sistema de valor

Sea $\mathbf{v} = \mathbf{l}[\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$. Recordemos que $\mathbf{v}$ representa:

(i) El trabajo necesario para producir una unidad neta de los distintos bienes.

(ii) El sistema de precios bajo el cual la ganancia de cada proceso es transformada totalmente en salarios (cuando, además, el precio por unidad de trabajo es 1).

Los capitalistas fijan el sistema de precios $\mathbf{v}$ y pagan al trabajador un salario de subsistencia $\sigma = \mathbf{vd}$. Supongamos por ahora que $\sigma < 1$.

La diferencia $1 - \sigma$ representa el *salario no pagado* o *valor excedente* o *plusvalía* que es retenido por los capitalistas. Observemos que σ puede ser interpretado como la fracción del trabajo de la cual el trabajador es remunerado justamente, mientras que $1 - \sigma$ puede ser interpretado como la fracción del trabajo que el obrero trabaja para beneficio del capitalista.

La razón

$$(9) \qquad \sigma = (1 - \sigma)/\sigma$$

es llamada la *razón de plusvalía o razón de explotación.*

Puesto que por (8) $\mathbf{v} = \mathbf{vA} + \mathbf{l}$ y como $\mathbf{l} = \sigma + \sigma\delta$, entonces tenemos

$$(10) \qquad \begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{vA} + (\mathbf{vd})\mathbf{l} + \sigma(\mathbf{vd})\mathbf{l} \\ &= \mathbf{vA} + \mathbf{v}(1 + \sigma)(\mathbf{dl}) \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{A} + (1 + \sigma)\mathbf{dl}) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(11) \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{A}^{+} + \sigma(\mathbf{dl}))$$

y esta ecuación tiene solución $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ si y sólo si

$$(12) \qquad \det[\mathbf{I} - \mathbf{A}^{+} - \sigma(\mathbf{dl})] = 0$$

Esta expresión nos permite determinar σ sin conocer $\mathbf{v}$.

La ecuación (10) nos separa el valor de cada bien en 3 componentes:

(i) $\mathbf{vA}$, el reemplazo de insumos o *capital constante*.
(ii) $\mathbf{vdl}$, los salarios o *capital variable.*
(iii) $\sigma(\mathbf{vdl})$, la *plusvalía*.

En la práctica no se observa este sistema en una economía capitalista, pues las ganancias de los capitalistas (la plusvalía) son proporcionales al trabajo $\mathbf{l}$ (σ al capital variable), pero no al capital.

(b) Sistema de precios de producción

Consideremos ahora un sistema donde los capitalistas cobran un interés π^{M} y pagan un salario de subsistencia $\mathbf{w}$, que los capitalistas también financian pagándolo al inicio del año. Si el interés es tal que ninguna actividad tiene ganancias, se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} (1 + \pi^{M})(\mathbf{A} + \mathbf{wl}) &= \mathbf{p} \\ \mathbf{pd} &= \mathbf{w} \end{aligned}$$

que equivale a

$$\mathbf{p}(1 + \pi^{M})\mathbf{A}^{+} = \mathbf{p}$$

o bien a

$$(13) \qquad \mathbf{p}[\mathbf{I} - (1 + \pi^{M})\mathbf{A}^{+}] = \mathbf{0}$$

Esta ecuación determina el máximo interés π^{M}. A partir de (13) se sigue que $1/(1 + \pi^{M})$ es un valor propio de $\mathbf{A}^{+}$. El próximo lema afirma que si $\mathbf{A}^{+}$ tiene varios valores propios positivos con vectores propios no-negativos, sólo $\mu(\mathbf{A}^+)$ tiene posibilidades de tener un vector propio con todas sus coordenadas positivas.

(14) **LEMA.** *Sea* $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ *es un vector propio de* $\mathbf{A}^+$ *con valor propio* λ, *con* $0 < \lambda < \mu(\mathbf{A}^+)$. *Entonces alguna coordenada de* $\mathbf{q}$ *es cero.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{q} >> \mathbf{0}$. Sea $\mu = \mu(\mathbf{A}^+)$ ya sea $\varepsilon > 0$ con $((1/\lambda) - \varepsilon) > 1/\mu$. Como $\lambda\mathbf{q} = \mathbf{q}\mathbf{A}^+$, tenemos que

$$((1/\lambda) - \varepsilon)\mathbf{q}\mathbf{A}^+ = ((1/\lambda) - \varepsilon) \cdot \lambda\mathbf{q} = (1 - \varepsilon\lambda)\mathbf{q} >> \mathbf{q}$$

De acuerdo al inciso (ii) del teorema de matrices no-negativas se tiene que $((1/\lambda) - \varepsilon)\mu < 1$. Esto nos lleva a una contradicción, puesto que $((1/\lambda) - \varepsilon)\mu > (1/\mu)\mu = 1$.

(15) **TEOREMA.** *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathbf{A}^+$ *es productiva.*

(ii) *Existe un único* $\pi^M > 0$ *que satisface* (13) *para algún vector* $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$. *De hecho,*

$$\pi^M = 1/\mu(\mathbf{A}^+) - 1.$$

Demostración. (1) $\rightarrow$ (ii)
Sea $\mu = \mu(\mathbf{A}^+)$ y sea $\pi^M = 1/\mu - 1$. Por ser $\mathbf{A}^+$ productiva se satisface $0 < \mu < 1$, y por lo tanto $\pi^M > 0$. Por el teorema de matrices no-negativas μ tiene un vector propio $\mathbf{p} > \mathbf{0}$. Por lo tanto $\mathbf{p}$ y π^M satisfacen (13) que es equivalente a la ecuación

$$\mathbf{p} = (1 + \pi^M)(\mathbf{pA} + \mathbf{wl})$$

y por ser $\mathbf{w} > 0$ y $\mathbf{l} >> \mathbf{0}$, obtenemos

$$\mathbf{p} = \mathbf{pA} + \mathbf{wl} + \pi^M(\mathbf{pA} + \mathbf{wl}) >> \mathbf{pA} > 0.$$

La unicidad es una consecuencia inmediata del lema anterior.

(ii) $\rightarrow$ (i).

Es obvio, pues como $\mu(\mathbf{A}^+) = 1/(1 + \pi^M)$, tenemos que

$$(16) \qquad \pi^M > 0 \leftrightarrow \mu(\mathbf{A}^+) < 1.$$

Puesto que en este sistema se satisface

$$\pi^M(\mathbf{pA} + \mathbf{wl}) = \pi^M(\mathbf{pA}^+) = \mathbf{p} - \mathbf{pA}^+$$

se sigue que las ganancias de los capitalistas son proporcionales a la suma de los capitales constante y variable.

El siguiente teorema nos compara los dos sistemas considerados por Marx:

(17) TEOREMA (Karl Marx)

(i) $\pi^M > 0 \leftrightarrow \sigma > 0$.

(ii) *Si tanto* π^M *como* σ *son positivos, entonces* $\pi^M \leq \sigma$.

Demostración. Definamos π^M de acuerdo a $\mu(\mathbf{A}^+) = 1/(1 + \pi^M)$. Por lo tanto existe un haz de bienes $\mathbf{e} > \mathbf{0}$ con $(1 + \pi^M)\mathbf{A}^+\mathbf{e} = \mathbf{e}$. Por otro lado, de acuerdo a (11) tenemos que $\mathbf{v}(\mathbf{A}^+ + \sigma\mathbf{dl}) = \mathbf{v}$. Si multiplicamos la primer ecuación por $\mathbf{v}$ y la segunda por $\mathbf{e}$, obtenemos

$$(1 + \pi^M)\mathbf{vA}^+\mathbf{e} = \mathbf{ve} = \mathbf{v}(\mathbf{A}^+ + \sigma\mathbf{dl})\mathbf{e}.$$

Pero como $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} + \mathbf{dl}$, cancelando en la ecuación de arriba se deduce que

$$(18) \qquad \pi^M(\mathbf{vAe} + (\mathbf{vd})(\mathbf{le})) = \sigma(\mathbf{vd})(\mathbf{le}).$$

El teorema es una consecuencia de esta ecuación después de observar que como $\mathbf{v} >> \mathbf{0}$, $\mathbf{l}' >> \mathbf{0}$, $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, $\mathbf{d} > \mathbf{0}$ y $\mathbf{e} > \mathbf{0}$, se sigue que $(\mathbf{vd})(\mathbf{le})$ es un escalar positivo y que $\mathbf{vAe}$ es un escalar no-negativo.

De hecho, a partir de (18) es claro que $\pi^M = \sigma \leftrightarrow \mathbf{Ae} = \mathbf{0}$. Esto significa que $\mathbf{e}$ es un vector propio de la matriz $\mathbf{dl}$ que es de rango uno. Por lo tanto, existe un escalar $\lambda > 0$ con $\mathbf{d} = \lambda\mathbf{e}$. Luego $\mathbf{Ad} = \mathbf{0}$. Así, vemos que la igualdad $\pi^M = \sigma$ corresponde a un sistema económico que ¡no requiere bienes para la subsistencia de los trabajadores!

Como una consecuencia inmediata de (9), (16) y (17) tenemos el siguiente resultado.

(19) COROLARIO. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) *La matriz* $\mathbf{A}^+$ *es productiva.*

(ii) *La razón de explotación* σ *es positiva.*

(iii) *El salario de subsistencia* σ *es menor que uno.*

Consideraremos finalmente el problema de la *transformación de valores en precios de producción* que Marx formuló en *El Capital*. Aquí, por *transformación* entenderemos una función o transformación lineal que mande $\mathbf{v}$ en $\mathbf{p}$.

Los precios de producción están definidos por

$$(20) \qquad (1 + \pi^M)(\mathbf{pA} + \mathbf{pdl}) = \mathbf{p}.$$

Este sistema sólo define los precios relativamente y, por lo tanto, podemos suponer que

$$(21)\ \mathbf{pd} = \mathbf{vd} = 1/(1 + \sigma).$$

Denotemos simplemente por π a π^M. A partir de (20) se tiene que

$$\mathbf{p}(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \pi\mathbf{p}\mathbf{A} + (1 + \pi)\mathbf{p}\mathbf{d}\mathbf{l}.$$

Multiplicando esta expresión por $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ por la derecha se tiene

$$\mathbf{p} = \pi\mathbf{p}\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} + (1 + \pi)\mathbf{p}\mathbf{d}\mathbf{l}\,(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Pero por (8) y (21), esta ecuación se puede escribir como

$$\mathbf{p}[\mathbf{I} - \pi\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = [(1 + \pi)/(1 + \sigma)]\mathbf{v}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{p} = \mathbf{v}[(1 + \pi)/(1 + \sigma)]\,[\mathbf{I} - \pi\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]^{-1}.$$

Así, la transformación lineal que manda $\mathbf{v}$ en $\mathbf{p}$ está determinada por la matriz

$$(22) \qquad [(1 + \pi)/(1 + \sigma)] \cdot [\mathbf{I} - \pi\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]^{-1}$$

donde, por (12) y el teorema (15) inciso (ii), σ y π satisfacen $\det[\mathbf{I} - \mathbf{A}^+ - \sigma(\mathbf{d}\mathbf{l})] = 0$ y $\pi = 1/\mu(\mathbf{A}^+) - 1$.

A pesar de que hay muchas transformaciones lineales que mandan $\mathbf{v}$ en $\mathbf{p}$, la dada por (22) es *natural*, es decir, sólo depende de las características del modelo: $\mathbf{A}$, $\mathbf{l}$ y $\mathbf{d}$.

(23) EJEMPLO. Consideremos una economía muy simple con sólo 3 bienes y 3 procesos: básico, industrial y servicios. La matriz de coeficientes de consumo es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.4133 & 2.57 & 0.5 \\ 0.0266 & 0.2857 & 0.05 \\ 0.02 & 0.2857 & 0.25 \end{pmatrix}$$

y el vector de trabajo es $\mathbf{l} = (0.04, 0.5714, 0.5)$.

Entonces,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 2.1626 & 8.5909 & 2.0145 \\ 0.0869 & 1.7835 & 0.1768 \\ 0.0908 & 0.9085 & 1.4544 \end{pmatrix}$$

Por el teorema (2) $\mathbf{A}$ es productiva. Además sabemos que para producir por ejemplo una unidad neta del proceso industrial es necesario producir 8.5909 unidades, en términos brutos, del bien básico, 1.78 unidades del bien industrial y 0.9 unidades del bien de servicios.

Los valores propios de $\mathbf{A}$ son 0.6741, 0.2006 y 0.0742. Por lo tanto $\mu(\mathbf{A}) = 0.6741$. $\mu(\mathbf{A}) < 1$ de acuerdo al teorema (2). El vector de valores $\mathbf{v}$ está dado (8) por $\mathbf{v} = \mathbf{l}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, por lo que $\mathbf{v} = (0.1815, 1.817, 0.9088)$. Esto es, para producir por ejemplo una unidad neta de servicios se requiere de 0.9 unidades de trabajo.

Supongamos que para subsistir un trabajador requiere anualmente del siguiente haz de bienes

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.2 \\ 0.15 \end{pmatrix}$$

La matriz

$$\mathbf{dl} = \begin{pmatrix} 0.06 & 0.8571 & 0.75 \\ 0.008 & 0.1143 & 0.1 \\ 0.006 & 0.857 & 0.075 \end{pmatrix}$$

representa los salarios de subsistencia necesarios para producir una unidad de los distintos bienes. Por ejemplo, para producir una unidad del bien básico, el capitalista debe pagar (0.06, 0.008, 0.006). Observemos que esta matriz siempre tiene rango 1. La matriz aumentada $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} + \mathbf{dl}$, es

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} 0.4733 & 3.4285 & 1.25 \\ 0.0346 & 0.4 & 0.15 \\ 0.026 & 0.3714 & 0.325 \end{pmatrix}$$

que tiene como valores propios 0.9259, 0.203 y 0.0694. Por lo tanto $\mu(\mathbf{A}^+) = 0.9259 < 1$ y por el teorema (2) $\mathbf{A}^+$ también es productiva.

El salario de subsistencia σ está dado por $\sigma = \mathbf{vd} = 0.7719$, la razón de plusvalía σ es $\sigma = (1 - \sigma)/\sigma = 0.2955$, y el interés máximo que pueden cobrar los capitalistas π^M viene dado por $\pi^M = (1/\mu(\mathbf{A}^+)) - 1 = 0.0801$. Este interés es menor que la razón de plusvalía de acuerdo al inciso (ii) del teorema (17).

El vector de valores $\mathbf{v} = (0.1815, 1.817, 0.9088)$ se descompone como la suma de capital constante, $\mathbf{vA} = (0.1415, 1.2456, 0.4088)$, más el capital variable o salarios, $\mathbf{vdl} = (0.0309, 0.4411, 0.386)$, más la plusvalía, $\sigma\mathbf{vdl} = (0.0091, 0.1303, 0.114)$.

La transformación de valores en precios de producción está dada por la transformación lineal (22)

$$\mathbf{p} = \mathbf{v}[(1 + \pi)/(1 + \sigma)]\,[\mathbf{I} - \pi\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]^{-1}.$$

Así, los precios de producción $\mathbf{p}$ vienen dados por

$$\mathbf{p} = \mathbf{v} \begin{pmatrix} 0.926 & 0.692 & 0.1651 \\ 0.007 & 0.8958 & 0.0143 \\ 0.0075 & 0.0728 & 0.8676 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos que $\mathbf{p} = (0.1876, 1.8195, 0.8445)$. Recordemos que aquí hemos supuesto que $\mathbf{p}$ está normalizado (21) de acuerdo a $\mathbf{pd} = \sigma$.

Referencias

CASSELS, J.W.S., *Economics for Mathematicians*, London Mathematical Society Lecture Note Series 62, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

GALE, D., *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-Hill, New York, 1960.

PASINETTI, L., *Lectures on the Theory of Production*, Columbia University Press, New York, 1977.

PASTOR, G., *Modelos Lineales de Producción*, Notas de clase, ITAM, 1989.

Sabía usted que...

La música de las esferas

Para Pitágoras y sus discípulos, "Los números gobiernan el Universo".

En música, estudiaron los distintos tonos producidos por la cuerda de una lira y descubrieron que el sonido variaba con la longitud de la cuerda; de ahí que expresaran los intervalos de la escala musical en términos de razones numéricas correspondientes a las longitudes de las cuerdas de una lira.

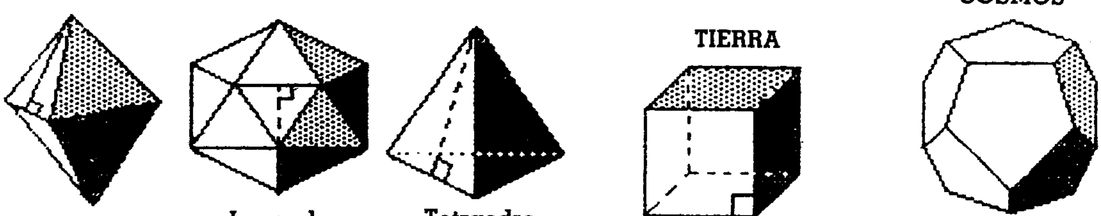
Los pitagóricos creían también que el movimiento de los planetas se podía reducir a relaciones numéricas y que los cuerpos que se movían en el espacio producían sonidos que variaban proporcionalmente a su distancia de la Tierra. Todos esos sonidos se concertaban para crear una música sublime, la música de las esferas, "inaudible para nosotros porque somos cómo el herrero y sus ayudantes que han dejado de oír los ruidos que permanentemente los rodean ya que no los pueden contrastar con el silencio".

Sólidos platónicos

Euclides demostró que sólo podían existir cinco poliedros regulares (llamados "sólidos cósmicos" por los pitagóricos).

El filósofo Platón (428-384) admiraba tanto estas figuras que no podía convencerse de que el Creador no las hubiera utilizado y construyó su representación del mundo tomando esos cinco poliedros como elementos primarios:

AIRE AGUA FUEGO TIERRA COSMOS



Octaedro Icosaedro Tetraedro Exaedro (cubo) Dodecaedro

Con triángulos isósceles. Con cuadrados) Con pentágonos regulares

Extraido de Historia e Historias Matemáticas por Mariano Perero