ARTICULOS

■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 4 - No. 2 • Agosto 1992 ■ © GEI ■ Pag. 7 ■

Constructivismo y Educación Matemática

Luis Moreno Armella[1]
Guillermina Waldegg[2]

El papel de la epistemología en la práctica educativa

Cada vez son más los autores que reconocen explícitamente el hecho de que las posiciones filosóficas y las teorías epistemológicas relativas al conocimiento matemático ejercen una influencia determinante sobre la educación matemática.

Entendemos "Educación Matemática" en un sentido amplio, es decir, no sólo la labor que realiza el profesor dentro del salón de clase, sino que nos referimos, además, a aquellos otros factores que intervienen y hacen posible que la matemática **se enseñe y se aprenda**; estos factores son por ejemplo, el diseño y el desarrollo de planes y programas de estudio, los libros de texto, las metodologías de la enseñanza, las teorías del aprendizaje, la construcción de marcos teóricos para la investigación educativa.

El actor, o los actores, que intervienen para dar cuerpo a los factores mencionados arriba, lo hacen, explícita o implícitamente, desde sus personales convicciones filosóficas y epistemológicas respecto a la matemática. Es decir, las concepciones que ellos tienen —ya sea individualmente o como grupo o corriente— sobre "lo que es la matemática" y "lo que es el conocimiento matemático", permean los elementos que conforman los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.

Intuicionismo, formalismo, logicismo, constructivismo, empiricismo, estructuralismo, y demás "ismos", han tenido, en su momento, una influencia significativa —aunque no siempre explícita— para guiar las ideas y demarcar los principios que rigen la educación matemática.

No quiere decir esto que todos los profesionales de la educación matemática están "inscritos" en alguna escuela filosófica. En muchos casos, se trata, simplemente, de las opiniones "privadas" del profesor, del autor de textos, del profesional que diseña los planes y programas o del investigador, acerca de la naturaleza de la matemática y del conocimiento matemático, y a sus convicciones de cómo éstas se relacionan con la labor de enseñanza y con el aprendizaje de los estudiantes. A menudo, estas opiniones han sido indirectamente adquiridas o heredadas a través de su propia formación; pero frecuentemente también, obedecen a tendencias o modas de corrientes internacionales que, en ocasiones son incompatibles con las primeras.

Desde esta óptica, es pertinente plantearse las siguientes preguntas:

¿A qué didáctica conduce una cierta concepción de la matemática y del conocimiento matemático?

[1] Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV, México.

[2] Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia, CINVESTAV, México.

¿A qué concepción de la matemática y del conocimiento matemático obedece una cierta práctica educativa?

En lo que sigue, trataremos de dar algunos elementos de análisis que nos permitan acercarnos a las respuestas, contrastando dos maneras distintas de concebir la matemática.

Un breve bosquejo histórico

La epistemología es una disciplina cuyo objeto de estudio es el conocimiento científico, su construcción, su estructuración en teorías, las bases sobre las que descansa, su naturaleza, sus alcances. Aunque originalmente la epistemología era considerada una rama de la filosofía, en la actualidad hay acercamientos que proclaman su independencia y autonomía.

Los filósofos pre-socráticos, los primeros filósofos dentro de la tradición occidental, no pusieron especial atención a los asuntos de la epistemología; su interés estaba centrado en la naturaleza y la posibilidad del cambio. Dentro de sus reflexiones, daban por sentado que era posible el conocimiento de la realidad, aunque algunos sugirieron que este conocimiento podría obtenerse mejor de unas fuentes que de otras. Heráclito, por ejemplo, enfatizaba la importancia de los sentidos para conocer la realidad, mientras que Parménides privilegiaba el papel de la razón. Sin embargo, ninguno de ellos dudó que el conocimiento de la realidad fuese posible. A partir del siglo quinto antes de Cristo empezaron a surgir estas dudas y fueron los sofistas los principales responsables de ello.

Durante el siglo quinto a.C., las instituciones y las prácticas humanas se enfrentaron, por primera vez en la historia, a un examen crítico. Muchas cosas que se habían pensado como parte de la naturaleza, se empezaron a separar de ella. Las preguntas epistemológicas centrales que preocupaban a los sofistas eran: ¿qué tanto de lo que pensamos que conocemos sobre la naturaleza es "parte objetiva" de ella y qué tanto es contribución de la mente humana?, ¿hasta qué punto podemos estar seguros de que tenemos un conocimiento los sentidos?, ¿puede la razón producir conocimiento?

Algunos fueron más radicales afirmando que no hay tal realidad y que si la hubiera, no podríamos conocerla y que, aun si la pudieramos conocer, no podríamos comunicar nuestro conocimiento de ella.

Este escepticismo general condujo al surgimiento de la epistemología tal y como fue conocida tradicionalmente: el intento por justificar que el conocimiento es posible y por establecer la parte que juegan los sentidos y la razón en la adquisición del conocimiento. Es a Platón a quien se le considera el verdadero iniciador de la epistemología, porque fue él quien por primera vez hizo intentos sistemáticos de explicar las cuestiones básicas de esta disciplina: ¿qué es el conocimiento?, ¿en dónde se fundamenta y qué tanto de lo que pensamos que conocemos es realmente conocimiento?, ¿dan conocimiento los sentidos?, ¿puede la razón producir conocimiento?

La matemática como objeto de enseñanza

En lo que va del presente siglo y hasta hace poco tiempo, la concepción filosófica dominante sobre la matemática ha sido la formalista, que *grosso modo*, nos presenta a esta disciplina como un cuerpo estructurado de conocimientos; dicho cuerpo está conformado por los objetos matemáticos, las relaciones entre ellos y los criterios para validar resultados dentro de un marco axiomático-deductivo. El formalismo exige extirpar el significado de los objetos a fin de trabajar exclusivamente con las "formas" y con las relaciones entre dichos objetos que se derivan de la base axiomática de las teorías. La actividad matemática producto de esta concepción ha sido sumamente fructífera, baste observar la gran cantidad de resultados surgidos en el presente siglo. Sin embargo, esto mismo no se puede decir de la práctica educativa que se deriva de una concepción formalista de la matemática.

Respecto a la epistemología de la matemática que domina la "enseñanza tradicional", ésta tiene raíces históricas mucho más lejanas, que se remontan a la época de la antigua Grecia.

Para Platón, los objetos matemáticos, así como las relaciones entre ellos, tienen una realidad, externa e independiente de quien conoce, en el mundo de las ideas. Conocer para Platón significa **re-conocer**, trasladar este cuerpo de objetos y relaciones preexistentes en un mundo exterior e implantarlos en el intelecto del individuo. La tesis fundamental de esta postura epistemológica —que llamaremos realismo matemático— es la separación explícita entre el sujeto cognoscente y el objeto de conocimiento.

Este realismo epistemológico es modificado por Aristóteles quien le da un matiz empírico, al trasladar los objetos de la matemática del mundo de las ideas de Platón a la Naturaleza material: conocer ahora significa re-conocer los objetos matemáticos —mediante procesos de abstracción y generalización— en los objetos corpóreos de la Naturaleza.

Ambas concepciones —la idealista de Platón y la empirista de Aristóteles— parten de la premisa fundamental de que los objetos de la matemática y sus relaciones están dados, su existencia no depende del sujeto que conoce, ya que preexisten a él.

Bajo esta concepción, la matemática puede ser vista como un "objeto de enseñanza": el matemático la "descubre" en una realidad externa a él, una vez descubierto un resultado matemático, es necesario "justificarlo" dentro de una estructura formal y queda listo para ser enseñado. Esta concepción epistemológica, en una especie de simbiosis con el formalismo, encaja dentro de la oposición formulada por el empirismo lógico del siglo veinte, «contexto de descubrimiento/contexto de justificación»: el realismo suministra el contexto de descubrimiento, mientras que el formalismo nos da el contexto de justificación.

La transmisión del conocimiento

Considerando que la matemática es un "objeto de enseñanza", éste puede transmitirse. Quien posee el conocimiento puede ofrecerlo a quien no lo posee[3], sin riesgo de que el conocimiento se modifique en el proceso de transmisión.

La tarea del profesor consiste en "inyectar" el conocimiento en la mente del estudiante a través de un discurso adecuado. El estudiante, por su parte, no puede modificar la estructura del discurso, su tarea consiste en decodificarlo. La didáctica, bajo este punto de vista, busca optimizar la tarea del profesor mediante una especie de combinatoria de contenidos, generalmente apoyada en preceptos universales —como el paso de lo simple a lo complejo, de lo particular a lo general, de lo concreto a lo abstracto, del análisis a la síntesis— y poniendo especial énfasis en el contexto de la justificación, como estado superior del conocimiento.

La evaluación del aprendizaje, bajo esta concepción, queda definida de manera clara: los mismos contenidos que el profesor transmite inequívocamente mediante su discurso, serán demandados al estudiante quien deberá responder con un discurso análogo. Aunque se reconocen diferencias entre los estudiantes (de inteligencia, de actitud, de motivación), estas diferencias se borran al solicitar respuestas únicas y universales, centradas, principalmente, en el contexto de justificación.

Frente a un formalismo exacerbado en la educación matemática, como el que se dio alrededor de los años cin-

[3] Ofrecer un curso, dictar un curso, dar una lección, son expresiones reminiscentes de esta concepción.

cuenta, han habido reacciones significativas: aquellas que admiten un cierto trabajo heurístico previo a la formalización, en particular nos referimos a la llamada pedagogía del descubrimiento impulsada de manera brillante por Pólya[4]. Sin embargo, esta pedagogía no logró escapar de una concepción realista, claramente explicitada en la idea de que la matemática "se descubre", es decir, preexiste en algún lugar.

Algunas otras teorías del aprendizaje, desarrolladas en épocas recientes, propiciaron la introducción de innovaciones en la didáctica que ofrecían optimizar el proceso de "transmisión y adquisición" del conocimiento. Por ejemplo, las didácticas basadas en las teorías conductistas, que alcanzaron su auge en la década de los setentas, proponían una serie de técnicas —máquinas de enseñanza, textos programados, programación por objetivos, etc.— bajo el supuesto de que el aprendizaje consiste en la modificación de ciertas conductas observables, provocada por un programa de enseñanza basado en el binomio estímulo-reforzamiento. Estas teorías conductistas tampoco lograron escapar de la concepción realista de la matemática; detrás de la tecnología educativa derivada de ellas, está la idea de que el conocimiento es una especie de "paquete" que se transmite y se adquiere tanto mejor cuanto mejores sean los vehículos que lo transportan[5].

La conjunción realismo-formalismo ha dominado la educación matemática durante el presente siglo: subyace a la mayoría de los textos y de los planes de estudio de todos los niveles escolares, a la actividad de muchísimos profesores, a los métodos de evaluación y clasificación y a muchos de los trabajos de investigación educativa. No obstante, los resultados no han sido del todo satisfactorios: el sentimiento de fracaso en profesores y estudiantes parece ir en aumento. Parece necesario revisar las hipótesis (explícitas e implícitas) sobre las que se apoyan nuestros esfuerzos.

La primera pregunta al ver el esquema tradicional:

$$\text{Profesor} \xrightarrow{\text{conocimiento}} \text{alumno}$$

es ¿qué es el "conocimiento"? "Eso" que no ha resultado ser tan fácil de transmitir quizá se deba a que no es algo que pueda transmitirse, debido a que el profesor no lo tiene "hecho" para consumo de sus alumnos, sino que los alumnos lo construyen. Esta última es la tesis de las epistemologías constructivas que trataremos a continuación.

La matemática como objeto de aprendizaje

Un cambio fundamental en las tesis del realismo matemático se presenta con la *Crítica de la razón pura* de Immanuel Kant (1724-1804), en donde de manera brillante entra en cuestionamiento la "objetividad" del conocimiento, sin caer en la trampa de la autoconciencia que imponía el racionalismo cartesiano. La tesis Kantiana postula que cuando el sujeto cognoscente se acerca al objeto de conocimiento (sea éste material o ideal), lo hace a partir de ciertos supuestos teóricos, de tal manera que el conocimiento es el resultado de un proceso dialéctico entre el sujeto y el objeto, en donde ambos se modifican sucesivamente. Conocer para Kant, significa **crear** a partir de ciertos *a prioris*, que permiten al sujeto determinar los objetos en términos del propio conocimiento y no, como suponían los filósofos griegos, el conocimiento en términos de los objetos[6].

---

[4] Véase, por ejemplo Pólya, G.: *Mathematical Discovery*, N. York, Wiley, 1962.

[5] La expresión "proceso de enseñanza-aprendizaje" empleada indiscriminadamente en la actualidad, proviene de estas teorías: hay un proceso único en cuyos extremos están la enseñanza y el aprendizaje que, en términos generales, vienen a ser una y la misma cosa.

[6] En una formulación célebre, Kant, en el prólogo de la segunda edición de la *Crítica de la razón pura*, ha expresado el nuevo significado del experimento para la indagación científica: "Entendieron [los hombres de

La concepción epistemológica de Kant sirve como punto de partida —aunque las teorías después difieren sustancialmente— para las reformulaciones constructivistas del presente siglo. Notablemente, Jean Piaget establece su Epistemología Genética sobre la base de que el conocimiento se construye mediante la actividad del sujeto sobre los objetos. Los objetos matemáticos ya no habitan en un mundo eterno y externo a quien conoce, sino que son producidos, construidos, por él mismo en un proceso continuo de asimilaciones y acomodaciones que ocurre en sus estructuras cognoscitivas.

Para Piaget (y, en esencia, para todos los constructivistas), el sujeto se acerca al objeto de conocimiento dotado de ciertas estructuras intelectuales que le permiten "ver" al objeto de cierta manera y extraer de él cierta información, misma que es asimilada por dichas estructuras. La nueva información produce modificaciones, —acomodaciones— en las estructuras intelectuales, de tal manera que cuando el sujeto se acerca nuevamente al objeto lo "ve" de manera distinta a como lo había visto originalmente y es otra la información que ahora le es relevante. Sus observaciones se modifican sucesivamente conforme lo hacen sus estructuras cognoscitivas, construyéndose así el conocimiento sobre el objeto.

De una forma u otra, el propósito de todas las epistemologías ha sido el análisis de las relaciones entre el sujeto cognoscente y el objeto de conocimiento, y la forma en que se genera el conocimiento mediante tal interacción. El modelo de enseñanza tradicional —soportada por el realismo matemático— que hemos descrito anteriormente, privilegia el objeto de conocimiento y concede un papel pasivo al sujeto. En la perspectiva constructivista, es la actividad del sujeto lo que resulta primordial: no hay "objeto de enseñanza" sino "objeto de aprendizaje".

ciencia] que la razón sólo reconoce lo que ella misma produce según su bosquejo, que la razón tiene que anticiparse con los principios de sus juicios de acuerdo a leyes constantes y que tiene que obligar a la naturaleza a responder sus preguntas... De lo contrario, las observaciones fortuitas y realizadas sin un plan previo no van ligadas a ninguna ley necesaria, ley que, de todos modos, la razón busca y necesita. La razón debe abordar la naturaleza llevando en una mano los principios según los cuales sólo pueden considerarse como leyes los fenómenos concordantes, y en la otra, el experimento que ella haya proyectado a la luz de tales principios..." Kant, I. *Crítica de la razón pura*. Ediciones Alfaguara, Madrid, 1978, p. 18

La construcción del conocimiento

Diversos estudios relativos a la forma en que los estudiantes resuelven problemas matemáticos, han llevado a la explicación, de corte constructivista, de que la estructura de la actividad de resolución de problemas surge como un objeto cognoscitivo (un esquema) a partir de la reflexión que el sujeto hace sobre sus propias acciones. El "conocimiento matemático", para la epistemología genética, es resultado de esta reflexión sobre acciones interiorizadas —la abstracción reflexiva—. La matemática no es un cuerpo codificado de conocimientos (así como una lengua no es el texto de su enseñanza), sino esencialmente una actividad.

El conocimiento, desde la perspectiva constructivista, es siempre contextual y nunca separado del sujeto; en el proceso de conocer, el sujeto va asignando al objeto una serie de significados, cuya multiplicidad determina conceptualmente al objeto. Conocer es actuar, pero conocer también implica comprender de tal forma que permita compartir con otros el conocimiento y formar así una comunidad. En esta interacción, de naturaleza social, un rol fundamental lo juega la negociación de significados.

Una tesis fundamental de la teoría piagetiana es que todo acto intelectual se construye progresivamente a partir de estructuras cognoscitivas anteriores y más primitivas. La tarea del educador constructivista, mucho más compleja que la de su colega tradicional, consistirá entonces en diseñar y presentar situaciones que, apelando a las estructuras anteriores de que el estudiante dispone, le permitan asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje y nuevas operaciones asociadas a él. El siguiente paso consistirá en socializar estos significados personales a través de una negociación con otros estudiantes, con el profesor, con los textos.

Al poner el énfasis en la actividad del estudiante, una didáctica basada en teorías constructivistas exige también una actividad mayor de parte del educador. Esta ya no se limita a tomar el conocimiento de un texto y exponerlo en el aula, o en unas notas, o en otro texto, con mayor o menor habilidad. La actividad demandada por esta concepción es menos rutinaria, en ocasiones impredecible, y exige del educador una constante creatividad[7].

Temporalidad y viabilidad del conocimiento

Si la matemática fuera un cuerpo codificado de conocimientos —y por lo tanto un "objeto de enseñanza", como lo hemos definido en los capítulos precedentes— entonces la matemática estaría compuesta de verdades atemporales y la historia nos daría cuenta de ello.

No hay duda de que las ciencias naturales han evolucionado y que, con tal evolución, ha ocurrido un cambio en sus **normatividades**, es decir, en la forma en la que se conciben y validan los resultados. Ejemplos de esta evolución son la revolución copernicana, la revolución darwiniana del siglo diecinueve y, en el siglo veinte, las revoluciones relativista y cuántica. La pregunta que nos interesa contestar es si no ha habido un cambio equivalente en la matemática.

Hermann Hankel, matemático notable del siglo diecinueve, dijo en una ocasión que en la mayoría de las ciencias, una generación deshace lo que hizo la generación precedente, y que sólo en matemáticas cada generación construye una nueva historia sobre la vieja estructura[8]. La epistemología genética, mediante su método histórico-crítico (que considera a la historia como un "laboratorio epistemológico" en el que se ratifican o rectifican ciertas hipótesis) invalida —parcialmente— este punto de vista y muestra que hay cambios en el desarrollo de la matemática que no corresponden a una mera acumulación de nuevos "descubrimientos". Como resultado de estos cambios, la colectividad matemática, vista como sujeto cognoscente, crea en su actividad una nueva semántica, una nueva manera de "ver" a los objetos y a la misma disciplina.

Tomemos, por ejemplo, la axiomatización de la geometría euclideana en la Grecia antigua. Tal axiomatización transformó la actividad matemática empírica, tal y como se realizaba en Egipto y Mesopotamia, en una actividad **teórica**. Los resultados geométricos y aritméticos encontrados a partir de múltiples observaciones —mediciones y sistematizaciones de ensayos y errores— por egipcios y babilonios, fueron concebidos por los griegos como conceptos abstractos, cuyo tratamiento requería de un marco metodológico y conceptual diferente.

Asimismo, la creación (no el descubrimiento) de las geometrías no-euclideanas y de las álgebras no conmutativas durante el siglo diecinueve, transformó la actividad matemática en una actividad sobre **lo posible**, ya no sobre **lo necesario**. Es decir, la idea —predominante en un momento dado— de que existe un único modelo matemático para describir una realidad física única, se desplomó ante la evidencia de ciertos modelos, igualmente coherentes y

[7] Un intento, aunque ya rebasado, de lo que podría ser una didáctica constructivista ha sido el desarrollo por Hans Aebli en su libro *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*, Kapelusz, B. Aires, 1973.

[8] Citado por Grabiner, J. V. en *Is Mathematical Truth Time-Dependent?* American Mathematical Monthly 81 (1974) pp. 354-365

válidos dentro de la estructura de la matemática, que no parecían describir al mundo físico. El modelo tradicional abandonó su carácter de necesidad, y se concibió sólo como **uno** de los modelos entre otros posibles.

De acuerdo a la interpretación constructivista, todo esto permite cambiar las concepciones de la colectividad (sujeto cognoscente) sobre la disciplina: la matemática se reconoce como una actividad esencialmente abstracta, en donde la abstracción reflexiva es el eje de la actividad, y la interiorización de las acciones es su punto de partida.

Estos ejemplos tomados de la historia nos llevan a sostener que el conocimiento matemático es siempre contextual: como actividad de una sociedad, la matemática no puede desprenderse de su condicionamiento histórico. Consideremos, para reforzar esta idea, la evolución histórica de la noción de "axioma" (o postulado). Esta noción, asociada a las formas de "ver", a la normatividad de la disciplina[9], ha experimentado cambios a lo largo de la historia. En la matemática euclideana, un postulado expresa una **verdad** evidente por sí misma. Subrayamos "verdad", para hacer notar el contenido semántico de la axiomática griega, por oposición al sistema hilbertiano en donde los postulados no se refieren a verdades, sino a relaciones entre los conceptos involucrados. El desalojo del contenido semántico de un sistema axiomático, fue resultado de un larguísimo proceso de análisis sobre la axiomática euclideana, desarrollado en torno del postulado de las paralelas, que muestra claramente el cambio en la normatividad que subyace a la propia evolución de la disciplina.

De este desarrollo de la matemática se desprende que el conocimiento matemático no necesariamente es "verdadero": más bien diremos que es viable en el sentido que "cuadra" con la experiencia. Aclaremos esto con un ejemplo: los esquemas que una persona desarrolla para conducir un automóvil pueden ser diferentes a los desarrollados por otra persona. No tiene sentido considerar que unos son más "verdaderos" que los otros; sólo tiene sentido preguntarse cuáles esquemas de conducción son más adecuados a las condiciones de manejo a las que esas personas se ven enfrentadas. Diremos entonces que cierta forma de conducción es más viable que la otra, que una de estas personas ha construido una forma de conducción viable. Esta es una forma de conocimiento viable en cuanto a la experiencia pertinente.

La concepción educativa enraizada en las modalidades del formalismo matemático a que hemos aludido, no sólo concibe el conocimiento matemático como un cuerpo de conocimientos que anteceden al estudiante, sino que además traslada la normatividad de la matemática al proceso de evaluación del aprendizaje. El estudiante debe asimilar el conocimiento que le es transmitido y simultáneamente debe desarrollar un comportamiento cognoscitivo acorde con la normatividad de la disciplina matemática. Este grado de exigencia olvida que la normatividad de una ciencia es consustancial al proceso histórico de su desarrollo. La temporalidad de las "verdades" matemáticas viene en apoyo a esta posición. Los criterios normativos no le pueden ser impuestos desde fuera a una ciencia. El riesgo de hacerlo, en didáctica, consiste en imponer un proceso lógico —la justificación— a un proceso cognoscitivo —la construcción del conocimiento matemático—. Este último tiene su propia lógica.

La construcción del significado

El núcleo de la actividad constructiva por parte del estudiante, consiste en construir significados asociados a su propia experiencia, incluyendo su ex-

[9] Decimos "normatividad" y no "criterios de justificación" porque la forma de validar es consustancial a la naturaleza de los objetos matemáticos, naturaleza vinculada orgánicamente a la forma de actividad del sujeto.

periencia lingüística. La socialización de este proceso consiste en la negociación de tales significados en una comunidad —el salón de clase— que ha hecho suyo ese proceso constructivo. La sensación de objetividad que se desprende del proceso negociador, induce a la creencia que este conocimiento compartido, preexiste a la comunidad que se dedica a su construcción. Es necesario analizar con cuidado las relaciones entre matemática y lenguaje. Este último es un campo de experimentación para el estudiante.

Para el constructivismo, es importante distinguir entre "concepciones" y "conceptos"[10]. Estos términos se emplean con un sentido próximo a lo que Freudenthal denomina "objetos mentales" y "objetos formales"[11]. La experiencia del estudiante, su punto de partida, es una red de información, de imágenes, de relaciones, anticipaciones e inferencias alrededor de una idea. Este complejo cognoscitivo es lo que llamamos su concepción. El trabajo del estudiante consiste entonces, en extraer de tal concepción relaciones y patrones: un conjunto coordinado de acciones y esquemas que conducen al conocimiento viable, a los conceptos y a la generación de algoritmos. El proceso de construcción de significados es gradual, pues el concepto queda, por así decirlo, "atrapado" en una red de significaciones.

A lo largo del proceso constructivo —que es permanente— el estudiante encuentra situaciones que cuestionan el "estado" actual de su conocimiento y le obligan a un proceso de reorganización; con frecuencia el estudiante se ve obligado a rechazar, por inviable, mucho de lo que ya había construido.

Durante el proceso de construcción de significados, el estudiante se ve forzado a recurrir a nociones más primitivas que expliquen la situación que estudia. Esta situación es análoga al desarrollo de una ciencia durante la búsqueda de sus principios. En la física, por ejemplo, el estudio de las leyes generales del movimiento condujo a la formulación de ley de la inercia; en matemáticas, el estudio de la geometría condujo primero a las organizaciones locales y, posteriormente, a la axiomática de Euclides[12]. Claro que esto sólo es una analogía: el estudiante no está conscientemente buscando esquemas lógicos. Más bien, está tratando de encontrar el sentido de aquello a lo que se ve enfrentado.

Esta búsqueda del sentido es una necesidad cognoscitiva, porque la matemática se desarrolla en un escenario ideal. Los términos "conjunto", "función", etc., corresponden a experiencias mentales. Es imposible en este punto, dejar de reconocer el papel central de la abstracción reflexiva, como el mecanismo que da lugar a las experiencias del mundo matemático.

Las ciencias naturales dan cuenta de fenómenos que se observan —siempre desde una interpretación preliminar por parte del sujeto— en el mundo material; la matemática, por su parte, da cuenta de la estructura de un mundo ideal, cuya "materia prima" son las acciones interiorizadas del sujeto. Es necesario el empleo de un lenguaje formal para hablar de este mundo ideal. En la versión de la didáctica derivada del formalismo, existe la tendencia a identificar los objetos de la matemática (que son objetos epistémicos pues ellos constituyen nuestro saber) con los nombres que usamos para referirnos a tales objetos en la lengua formal. De este modo, la realidad epistémica queda oculta; pero la necesidad de construir el sentido la trae de vuelta. ¿Por qué no

[10] Véase por ejemplo, Sfard, Anna: *On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processer and Objects as Differents Sides of the Same Coin.* Educational Studies, 22 pp. 1-36, 1991.

[11] Freudenthal, H.: *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Holanda, Reidel, 1983.

[12] Véase Bromberg, S., Moreno, L. *Tres hitos en la historia de la fundamentación de la geometría*. Mathesis, Vol. VI, No. 3, pp. 281-306, Agosto 1990.

aprovechar plenamente esta situación ineludible?

Concreción y representación

Hemos aludido ya a la sensación de concreción que suele acompañar a los objetos matemáticos cuando cedemos al impulso de identificarlos con los términos del lenguaje formal mediante el cual los denotamos. Tomando en cuenta que el lenguaje natural y los lenguajes formales son parte de la experiencia del sujeto —el sujeto posee un impulso simbólico— cabe entonces la pregunta:

¿En qué sentido son abstractos los objetos matemáticos?

Mediante el lenguaje formal (simbólico) se opera un cambio en el plano de representación que, en primera instancia, permite explicar que las acciones, que en el plano material se realizan con objetos concretos, en el plano ideal se realizan con símbolos. Parece desprenderse de aquí un criterio sobre el grado de abstracción de los objetos de la matemática: la abstracción es resultado de un cambio en el nivel de representación.

Los objetos de la matemática se manipulan, se operan al nivel de lo simbólico; estas acciones en el nivel simbólico permiten ir generando una red de relaciones entre diversos objetos. Mediante el paso a un nuevo nivel de representación, esto se lleva hasta las estructuras mismas por la vía de la organización de las acciones interobjetales. Las sucesivas fases en el tránsito de lo concreto hacia lo abstracto, van sustancialmente vinculadas a las posibilidades de generar relaciones y estructuras a partir de la operación de los objetos matemáticos.

En la medida en que operamos tales objetos, crece la red de significaciones que los vincula y con ello, el grado de objetividad con el que aparecen en nuestras estructuras cognoscitivas. En otros términos: tales objetos han devenido para nosotros más concretos. Por ello, los criterios que refieran el grado de concreción de una idea —de un referente conceptual— al número de objetos materiales que podamos asociarle, sin tomar en cuenta la actividad operatoria, son insuficientes. Este es el punto de vista de la didáctica a la que subyace una "ontología realista" que pretende que los objetos matemáticos existen en sí; que se trata de ir descubriendo sus características hasta que el estudiante los "capte en su verdadera naturaleza", la abstracta, desvinculada de lo real. No parece necesario insistir, a estas alturas, sobre lo equívoco de este enfoque. Se trata, más bien, de reconocer la naturaleza dual, simbólica y operatoria que hace concretos a los objetos matemáticos. Que permite la actividad básica del estudiante: utilizar los diversos niveles de representación para la construcción del sentido.