La Feria de Pitágoras

(2a. de dos partes)

Generalizaciones del teorema de Pitágoras

Otro tipo de figuras sobre los lados

La relación pitagórica no sólo se cumple para cuadros construidos sobre los lados de un triángulo equilátero, sino para cualquier figura, siempre y cuando las figuras que se construyan sobre los lados sean semejantes entre sí (ver fig. 34). Como las áreas de figuras semejantes crecen proporcionalmente al cuadrado de longitudes lineales correspondientes, las áreas de figuras semejantes construidas sobre los lados se pueden expresar como kb^2, ka^2 y kc^2 donde el valor de k depende de la forma de la figura.

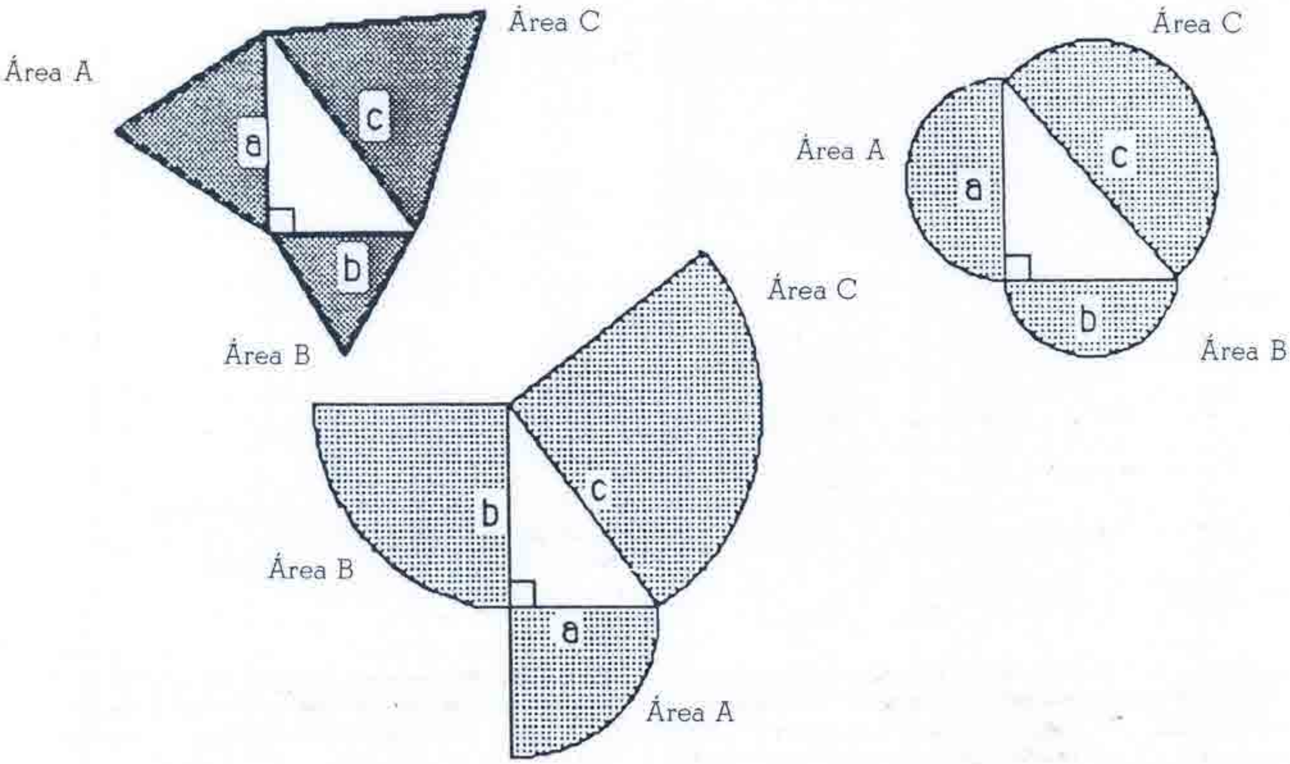


FIGURA 34

Alfinio Flores
San Diego State University

Cálculo del valor de k en los tres casos mostrados en la figura 34.
Triángulo equilátero, de lado a, y altura h se tiene

$$a^2 = h^2 + (a/2)^2 \cdot$$

$$a^2 = h^2 + a^2/4$$

$$3/4a^2 = h^2$$

$$A = a \times a\sqrt{3/2} \times 1/2$$

$$A = a^2 \times \sqrt{3/4}$$

En este caso $k = \sqrt{3/4}$

y $$b^2\sqrt{3/4} + a^2\sqrt{3/4} = c^2\sqrt{3/4}$$

En el caso de los semicírculos se tiene que el área del semicírculo sobre el lado a es

$$1/2 \times (a/2)^2 \times \pi = \pi/8\, a^2$$

$$b^2\,\pi/8 + a^2\,\pi/8 = c^2\,\pi/8 \text{ ó}$$

$$b^2 k + a^2 k = c^2 k \qquad \text{con } k = \pi/8$$

Para los cuartos de círculo las áreas son

$$c^2\,\pi/4$$

$$b^2\,\pi/4 + a^2\,\pi/4$$

$$\pi/4\,(b^2 + a^2) = \pi/4\, c_2 \qquad \text{con } k = \pi/4$$

Otra demostración: generalización y especialización

Las dos ecuaciones

$$b^2 + a^2 = c^2 \qquad (1)$$

$$kb^2 + ka^2 = kc^2 \qquad (2)$$

son equivalentes.

Si podemos probar la ecuación más general, el teorema de Pitágoras es un caso especial ($k = 1$)

Para probar la ecuación (2) es suficiente verificar que vale para un valor específico de k ($k \neq 0$). Sea ABC un triángulo rectángulo. Con la siguiente figura podemos obtener la demostración de la ecuación (2) para un valor de k.

Sea HC la altura sobre la hipotenusa. La altura divide al triángulo original en dos triángulos semejantes.

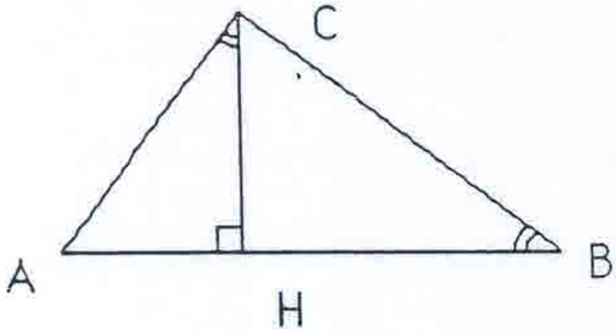


Figura 35

Podemos ver la figura como tres triángulos rectángulos construidos sobre los lados del triángulo original, sólo que los triángulos están dibujados hacia dentro en vez de hacia afuera. La suma de las áreas de los triángulos sobre los catetos es claramente igual al área del triángulo sobre la hipotenusa (el triángulo original). Como los tres triángulos son semejantes, sus áreas pueden ser expresadas como una constante k por el cuadrado de los lados correspondientes, y de aquí obtenemos la ecuación deseada.

$$kb^2 + ka^2 = kc^2$$

Pitágoras en el espacio

El teorema de Pitágoras también se puede generalizar a tres dimensiones. En un paralelepípedo (ver Fig. 36) el cuadrado de la diagonal es la suma de los cuadrados de los tres lados:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Nota que podemos ver al teorema de Pitágoras como un caso especial de este resultado: si alguno de los lados del paralelepípedo es cero, entonces d es la diagonal de un rectángulo.

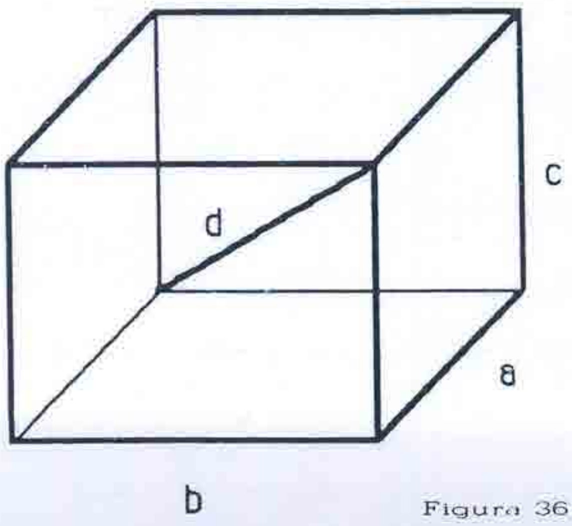


Figura 36

Demostración

El resultado para el espacio se obtiene aplicando dos veces el teorema de Pitágoras en el plano (ver fig. 37):

$$d_1^2 = a^2 + b^2 \qquad d^2 = d_1^2 + c^2$$

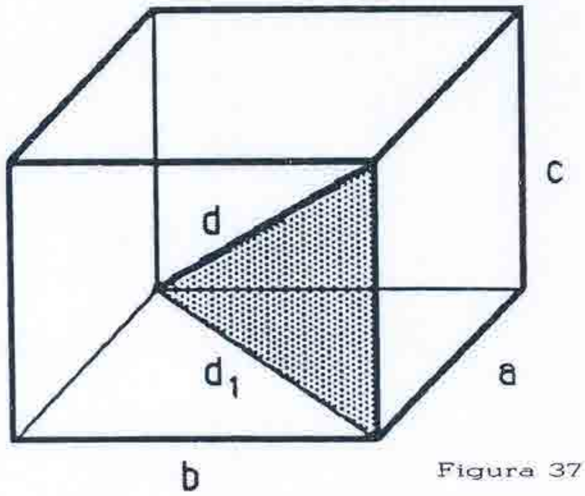


Figura 37

La ley de cosenos

En un triángulo cualquiera se tiene la siguiente relación

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos \beta$, donde β es el ángulo entre a y c.

El teorema de Pitágoras es un caso especial cuando $\beta = 90°$, en cuyo caso $\cos \beta = 0$.

Demostración

Sea ABC un triángulo cualquiera, h la altura sobre c, y p la proyección de a sobre c.

Caso 1) β es agudo

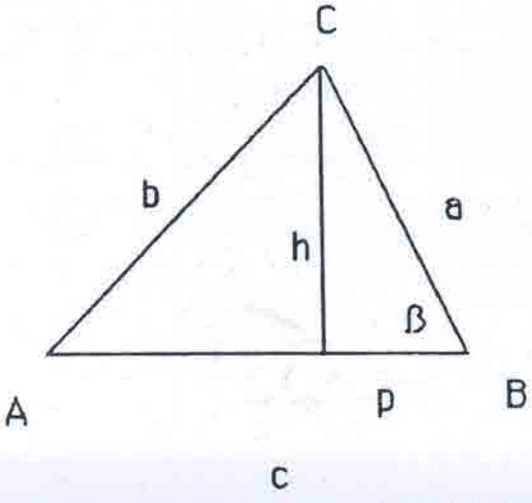


Figura 38

Se tienen las siguientes relaciones:

$\cos\beta = p/a$ y por tanto $2ac\cos\beta = 2\,ac\,p/a = 2\,cp$

$a^2 = p^2 + h^2$

$b^2 = (c-p)^2 + h^2 = c^2 - 2cp + p^2 + h^2 = c^2 - 2ac\cos\beta + a^2$

Caso 2) β es obtuso (ver fig. 39)

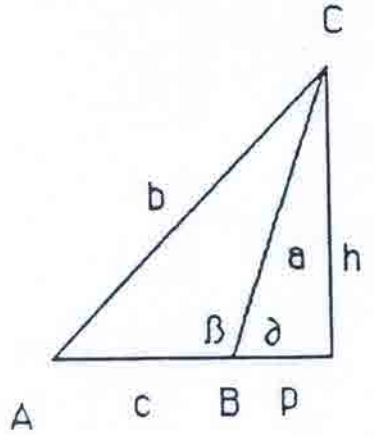


Figura 39

Se tienen las siguientes relaciones:

$\cos\beta = -\cos\partial = -p/a$ y por tanto $-2ac\cos\beta = 2\,ac\,p/a = 2\,cp$

$a^2 = p^2 + h^2$

$b^2 = (c+p)^2 + h^2 = c^2 + 2cp + p^2 + h^2 = c^2 - 2ac\cos\beta + a^2$

Pitágoras y la trigonometría

La función trigonométrica seno (x) se define para triángulos rectángulos como cociente del cateto opuesto sobre la hipotenusa (Fig. 40):

$\text{sen}\,(x) = a/c$

Coseno se define como el cociente del cateto adyacente sobre la hipotenusa:

$\cos\,(x) = b/c$

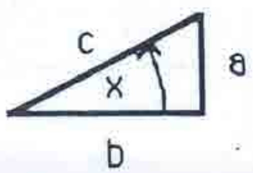


Figura 40

Como dos triángulos que tienen los ángulos correspondientes iguales entre sí son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales: si en uno las medidas son a, b, c, en el otro serán ak, bk, ck. Es decir, las razones de los lados correspondientes no varían de un triángulo a otro. De aquí se sigue que las funciones seno y coseno sólo dependen del ángulo x, y no del tamaño del triángulo.

Se puede definir seno y coseno para cualquier ángulo de la siguiente manera. En un círculo unitario, es decir de radio igual a 1, si A es el punto que determina el ángulo x (un arco de longitud x), entonces cos (x) es igual a OB, la proyección horizontal del segmento OA (Fig. 41). Seno se define como AB, la proyección vertical de OA. Esta es una extensión de la definición anterior de seno y coseno: en el caso que $0 \leq x \leq 90°$, AB es el cateto apuesto, OA es la hipotenusa.

$$\text{sen}(x) = AB/OA = AB/1 = AB.$$

Del mismo modo para coseno: $\cos(x) = OB/OA = OB/1 = OB$.

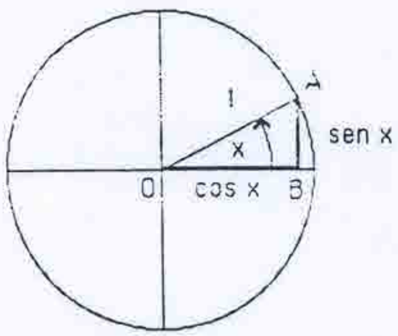


Figura 41

El teorema de Pitágoras es equivalente a la identidad trigonométrica fundamental

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Esta ecuación es válida para cualquier valor de x y no sólo para los valores posibles de x en triángulos rectángulos.

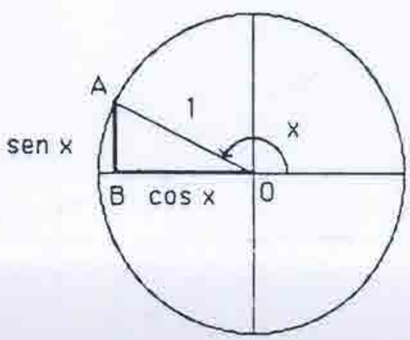


Figura 42

Demostración

En el triángulo rectángulo AOB (ver figura 42) aplicamos el teorema de Pitágoras

$$AB^2 + OB^2 = OA^2$$

pero AB = sen (x), OB = cos (x), OA = 1, de donde se tiene el resultado deseado:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Conversamente, si la fórmula $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ es válida, entonces tenemos el resultado

$$AB^2 + OB^2 = OA^2$$

para el caso en que OAB es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene longitud 1. El resultado se tiene para cualquier triángulo semejante O'A'B', ya que los lados correspondientes son proporcionales O'A' = kOA, O'B' = kOA, A'B' = kAB. El teorema de Pitágoras para cualquier triángulo es $k^2AB^2 + k^2OB^2 = k^2OA^2$

La generalización de Pappus

En esta generalización, el triángulo puede ser un triángulo cualquiera (no necesariamente un triángulo rectángulo), y cualquier paralelogramo toma el lugar de los cuadrados en dos de los lados.

Sea ABC un triángulo, y sean ABED y BCFG dos paralelogramos cualesquiera sobre los lados AB y BC. Sea H la intersección de los lados DE y FG.

Si se construye sobre AC un paralelogramo con lados AL y CM paralelos y congruentes a HB (Fig. 43), entonces la suma de las áreas de los paralelogramos sobre los lados AB y BC es igual al área del paralelogramo sobre AC.

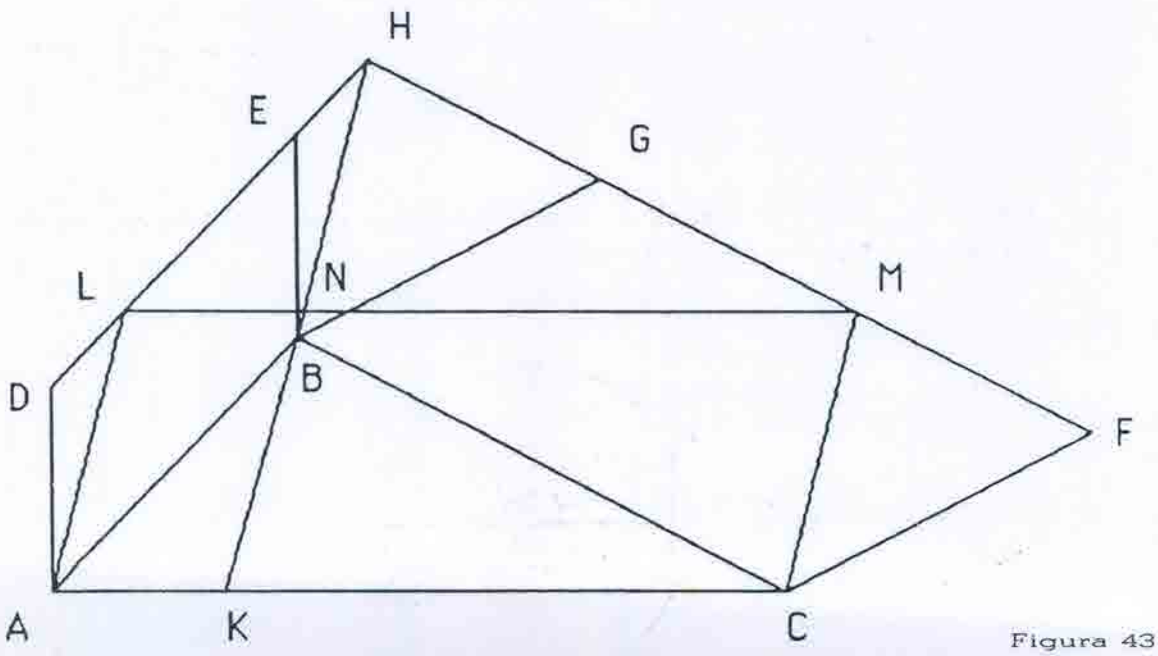


Figura 43

Demostración

Sea ACML un palalelogramo con AL y CM paralelos y congruentes con HB. Prolonga HB hasta K. El paralelogramo AKNL tiene la misma área que el paralelogramo ABHL (tienen la misma base AL, y el lado opuesto a AL en ambos está sobre la misma recta). El paralelogramo ABHL tiene la misma área que el paralelogramo ABED (tienen la misma base AB, y el lado opuesto a AB está sobre la misma recta). Por tanto AKNL tiene la misma área que ABED.

De igual modo el paralelogramo NKCM tiene la misma área que el paralelogramo BCFG.

Por tanto, el área de ACML es igual a la suma de las áreas de los paralelogramos BCFE y ABED.

El análogo del teorema de Pitágoras en la geometría sólida.

En un tetraedro que posee un vértice tri-rectangular O (ver Fig. 44), si las áreas de las tres caras que se encuentran en O son A, B, y C, el área D de la cara opuesta a O está dada por

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

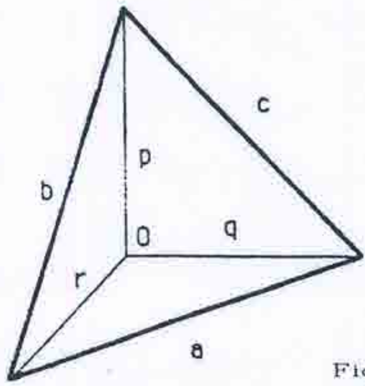


Figura 44

Demostración

Sea h la altura sobre la base a de la cara D (ver Fig. 45).

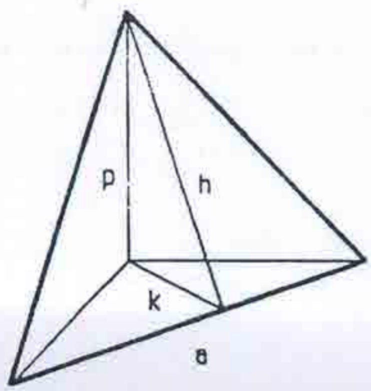


Figura 45

Entonces $D = ah/2$, h se puede calcular como $h^2 = k^2 + p^2$, donde k es la altura sobre la base a del triángulo A. También tenemos que $A = ak/2$

$$
\begin{aligned}
4D^2 &= a^2h^2 \\
&= a^2(k^2 + p^2) \\
&= 4A^2 + a^2p^2 \\
&= 4A^2 + (r^2 + q^2)p^2 \\
&= 4A^2 + (rp)^2 + (pq)^2 \\
&= 4A^2 + 4B^2 + 4C^2
\end{aligned}
$$

De aquí se obtiene el resultado deseado:

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

Pitágoras en otros mundos

Si a un plano lo dotamos de un sistema rectangular de coordenadas, podemos utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar la distancia entre dos puntos (x_1, x_2) y (y_1, y_2). La distancia d entre los puntos es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo (ver Fig. 46). Los catetos están dados por $x_1 - y_1$ y $x_2 - y_2$. Por lo tanto

$$d^2 = (x_1 - y\ y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

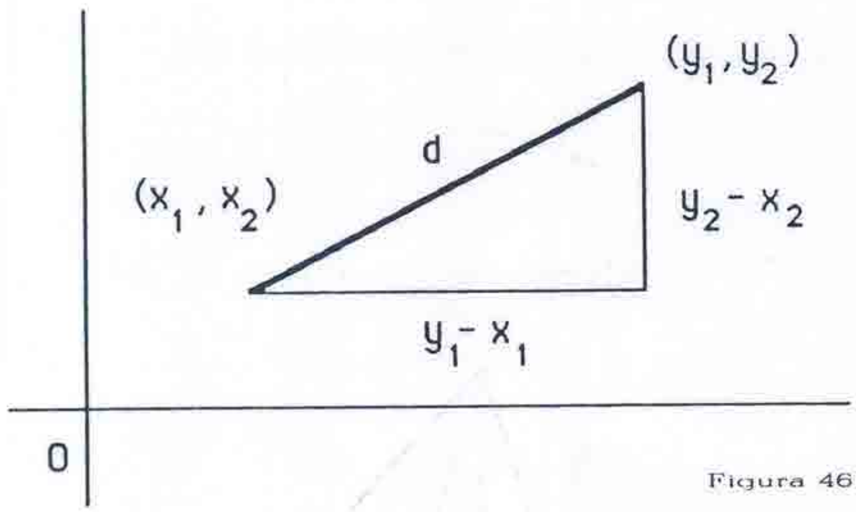


Figura 46

Podemos también invertir el proceso y en un plano coordenado definir la distancia entre dos puntos (x_1, x_2) y (y_1, y_2) como

$$d = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2} \qquad \text{(métrica euclideana).}$$

La métrica euclideana puede ser generalizada a espacios coordenados de más dimensiones. Si **x** = $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y **y** = $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son dos puntos en un espacio de coordenadas de dimensión n, la distancia entre ellos se puede definir como:

$$d = [\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2]^{1/2}$$

Sin embargo, la métrica euclideana no es la única posible en un plano coordenado. La distancia entre dos puntos (x_1, x_2) y (y_1, y_2) en un plano coordenado también puede ser definida como

$$d = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \qquad \text{(métrica del taxi, Smith, 1977)}$$

El lugar geométrico de puntos que taxi-equidistan de un punto fijo en esta geometría ya no es un círculo (Fig. 47).

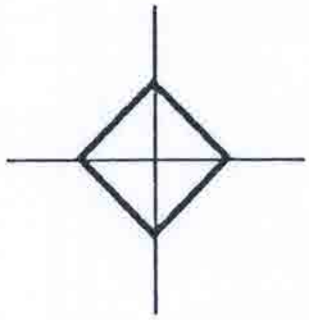


Figura 47 Lugar de puntos que taxi-equidistan del origen.

El lugar geométrico de los puntos que taxi-equidistan de dos puntos ya no es necesariamente una línea recta (Fig. 48).

En esta geometría no tenemos el teorema de Pitágoras.

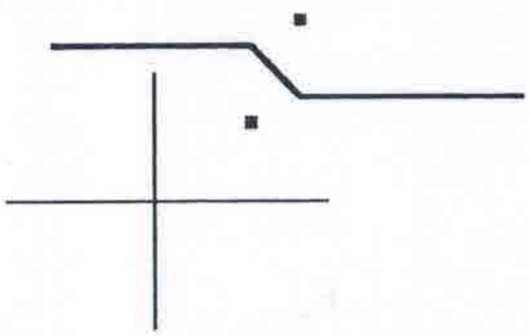


Figura 48 Lugar de puntos que equidistan de dos puntos fijos.

Pitágoras y los vectores

R^2 puede ser considerado como espacio vectorial, donde la suma entre dos vectores **x** y **y** está definida coordenada a coordenada.

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

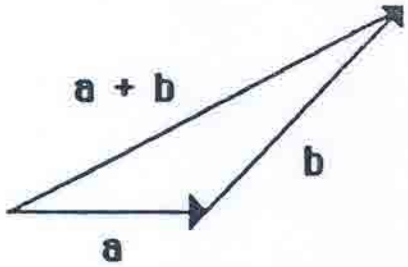


Figura 49

En $\mathbf{R}^2$ se puede definir el producto interno de dos vectores de la manera usual

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

El producto interno satisface:

Si **a**, **b** son vectores y **r** es un número real

(i) $a \cdot b = b \cdot a$
(ii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
(iii) $a \cdot rb = r\,(a \cdot b)$

La norma (longitud) de un vector está relacionada con el producto interno

$$a \cdot a = |a|^2$$

Si γ es el ángulo entre los vectores **a**, **b**, tenemos también la relación $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \gamma$
$\gamma = \beta - \alpha$, por tanto $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$ (ver figura 50)

$a_1 = |\mathbf{a}| \cos \alpha \qquad b_1 = |\mathbf{b}| \cos \beta$

$a_2 = |\mathbf{a}| \operatorname{sen} \alpha \qquad b_2 = |\mathbf{b}| \operatorname{sen} \beta$

Por tanto, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\mathbf{a}| \cos \alpha \times |\mathbf{b}| \cos \beta + |\mathbf{a}| \operatorname{sen} \alpha \times |\mathbf{b}| \operatorname{sen} \beta = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \gamma$

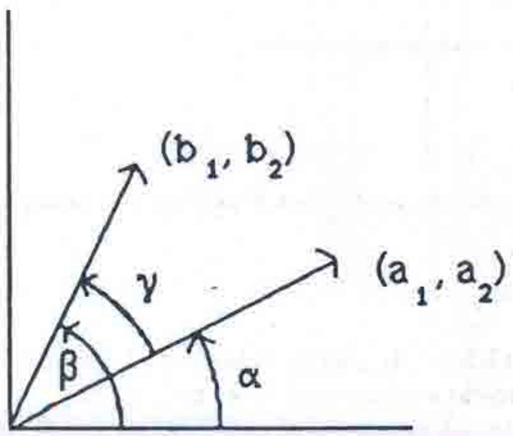


Figura 50

Invirtiendo el proceso, en espacios vectoriales que cuenten con un producto interior que satisfaga las condiciones i), ii), iii), podemos definir ángulos por medio de la ecuación

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \gamma$$

es decir el ángulo γ entre dos vectores **a** y **b** está dado por

$$\cos \gamma = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} / |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

(Nota que esta es otra forma de obtener la ley de cosenos).

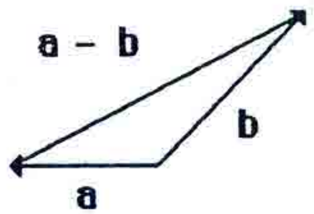


Figura 51

Los vectores perpendiculares satisfacen $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, de modo que

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

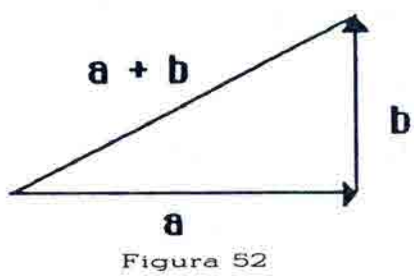


Figura 52

En este contexto de un espacio vectorial con producto interior, el teorema de Pitágoras es válido.

Sin embargo los espacios vectoriales no necesariamente cuentan con un producto interior, así que no en cualquier espacio vectorial vale la relación pitagórica.

Geometrías no euclideanas

En una geometría no euclideana, por ejemplo la geometría en una esfera, la relación pitagórica para los lados de un triángulo rectángulo no es válida. Esto se ve claramente en un triángulo isósceles formado por dos meridianos y el ecuador (Fig. 53). En este triángulo dos de los ángulos son rectos.

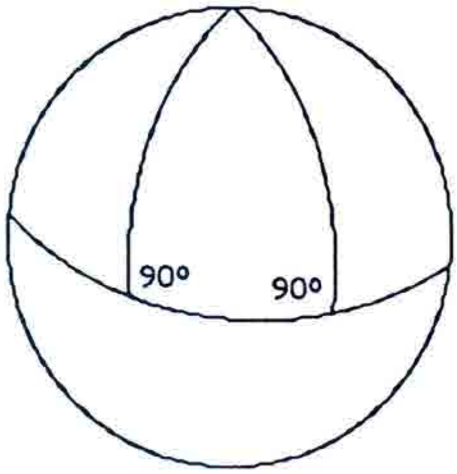


Figura 53

Sin embargo, para espacios de curvatura constante $1/k^2$ se tiene la siguiente relación para triángulos rectángulos:

$$\cos(c/k) = \cos(a/k)\cos(b/k)$$

El teorema de Pitágoras se puede ver como un caso límite de esta relación cuando la curvatura tiende a cero, es decir en un plano.

Desarrollandose en series los cosenos se tiene

$$1 - c^2/(2!\,k^2) + c^4/4!\,k^4 - \ldots =$$

$$(1 - a^2/(2!\,k^2) + a^4/4!\,k^4 - \ldots)(1 - b^2/(2!\,k^2) + b^4/4!\,k^4 - \ldots)$$

$$= 1 - [a^2/2! + b^2/2!]/k^2 + [a^4/4! + a^2b^2/(2!\,2!)]/k^4 \ldots$$

multiplicando por k^2 ambos lados se tiene

$$c^2/2! - 1/k^2\,[c^4/4! - \ldots] =$$

$$= a^2/2! + b^2/2! - 1/k^2\,[a^4/4! + a^2b^2/2!\,2!) - \ldots]$$

Haciendo tender $1/k^2$ a cero para un espacio plano, se obtiene la relación Pitagórica

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Referencias

APOSTOL, T. *The theorem of Pythagoras* (video). National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *What is mathematics?* Oxford University Press, 1941.

DOLAN, D. Right or not: A triangle investigation. *Mathematics Teacher 72* (1979), pp. 279-282.

FERRINI-MUNDI, J.; BALOMENOS, R. H. *Similarity: Geometry in proportion. New Hampshire Inservice Geometry Program.* University of New Hampshire, 1987.

FLORES, A.; MIRABAL, F.; MARTÍNEZ, A.; LERMA, J. Prácticas de matemáticas para tercero de secundaria. Guanajuato: Comunicaciones del CIMAT, 1987.

HALL, G. D. A Pythagorean puzzle. In: *Teacher-made aids for elementary school mathematics* National Council of Teachers of Mathematics, 1974.

HEATH, T. L. *The thirteen books of Euclid's Elements* 3 Vols. Dover, 1956.

GLENN, W. H.; JOHNSON, D. A. *The Pythagorean theorem. Exploring mathematics on your own.* Webster, 1960.

LAING, R. A. Preparing for Pythagoras. In Maletsky. E. and Hirsch, C. (eds) *Activities from the Mathematics Teacher.* National Council of Teachers of Mathematics, 1981.

LOOMIS, E. S. *The Pythagorean proposition.* National Council of Teachers of Mathematics, 1968.

MATHEMATICS RESOURCE PROJECT. *Geometry and visualization.* Creative Publications, 1977.

PÓLYA, G. *Mathematics and plausible reasoning*, vol 1. Princeton University Press, 1954.

PÓLYA, G. *Mathematical discovery.* Wiley, 1981.

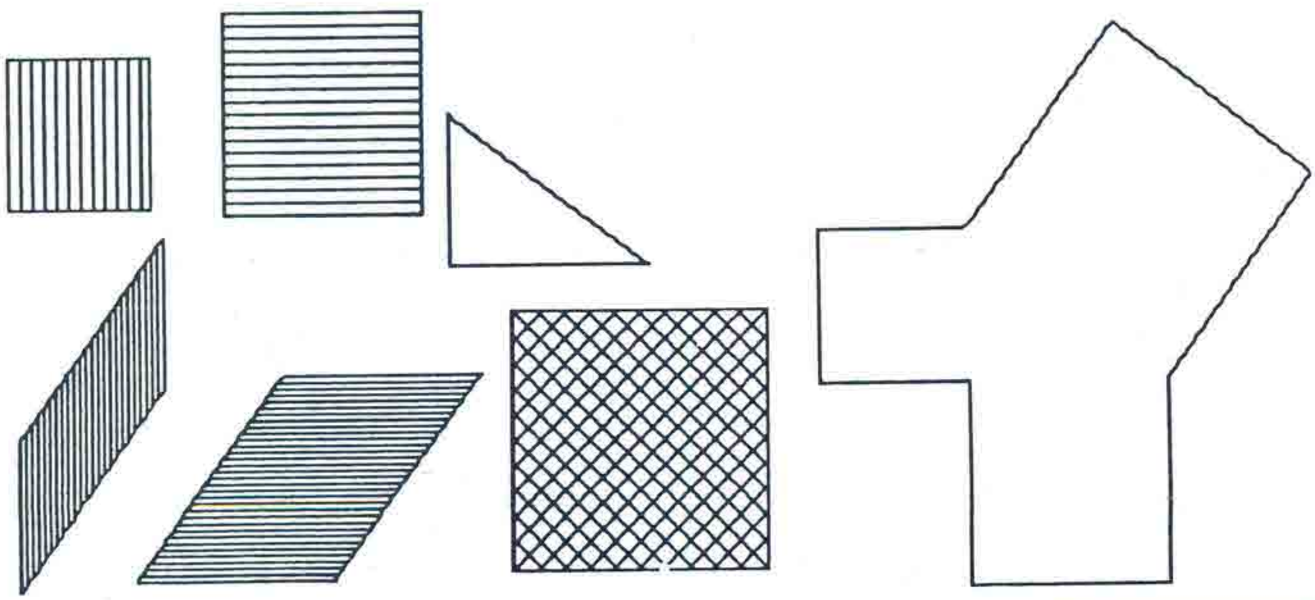
SMITH, S. A. Taxi distance. *Mathematics Teacher, 70,* (1977), p. 431-434.

SWETZ, F. J.; KAO, T. I. *Was Pythagoras Chinese?* Pennsylvania State University/National Council of Teachers of Mathematics, 1977.

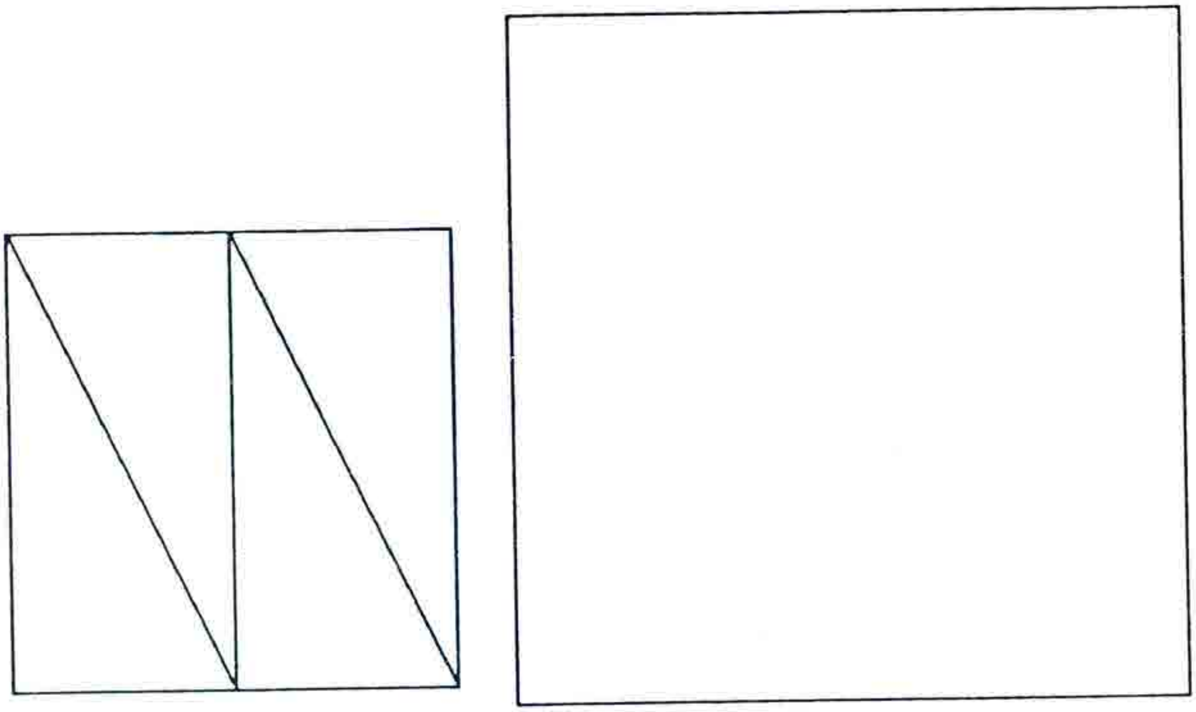
VAN HIELE, P. M. *Structure and insight: A theory of mathematics education.* Academic Press, 1986.

Materiales recortables

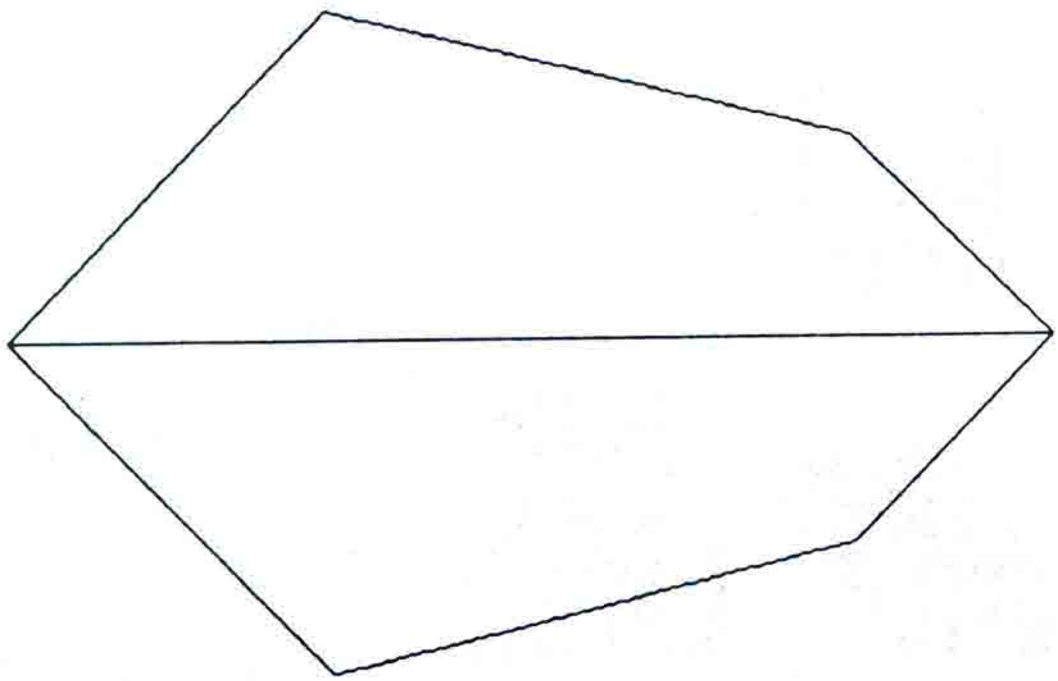
Recorta las piezas y arma el rompecabezas.



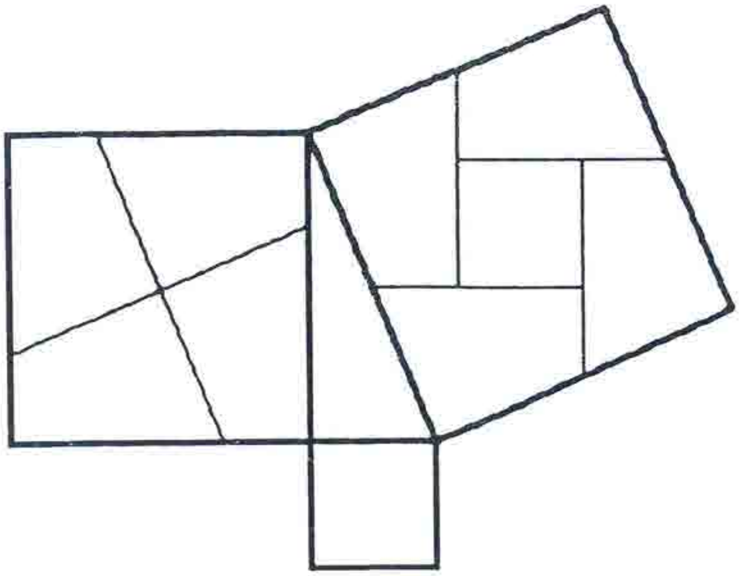
Recorta los cuatro triángulos y acomódalos sobre el cuadrado de dos formas diferentes para obtener el teorema de Pitágoras.



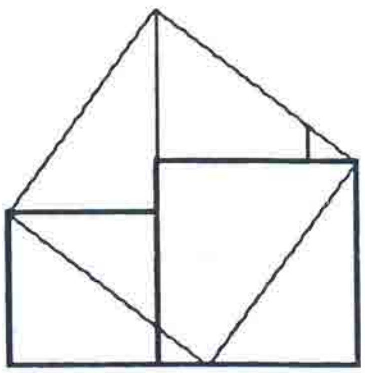
Recorta la figura por la línea central y voltea la parte de abajo.



Recorta las piezas del cuadrado del cateto mayor y el cuadrado del cateto menor y colócalos sobre el cuadrado de la hipotenusa.



Recorta las piezas de los cuadrados de los catetos y acomódalos sobre el cuadrado de la hipotenusa.



RESUMEN

El rey Felipe II fue discípulo de Juan Martínez Silíceo, uno de los matemáticos más prestigiosos de la España de la primera mitad del siglo XVI. Durante su reinado, fue un gran defensor del estudio de las Ciencias.

Felipe II y su arquitecto Juan de Herrera tuvieron la idea de perpetuar en El Escorial un culto especial a la Matemática, prueba de ello es la construcción de la Biblioteca.

El objetovo de este trabajo es introducirnos dentro de dicha Biblioteca con el fin de analizar los principales manuscritos y ejemplares, así como el estudio de tres grandes bibliotecas que Felipe II adquirió para El Escorial: La Biblioteca Zadan, La Biblioteca de Juan de Herrera y la Biblioteca de Páez de Castro.

= = = = = = = = = = = = = = = = = = = =

La Feria de Pitágoras

Alfinio Flores

En el Vol. 4, No. 1 apareció la primera parte.
Este resúmen es para ambas partes.

Resúmen

Los enfoques al teorema de pitágoras en las dos partes del artículo siguen a grandes rasgos los niveles de Van Hiele de desarrollo cognitivo en geometría. Empieza con casos particulares. Luego se dan demostraciones informales, luego demostraciones formales. Se generaliza el teorema, primero en un contexto euclideano: en el espacio de tres dimensiones, y la trigonometría. Se analiza después el teorema en $\mathbf{R}^2$ visto como espacio métrico y vectorial, donde la métrica sugerida por el teorema de Pitágoras, es una de las posibles métricas. Finalmente se ve el teorema correspondiente en la esfera. Hay actividades adecuadas para alumnos de primaria y de secundaria. Hay demostraciones formales y resultados alcance de los alumnos de nivle medio. Hay otras partes dirigidas al maestro de matemáticas y al alumno de matemáticas de nivel superior.

Contenido