Resolución de Problemas; El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a Considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas.

Luz Manuel Santos

Introducción

Durante el aprendizaje de las matemáticas, los alumnos estudian conceptos matemáticos, teoremas, algoritmos, definiciones, y varias estrategias que son utilizadas para resolver problemas. Esta actividad de resolver problemas ha sido reconocida como un componente importante en el estudio del conocimiento matemático. Halmos (1980) sugirió que resolver problemas es el corazón de las matemáticas. Kleiner (1986) enfatizó que el desarrollo de conceptos y teorías matemáticas se originan a partir de un esfuerzo por resolver un determinado problema. Diudonne reconoció que "la historia de las matemáticas muestra que los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico" (citado en Kleiner, 1986. p. 31). En la práctica de enseñar matemáticas, el uso de diversos problemas se presenta en las tareas, los ejemplos de clase, y los exámenes.

Los que han reconocido el proceso de resolver problemas como una importante actividad en el desarrollo de las matemáticas han puesto atención tanto en el diseño y presentación de problemas así como en estudiar las estrategias utilizadas al resolverlos. Hilbert (1900) presentó ante la comunidad matemática 23 problemas que han sido fuente de inspiración para el desarrollo del conocimiento matemático. Descartes en el siglo diecisiete conjeturó la existencia de reglas básicas para resolver cualquier tipo de problemas. En sus libros "Rules for the Direction of Mind" y posteriormente en "Discurse on the Method" presentó estrategias generales, las cuales contenían reglas específicas para resolver problemas. Aunque el proyecto de Descartes resultó muy ambicioso, actualmente existe interés en identificar las estrategias que se utilizan en el proceso de resolver problemas e incorporar actividades de aprendizaje que se relacionen con el uso de estas estrategias en el salón de clases.

Melzak (1988) identifica cinco principios de trabajo (working principies) que se utilizan para resolver una multiplicidad de problemas matemáticos. Entre los principios se menciona por ejemplo el principio del desvio (bypass principle). Aquí, el problema a resolver es considerado en otro dominio el cual facilita resolverlo y posteriormente considerado bajo sus condiciones iniciales. Este principio es ilustrado con varios ejemplos en diferentes áreas incluyendo la ingeniería, medicina, y telecomunicaciones (Melzak, 1983).

El reconocimiento dado a la actividad de resolver problemas en el desarrollo de las matemáticas ha originado algunas propuestas para la enseñanza de las matemáticas. El trabajo de Alan Schoenfeld juega un papel importante en la implementación de las actividades relacionadas con el proceso de resolver problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Schoenfeld fundamenta su propuesta en lo que denomina la adopción de un "microcosmo matemático" en el salón de clases. Esto es, propiciar en el aula condiciones similares a las condicines que los matemáticos (gente que produce matemáticas) experimentan en el proceso del desarrollo de las matemáticas. Schoenfeld reconoce en su propuesta que la actividad de resolver problemas es de suma importancia en el proceso de aprendizaje de esta disciplina.

La propuesta de enseñar matemática a través del método de resolver problemas ha sido importante en Norte América en los últimos 15 años; sin embargo, Schroeder & Lester (1989) identifican varias posibles direcciones de los cursos basados en este método de resolver problemas. En este artículo se intenta seguir los cambios en el trabajo de Schoenfeld. Se destaca el marco de análisis que ha utilizado en el estudio del proceso de resolver problemas.

Schoenfeld ha estado enseñando un curso en la Universidad de Berkeley de cómo resolver problemas por varios años y algunos de sus resultados indican que es posible propiciar condiciones en el salón de clases para que los estudiantes desarrollen un pensamiento matemático. Es decir, motivar a los estudiantes para que en el salón de clases desarrollen matemáticas de manera similar que los matemáticos.

Cómo resolverlo: El inicio y los primeros cambios

Schoenfeld, matemático puro de profesión, ha dedicado tiempo a examinar la forma de cómo gente que desarrolla matemáticas actúa cuando resuelve problemas matemáticos. Ha identificado diferencias en cuanto a la selección y uso de varias estrategias para resolver problemas entre expertos y estudiantes. Por ejemplo, encontró que aún cuando algunos estudiantes habían estudiado recientemente el contenido necesario para resolver un problema geométrico, éstos tuvieron dificultades para resolverlo, mientras que un matemático trabajando en un área no directamente relacionada mostró una serie de estrategias que le ayudaron a recordar el contenido y consecuentemente a resolver el problema (Schoenfeld, 1985).

En el estudio de las diferencias entre expertos y estudiantes, Schoenfeld reconoce que la claridad en el entendimiento del problema resulta determinante en el proceso de resolver problemas. En esta primera fase de acercamiento hacia el problema es importante reflexionar en cuestiones tales como "qué se pide" "qué se tiene" y "a donde se quiere llegar". Schoenfeld (1985) encontró que los expertos dedican más tiempo en la fase del entendimiento del problema que los estudiantes y ésto repercute en el éxito al intentar resolverlo.

El trabajo de Pólya distingue algunos componentes fundamentales que caracterizan el proceso de resolver problemas; además, presenta varios ejemplos donde se ilustra el uso de diversas estrategias. El libro de Pólya "How to solve it" juega un papel importante en el trabajo de Schoenfeld. En este libro Pólya identifica cuatro componentes relacionados con el proceso de resolver problemas. Estos son: el entendimiento del problema, el diseño de un plan, el proceso de llevar a cabo el plan, el análisis retrospectivo del proceso empleado para resolver el problema y la plausibilidad de la solución o soluciones. El libro de Pólya contiene ejemplos en donde se ilustra el uso de diversos métodos heurísticos, los cuales incluye: Dividir o descomponer el problema en problemas más simples, usar diagramas o gráficas, y trabajar el problema en sentido inverso. Schoenfeld, quien fue educado formalmente en matemáticas, reconoce que él mismo ha usado estas estrategias; sin embargo expresa: "Yo las he asimilado por accidente, en virtud de haber resuelto miles de problemas durante mi carrera (esto es, yo he sido 'entrenado' por la disciplina, recogiendo pedazos y piezas del pensamiento matemático como me fui desarrollando)" (Schoenfeld, 1987. p. 30).

Schoenfeld se identifica en el grupo de gente que ha estudiado matemáticas y ha asimilado varias estrategias como resultado de haber resuelto muchos problemas. En general, los cursos de matemáticas a nivel universitario se desarrollan con un instructor que presenta a los estudiantes un contenido acabado, pulido y formalizado. Se espera que los estudiantes usen ese contenido para encontrar la solución de problemas. Además, después que el contenido ha sido presentado, se asume que los estudiantes estarán motivados a resolver diversos problemas. El resultado es que muchos estudiantes no emprenden ese camino ya que desde el inicio experimentan dificultades en el uso del material ya estudiado (Santos Trigo, 1990).

Aunque Schoenfeld reconoce el potencial de las estrategias discutidas por Pólya, se dio cuenta que los estudiantes que reciben entrenamiento para las competencias de matemáticas en los Estados Unidos no usan las ideas de Pólya. El principal método usado por los entrenadores en este tipo de competencias es que "uno aprende a resolver problemas exitosamente en la medida que resuelve un gran número de problemas" (Schoenfeld, 1979). En el análisis de las desventajas de este método, Schoenfeld indicó que algunos estudiantes pueden tener éxito con este método cuando resuelven problemas en el mismo contexto, pero a menudo experimentan dificultades cuando el contexto del problema es diferente. Shoenfeld expresó:

> un estudiante puede ser expuesto a un determinado problema y entenderlo completamente en ese momento. Pero esto no garantiza que la "lección" será aprendida ó que la solución será retenida de alguna manera por los estudiantes. Ausente (o más precisamente, ser incapáz de tener acceso) de las conexiones apropiadas, el estudiante puede más tarde encontrarse a sí mismo viendo el mismo problema en total frustración, sabiendo que él lo ha resuelto antes pero incapáz de recordar aun el método general de solución (p. 39).

Con esta perspectiva, la tarea tomada por Schoenfeld fue de investigar por qué las ideas de Pólya no daban resultados o porque estas ideas no eran consideradas como guía en los entrenamientos de los estudiantes que participarían en diversas competencias matemáticas.

Las Matemáticas y Otras Disciplinas

Schoenfeld revisó algunos estudios realizados en ciencias cognoscitivas e inteligencia artificial. Encontró que en estas disciplinas se han producido programas que son capaces de resolver problemas en áreas como ajedrez, lógica simbólica y cálculo integral con mucho éxito. Las ideas empleadas en estos programas incorporan estrategias usadas por expertos al resolver problemas. Para describir y posteriormente codificar las actividades usadas por los expertos se emprende una observación sistemática del proceso que ellos utilizan al resolver los problemas. Generalmente estas observaciones se organizan en conjuntos de procedimientos descriptivos que las computadoras usan para producir resultados. Schoenfeld (1987 b) mencionó que para entender el proceso usado por resolvedores de problemas matemáticos y proponer direcciones para la instrucción de las matemáticas, es necesario tomar en cuenta la disciplina, la dinámica del salón de clases y el aprendizaje junto con el proceso de pensar. Es decir, que es importante la incorporación del conocimiento de los matemáticos, profesores de matemáticas, educadores y científicos del conocimiento.

Es importante considerar el proceso utilizado por los matemáticos para resolver problemas. Por ejemplo, información acerca del tipo de estrategias que utilizan inicialmente al resolver un problema, los cambios que ocurren en el proceso, los aspectos metacognoscitivos y, la elevación contínua del proceso son aspectos a considerar en el aprendizaje de esta disciplina. Reflexiones acerca de qué son las matemáticas y su desarrollo son ampliamente documentadas en los trabajos de Pólya (1945), Lakatos (1976), Kline (1980) y Kitcher (1983).

Los profesores de matemáticas son agentes importantes en la implementación de diversas actividades de aprendizaje, su opinión es importante en el conocimiento de las ventajas y limitaciones que ofrece el salón de clases. Los educadores desarrollan un papel fundamental en el uso de métodos y propuestas específicas en el aprendizaje de las matemáticas. Forman un punto de apoyo entre las ideas de los instructores y las propuestas que emanan de la observación sistemática del quehacer matemático. Así como la experiencia recorrida por científicos del conocimiento en el área relacionada con cómo la gente resuelve problemas ha sido de gran utilidad para entender el proceso utilizado por los estudiantes al resolver problemas matemáticos. Gardner (1985) sugiere que para entender el proceso de resolver problemas uno tiene que considerar información de áreas como sicología, filosofía, inteligencia artificial, lingüística y antropología.

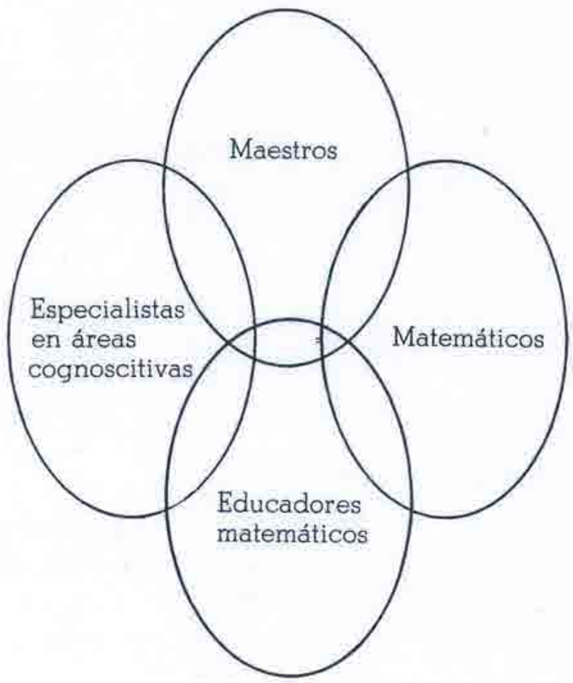

Figura 1. Contribuidores Principales al Progreso en Instrucción Matemática. (Schoenfeld, 1987 b. p. XIX)

Algunos resultados

En consideración de estos componentes Schoenfeld enfoca su investigación a la siguiente pregunta: ¿Qué nivel de explicación es necesario para que los estudiantes puedan en realidad usar las estrategias que uno considera importantes? (Schoenfeld, 1987. p. 31). Los resultados de la respuesta a esta pregunta generaron información acerca del por qué las ideas de Pólya no estaban funcionando en el salón de clases. "La razón es que los métodos heurísticos propuestos por Pólya no son realmente coherentes". Schoenfeld recalcó: "en resúmen, las caracterizaciones de Pólya son etiquetas bajo las cuales familias de estrategias relacionadas están subsumidas" (Schoenfeld, 1987. p. 31). Schoenfeld presentó varios ejemplos en los cuales una estrategia caracterizada por Pólya producía muchas similares pero básicamente diferentes subestrategias. Schoenfeld (1987) presenta tres problemas en donde la estrategia "examinar casos especiales" se aplica en caminos conceptualmente diferentes. Los problemas son:

1. Determine una fórmula para la siguiente serie.

$\Sigma k/(k + 1)$ donde k toma valores desde 1 hasta n

2. Sea P(x) y Q(x) dos polinomios cuyos coeficientes son los mismos pero en orden contrario, es decir $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ & $Q(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \ldots + a_0x^n$ ¿Cuál es la relación entre las raíces de P(x) y Q(x)? Probar la respuesta.

3. Sea a_0 & a_1 dos números reales dados. Definamos la sucesión $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-2} + a_{n-1})$ con $n \geq 2$. ¿Es esta sucesión convergente? ¿Cuál es su límite?

Para el problema 1, es importante examinar que sucede cuando k toma los correspondientes valores de 1, 2, 3, ... esto ayudará a analizar el comportamiento y encontrar la fórmula que después se puede probar por inducción matemática. Sin embargo, esta misma estrategia no dará buenos resultados en el problema 2. En este caso la búsqueda de casos especiales se reduce a encontrar polinomios que son fáciles de factorizar. Por ejemplo, si $P(x) = (2x + 1)(x + 4)(3x - 2)$ entonces es fácil encontrar que Q(x) es factorizable y comparar sus raíces. Para el problema 3, si se escogen valores $a_0 - 1$ & $a_1 - 1$ es posible ver lo que pasa para esta particular sucesión.

Schoenfeld observa que estos problemas tipifican una larga clase de problemas y ejemplifica diferentes casos especiales.

Como resultado del anterior análisis, la principal implicación práctica para la enseñanza de las matemáticas fue diseñar actividades de aprendizaje que permitan: i) identificar el uso de una estrategia en particular; ii) discutir la estrategia en suficiente detalle de manera descriptiva; y iii) dar a los estudiantes un apropiado grado de entretenimiento para su uso.

Los resultados de este estilo descriptivo mostraron un progreso en la forma en que los estudiantes resuelven problemas. Sin embargo, Schoenfeld (1985) reconoció que este método no era suficiente. Por ejemplo, algunos estudiantes sabían las estrategias pero no reconocían cuando utilizarlas. En el problema "resolver $\int x dx/(x^2 - 9)$" Schoenfeld encontró que de 178 estudiantes, 44 decidieron usar fracciones parciales para expresar $x/x^2 - 9$ en la forma $A/(x - 3) + B/(x + 3)$ el cual es correcto pero lleva mucho tiempo, 17 estudiantes decidieron sustituir $x = 3$ senϕ el cual también consume mucho tiempo. Solamente la mitad de los estudiantes se dieron cuenta que se trataba de una integral inmediata de la forma $\int dx/x$. "Hacerla bien en matemáticas, entonce, se basa en más que conocer la materia; se basa en conocer qué técnicas se usan y cuándo usarlas. Si tu selección no es buena, tú estás en dificultades" (Schoenfeld, 1987, p. 32). Resultados similares fueron observados en alumnos de un curso de cálculo cuando se les preguntó: "encontrar el valor (valores) de $(x + y)$ si $x^2 + y^2 = 36$ & $xy = -10$ (Santos Trigo, 1990).

Como respuesta a lo observado en su curso, Schoenfeld incluyó un conjunto de estrategias de monitoreo como parte del proceso de resolver problemas. Estas incluyen preguntas en las cuales los estudiantes tienen que evaluar las decisiones tomadas en el proceso de resolver problemas. Con este tipo de instrucción, los resultados obtenidos por Schoenfeld mostraron avances en los estudiantes. Sin embargo, Schoenfeld observó que sus estudiantes estaban respondiendo bien porque se les preguntaba el uso de las estrategias en un contexto específico. Aun con problemas complicados los estudiantes sabían las estrategias, el contenido y los posibles métodos de solución, "estuve teniendo buenos resultados en parte porque había limitado el contexto: los estudiantes sabían que tenían que usar las estrategias usadas en la clase y en los exámenes" (Schoenfeld, 1987. p. 34).

Similarmente, Schoenfeld (1988 c) presentó resultados de una clase (en donde él fue observador) de matemáticas bien organizada. Esto es, los alumnos eran disciplinados, el instructor presentaba el contenido con varios ejemplos y, promovía la participación de varios estudiantes. En esta clase los estudiantes obtuvieron buenos resultados en exámenes oficiales (regents exams) pero mostraron pobre entendimiento de las ideas matemáticas. Por ejemplo, los estudiantes creían que la forma de presentación de la solución era más importante que los argumentos; los estudiantes creían que todos los problemas podían ser resueltos en unos cuantos minutos, y que las matemáticas son aprendidas pasivamente, es decir, sin directa discusión del contenido.

De lo anterior se deriva que lo que la matemática signifique para los estudiantes influye en cómo los estudiantes resuelven los problemas. Por ejemplo, en el problema: "¿Qué se ajusta mejor, una clavija cuadrada en un hoyo redondo o una clavija redonda en un hoyo cuadrado?" utilizado en un concurso con los mejores estudiantes de matemáticas. Se encontró que sólo cuatro de 300 participantes justificaron sus respuestas comparando áreas. Aquí, los estudiantes pensaron que no era necesario una justificación mientras que para un matemático sería obvio una respuesta analítica (Schoenfeld, 1987. pp. 34-35).

La siguiente fase del trabajo de Schoenfeld empezó cuando examinó algunos videos de sus estudiantes resolviendo prblemas en contextos diferentes de los de la clase. Schoenfeld reportó: "lo que yo observé no fue nada similar a lo que yo esperaba, y nada de lo que veía como profesor. Generalmente hablando, nosotros vemos lo que los estudiantes hacen en los exámenes; esto es el producto, pero observando solamente en el producto o resultado deja el proceso por el cual se evoluciona totalmente invisible" (Schoenfeld, 1987. p. 33), Schoenfeld observó que los estudiantes a menudo no usaban el contenido matemático que conocían cuando intentaban resolver los problemas. Ellos escogían caminos y persistían en continuar aún cuando no existía ningún progreso hacia la solución del problema.

Schoenfeld sugiere que para entender cómo los estudiantess intentan resolver problemas y consecuentemente proponer actividades que puedan ayudarlos es necesario discutir problemas en diferentes contextos y considerar en la instrucción matemática dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas. En varios estudios, Schoenfeld encontró que existen cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas: dominio del conocimiento, estrategias cognoscitivas, estrategias metacognoscitivas, y sistemas de creencias.

Dominio del conocimiento incluye definiciones, hechos y procedimientos usados en el dominio matemático. Estrategias cognoscitivas incluyen métodos heurísticos tales como descomponer el problema en simples casos, establecer metas relacionadas, invertir el problema, y dibujar diagramas. Estrategias metacognoscitivas se relacionan con el monitoreo empleado al resolver el problema, por ejemplo, el proceso de selección de una estrategia y la necesidad de cambiar de dirección como resultado de una evaluación permanente del proceso. Sistemas de creencias incluye las ideas que los estudiantes tienen acerca de la matemática y cómo resolver problemas.

Schoenfeld (1987 d, 1988 b, 1989 b) reconoce la importancia de relacionar la naturaleza del desarrollo de las matemáticas con el proceso de resolver problemas. Expresó que la principal meta en el aprendizaje de las matemáticas es identificar las conexiones y entender el significado de las estructuras matemáticas. Para lograr estas metas, los estudiantes tienen que discutir sus ideas, negociar, especular acerca de los posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar o desprobar sus ideas. Schoenfeld (1988) mencionó que:

para que los estudiantes vean las matemáticas como una disciplina con sentido, es necesario que interactúen e internalicen los principios asociados con esta disciplina. Los estudiantes necesitan aprender matemáticas en un salón de clases que represente un microcosmo de la cultura matemática, esto es, clases en donde los valores de las matemáticas como una disciplina con sentido sean reflejados en la práctica cotidiana (pp. 87-88).

Principios Epistemológicos

Schoenfeld (1989 b) indicó que los estudiantes deben reconocer los principios epistemológicos de esta disciplina. Por ejemplo, los estudiantes deben reconocer que:

i) encontrar la solución de un problema matemático no es el final de la empresa matemática, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones, generalizaciones de ese problema.

ii) aprender matemáticas es un proceso activo el cual requiere discusiones de conjeturas y pruebas. Este proceso puede guiar a los estudiantes al desarrollo de nuevas ideas matemáticas. Schoenfeld también indicó que es necesario considerar actividades de aprendizaje que sean consistentes con los principios epistemológicos. Por ejemplo, mencionó que "ayudar a los estudiantes a explotar lo que ellos saben, y usar sus conocimientos en forma efectiva, es el enfoque de mi curso" (Schoenfeld, 1989 b, p. 80). Algunas de las actividades de aprendizaje utilizadas por Schoenfeld son:

a) resolver problemas nuevos (nuevos para Schoenfeld) en la clase con la finalidad de mostrar a los estudiantes las decisiones tomadas durante el proceso de resolver problemas.
b) mostrar videos de otros estudiantes resolviendo problemas a la clase. Esto es con la finalidad de discutir las destrezas y debilidades mostradas por los estudiantes en el proceso de resolver problemas.
c) actuar como moderador mientras los estudiantes discuten problemas en la clase. Aun cuando los estudiantes son motivados a seleccionar y tratar ideas que ellos consideren plausibles, el moderador puede proveer algunas direcciones que son de valor para la discusión.
d) dividir la clase en pequeños grupos los cuales discuten problemas matemáticos. El papel del coordinador es elaborar preguntas que

ayuden a los estudiantes a reflexionar en lo que están haciendo. Por ejemplo, por qué han seleccionado determinada estrategia, o por qué deben enfocar o buscar otras alternativas.

Schoenfeld reconoció la importancia de relacionar las actividades de aprendizaje del salón de clases con las actividades que los matemáticos o expertos en el área realizan cuando desarrollan matemáticas. Schoenfeld entafizó:

si uno desea que la gente emerja del salón de clases con el sentido real de las matemáticas, entonces el medio salón de clases tiene que reflejar actividades donde los estudiantes tomen parte en el desarrollo de las matemáticas de tal manera que le encuentren el sentido de estudiar matemáticas... es decir, que exista motivación para que los estudiantes continúen estudiando matemáticas fuera del salón de clases (citado en Vobejda, 1987).

Schoenfeld (1988) sugirió que el principal objetivo en la instrucción matemática es ayudar a los estudiantes a ser autónomos. Schoenfeld indicó que la instrucción matemática debe incorporar estrategias para aprender a leer, conceptualizar y escribir argumentos matemáticos. Aquí, Schoenfeld identificó una quinta dimensión, "actividades de aprendizaje" donde los estudiantes son expuestos a estrategias que pueden ayudarlos a leer argumentos matemáticos. Por ejemplo, los estudiantes son motivados a organizar sus argumentos matemáticos en una secuencia de tres fases: convencete a tí mismo, convence a un amigo, y entonces convence a un enemigo.

En resumen, el trabajo de Schoenfeld incorpora un punto de vista de las matemáticas en la cual los estudiantes son motivados a discutir el sentido de las ideas matemáticas. El estudio de las matemáticas es considerado como una actividad dinámica en donde existe espacio para un nuevo desarrollo por parte de los estudiantes. Las actividades en el salón de clases incluyen discusiones abiertas entre los estudiantes e instructor. La exhibición directa por parte del instructor del proceso de resolver problemas incluyendo las estrategias de carácter metacongnoscitivo. En el análisis del proceso de resolver problemas Schoenfeld recomienda poner atención en los recursos de los estudiantes, las estrategias cognoscitivas y metacognoscitivas, así como en las creencias que ellos tengan acerca de las matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

DESCARTES, R. *(1952). Rules for the direction of the mind and discourse of method (E. J. Haldane & G.R.I. Ross, Trans.). In Great Books of the Western World* (vol. 31). Chicago: Encyclopedia Britannica.

GERDNER, H. (1985). The mind's new sciencw. New York: Basic Books.

HALMOS, P. R. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly, 87* pp. 519-524.

KITCHER, P. (1983). *The nature of mathematical knowledge.* Oxford: Oxford University Press.

KLEINER, I. (1986). Famous problems in mathematics: An outline of a course. *For the Learning of Mathematics, 6* (1), pp. 31-38.

KLINE, M. (1980). *Mathematics, the loss of certainty,* Oxford: Oxford University Press.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and refutations.* Cambridge: Cambridge University Press.

MELZAK, Z. A. (1983). *Bypasses: A simple approach to complexity.* New York: John Wiley & Sons.

MELZAK, Z. A. (1988). *Class notes for a course in the history of mathematics*, University of British Columbia.

PÓLYA, G. (1945) *How to salve it*. Princeton: Princeton University Press.

SANTOS TRIGO, L. M. (1990). *College students' methods for solving mathematical problems as a result of instruction based on problem solving*. Unpublished doctoral dissertation. University of British Columbia.

SCHOENFELD, A. (1979). Teaching problem solving in college mathematics: The elements of a theory and report on the teaching of general mathematical problem-solving skills. In R. Lesh, D. Mierkiewioz, and M. Kantowski (Eds.), *Applied mathematical problem solving* (pp. 37-71) Columbus, OH: Center for Science and Mathematics Education, Ohio State University.

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

SCHOENFELD, A. (1985 b). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving; Multiple research perspectives* (pp. 345-395). London: Lawrence Erlbaum.

SCHOENFELD, A. (1987). Confessions of an accidental theorist. *For the Learning of Mathematics*, (1), pp. 30-38.

SCHOENFELD, A. (1987 b). *What's all the fuss about metacognition?* In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education (pp. 1-31). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.*

***SCHOENFELD, A.** (1987 d). On mathematics as sense-marking: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics.* Paper presented at 1987 OWEI/LRDC Conference on Informal Reasoning and Education.

SCHOENFELD, A. (1988). Problem solving in context(s). In R. Charles and E. Silver (Eds.), *The teaching and assesing of mathematical problem solving* (pp. 82-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

SCHOENFELD, A. (1988 b). Mathematics, technology, and higher order thinking. In R. Nickerson & P. Zodhiates (Eds.). *Technology in education: Looking toward 2020* (pp. 67-96). Hillsdale. NJ: Lawrence Erlbaum.

SCHOENFELD, A. (1988 c). When good teachin leads to bad results: The disasters of "well taught" mathematical courses. *The Educational Psychologist, 23*, pp. 145-166.

SCHOENFELD, A. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior, *Journal for Research in Mathematics Education. 20*, pp. 338-350.

SCHOENFELD, A. (1989 b). Ideas in the air: Speculations on small group learning, environment and cultural influences on cognition, and epistemology. *International Journal of Educational Research, 13* (1). pp. 71-78.

SCHROEDER, T. L. & LESTER, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. R. Trafton & A. P. Shulte (Eds.) *New directions for elementary school mathematics*. Yearbook (pp. 31-42). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

VOBEJDA, B. (1987). A mathematician's research on math instruction. *Educational Researcher, 16* (9), pp. 9-12.