ARTICULOS

Significados y significantes relativos a las fracciones

Introducción.

En el presente artículo se expondrá la problemática en torno a la enseñanza de las fracciones a partir de las dificultades potenciales relativas a los diversos *significados* asociados a este concepto.

En la matemática, en general, y en las fracciones en particular, se confunde frecuentemente a los *significados* (lo cual se refiere al plano conceptual) con los *significantes* (que se refiere al plano de las representaciones).

Por ejemplo, el *cinco* se puede escribir como 5, 1 + 4, 3 + 2, 10/2, V, etcétera. De esta forma se confunde al *concepto* con la *representación escrita,* la cual no es única, de éste.

Los lingüistas denominan a este fenómeno *sinonimia* (varios *significantes* están asociados a un mismo *significado*). Se puede presentar la situación inversa: varios *significados* están asociados a un mismo *significante (homonimia),* esto tiene mucha importancia en la problemática educativa asociada a las fracciones.

Las fracciones en la escuela mexicana.

Antes de entrar en materia conviene mencionar, en forma breve, el tratamiento que se ha dado a la enseñanza de las fracciones en nuestro país, porque esto nos proporciona un elemento de comparación necesario para entender la necesidad de una discusión como la que se propone.

Existen pocos trabajos que hacen una revisión de lo que ha sucedido con la enseñanza de las matemáticas en nuestro país, en particular, sobre la enseñanza de las fracciones son aún menores las fuentes potenciales de consulta. Para los propósitos planteados considero que es suficiente exponer algunos puntos planteados en el trabajo de Alicia Ávila (Ávila; 1986), en el cual se analiza la enseñanza oficial de las matemáticas elementales en México desde 1940 a 1980.

Se sabe que las fracciones han ocupado un lugar en el currículo de la escuela elemental por más de un siglo. Durante este tiempo ha predominado una enseñanza rígida basada en modelos esquemáticos. Desde la implantación de la escuela lancasteriana, en los inicios de vida independiente de nuestro país, se

Eduardo Mancera Martínez

Asesor de la Subsecretaría de
Educación Media de la SEP

prestó mucha atención a la memorización de procedimientos relativos a las fracciones.

En la reforma de 1972 (aún vigente en los tres últimos grados de la primaria) se incorporaron algunas innovaciones en relación a inclusión de "explicaciones" con apoyos gráficos de la multiplicación, la división con base en el inverso multiplicativo, la resolución de problemas con estas dos operaciones y la representación de las fracciones en la recta numérica. Sin embargo, dichas innovaciones correspondían más a una preocupación matemática que a una propuesta psicopedagógica, pues en esta reforma no se consideraron las características del sujeto de aprendizaje: el niño.

Esta posición se dio a pesar de la opinión de educadores de diversos países en relación a la necesidad de considerar los contenidos de enseñanza considerando lo que pueden aprender los niños, lo cual debería determinarse en términos de su desarrollo intelectual y no solamente considerando la cantidad de contenidos para abordar un tema o la secuencia lógica de la disciplina.

Parecería natural, desde la perspectiva de la estructura de la matemática, que si el niño ya conoce los números enteros fácilmente puede abordar las fracciones. Incluso, algunas ideas relativas a ellas pueden abordarse paralelamente al estudio de algunas partes de los números naturales, debido a que no requieren el manejo de muchos contenidos.

Posteriormente, en el año de 1980, se reformaron los planes y programas de los tres primeros grados de educación primaria, con esta reforma parcial aparece un tratamiento didáctico con más apoyo gráfico y dosificado más cuidadosamente que en currícula anteriores, pero los principios en que se basa tal tratamiento permanecen sin modificaciones radicales. Prevalece el interés por el manejo matemático de los temas sin incorporar, en forma clara, elementos sobre el desarrollo conceptual de éstos.

A pesar de que en esta reforma se declara al niño como el centro de la preocupación y se incorporan apoyos gráficos y objetivos para que, "de acuerdo con su forma de conocer, construya el conocimiento", el tratamiento dado a las fracciones no rebasa las presentaciones anteriores. Sólo hubo cambios en la dosificación y expansión de la etapa de manipulación de objetos. Es decir, si bien se promueve la construcción de los conceptos con base en el manejo de material recortable que se proporciona al niño (en este sentido la preocupación y los principios pedagógicos son distintos a los postulados en 1972) la lógica que sustenta a la propuesta didáctica no es distinta de la que se puede ver en los programas y textos de los sesentas: se trata de que el niño comprenda, en primer término, que una fracción es una expresión de la forma a/b en donde el denominador indica las partes en que está dividido un todo (constituido generalmente por una naranja, un pastel, un círculo, un rectángulo o un polígono regular) y el numerador las partes que se toman de ese todo.

Posteriormente, se pretende que el niño establezca equivalencias con base en el mismo modelo de participación de la unidad para que, finalmente, resuelva problemas con adición y sustracción de fracciones. Todo esto invariablemente, con base en la manipulación de objetos sugeridos al profesor o rectángulos que se recomienda recortar y guardar, pues se utilizarán frecuentemente.

Tales propuestas no se basan en el conocimiento de lo que el niño aprende realmente al respecto, en cómo aprende, en lo que no puede aprender y el por qué no puede hacerlo. Por lo cual, dichos esfuerzos han sido inútiles en relación a la mejoría del aprendizaje de las matemáticas.

Esto ha sido similar en otros países, en parte porque la presentación de las fracciones en los libros de texto mexicanos coinciden mucho o fueron adoptadas del extranjero. Streefland (Streefland; 1982), después de una revisión de más de 100 artículos sobre fracciones de la revista "The Arithmetic Teacher", los cuales fueron obtenidos de números que datan desde 1954, encontró que en el curso de algunos años se puso poca atención a la relación de las fracciones con otros conceptos afines. Las propuestas didácticas, de finales de los sesentas, prestaban atención a juegos con fracciones con propósito de ejercitar más que contribuir al desarrollo conceptual. En relación con la comparación y el orden entre fracciones también se enfatizó el aspecto operativo. Además, se fue incrementando la variedad de modelos para representar fracciones (rectángulos, figuras planas y espaciales, ejes numéricos, tableros de diferentes tipos, doblado de papel, etcétera). Desde el inicio de los sesentas se enfatizó la equivalencia de fracciones, de esta forma el número racional, como una clase de equivalencia, desplaza a las fracciones.

También Kieren (Kieren; 1976) indica que "los temas y preocupaciones de los tratamientos de los textos modernos de matemáticas sobre las fracciones son frecuentemente similares a sus predecesores de hace 100 o más años. Transitando sobre problemas *absurdos*. Haciendo énfasis en el desarrollo de la *habilidad* de cálculo".

En la escuela secundaria, de nuestro país, la situación se tornó más grave pues los esfuerzos dedicados a este nivel sufrieron un fuerte golpe desde la introducción de elementos de la llamada "matemática moderna" en este nivel. Esto no sucedió en la escuela primaria tal vez por la existencia de los libros de texto gratuito.

En secundaria se dio mucho espacio a la lógica y los conjuntos y se sacrificaron temas importantes. Por otra parte, el tratamiento que se da a las fracciones resulta muy pobre y conduce a concepciones limitadas que se han arraigado mucho entre los estudiantes, como el uso reiterado del modelo del pastel o de figuras regulares que se han convertido en estereotipos de *todos* susceptibles de ser *partidos*.

Se hace demasiado énfasis en los aspectos operativos, los planteamientos didácticos de los libros reflejan la concepción de que si se aprenden a realizar las operaciones con fracciones se pueden resolver diversos problemas en los que los contextos dados implican el uso de diferentes procedimietnos representados por una fracción. No existe en este nivel un enfoque unificador, debido a que las formas de presentación de las fracciones responden a las concepciones de los diversos autores de textos comerciales.

Podemos decir que en la escuela secundaria la preocupación por aspectos disciplinarios es aún mayor que en primaria y que se tiene un retroceso por el énfasis puesto en los aspectos operativos en vez de hacer intentos en relación a lo conceptual.

Homonimia y sinonimia en las fracciones.

Uno de los problemas en el aprendizaje de las fracciones es que el símbolo $\frac{m}{n}$, donde m y n son números enteros y $n \neq 0$, está asociado a diversos *significados* (homonimia); en efecto, puede representar una razón, un número racional, un operador, etcétera. En el sentido inverso, el concepto de fracción puede representarse como un cociente de enteros o una expresión decimal (sinonimia).

Tomar conciencia de esta situación fue un proceso largo que aún no termina. A continuación se reseñarán brevemente algunos estudios sobre el aprendizaje de las fracciones, que se consideraron más relevantes en esta dirección.

Dienes (1972).

Dienes (Dienes; 1972) plantea que las fracciones pueden considerarse como:

a) Estados.

En el sentido que una fracción puede ser la descripción de un *estado de cosas*. Por ejemplo, la mitad puede significar la descripción de la mitad de algún objeto. Lo cual introduce implícitamente la idea de que la fracción puede ser un *comparador*.

b) Operadores.

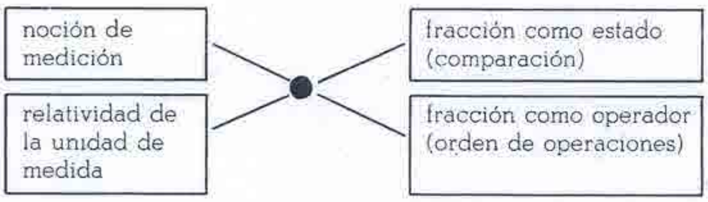
Se refiere al resultado de la *orden* de ejecución de una operación. Por ejemplo, podemos ordenar tomar la mitad de un objeto, lo cual implica dividir el objeto en dos partes iguales y tomar una de ellas. En esto se presenta también un orden de ejecución de operaciones *dividir* y *multiplicar*.

De esta forma la enseñanza de las fracciones se puede abordar desde la perspectiva de cadenas de transformaciones entre estados y operadores:

Estado	Operador	Estado	Operador	Estado
1	$\times$ 2	2	$\div$ 3	2/3

El enfoque general de Dienes tuvo impacto importante en educación, pero fue menor en lo correspondiente a la enseñanza de las fracciones.

También menciona que antes de aprender fracciones los niños debieron llevar a cabo, con anterioridad, algunos experimentos para adquirir la noción de unidad de medida, y deben darse cuenta lo convencional de dicha noción.



En este enfoque se presenta la necesidad de considerar los procesos de medición, la idea de comparación y la de operador asociadas al concepto de fracción.

Kieren (1976).

Un trabajo importante y citado frecuentemente en los estudios sobre la enseñanza o el desarrollo conceptual de las fracciones es el de Kieren (Kieren, 1976). La importancia de dicho trabajo radica en una exposición extensa, aunque un tanto confusa, del tratamiento de cada tipo de interpretación en la enseñanza de las diversas interpretaciones del concepto de número racional (las cuales no se consideran independientes), para ello expone sus ideas respecto a lo que denomina *estructuras matemáticas* (son las formas de manejo matemático que se han enfatizado en la enseñanza de cada interpretación), *estructuras cognitivas* (son las habilidades de carácter cognitivo subyacente en la enseñanza típica de cada interpretación) y *estructuras instruccionales* (son una serie de experiencias derivadas y necesarias en la enseñanza típica de cada interpretación).

Para nuestros propósitos basta enunciar las interpretaciones y hacer algunos comentarios de los aspectos más relevantes de éstas:

a) *Fracciones que pueden sumarse, restarse, compararse, etc.*

Se considera aquí a las denominadas fracciones *propias e impropias*, considerando solamente a los números racionales positivos. No se hace referencia en este caso al fraccionamiento de la unidad o a la relación *parte-todo*. De hecho, se hace mención de que en esta interpretación se enfatizan los aspectos operativos en vez de los conceptuales.

b) *Fracciones decimales como una extensión natural del sistema decimal de numeración.*

Los racionales vistos como una extensión del sistema decimal de numeración tienen la posibilidad de generar las operaciones entre ellos a partir de lo que se ha trabajado con los números enteros. Sin embargo, si se atiende sólo a esta interpretación los aspectos *algebraicos* de la definición de las operaciones con fracciones pueden perderse, lo cual es grave pues es una de las experiencias prealgebraicas necesarias para los niños.

c) *Clases de equivalencia de fracciones.*

Se retoma en esta interpretación la construcción de los números racionales a partir del producto cartesiano de los enteros y el conjunto cociente generado por una relación de equivalencia, de esta forma se identifican a los números racionales con clases de equivalencia dotadas de una estructura algebraica. En los ejemplos se concreta a números racionales positivos aunque cabe la posibilidad que se estén consideranddo también los negativos.

Una observación importante es que resalta una diferencia entre la operación definida en el conjunto cociente:

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)]$$

de la definida para la interpretación relativa a los cocientes de enteros o razones de enteros, la cual corresponde mejor con la noción de espacio vectorial (no es muy claro Kieren al respecto), debido a que en este caso es posible que:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$$

o de otra forma $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

Esto lo señalan también otros investigadores, por ejemplo, Borasi (1985).

La relación parte todo se ilustra, pero se pone mayor énfasis en la operatividad y formalización.

d) *Números de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros y $q \neq 0$, esto es, razones de enteros.*

Se menciona que esta interpretación está muy ligada a la noción de proporcionalidad (como igualdad de razones) y a de partir de esto se plantea cómo se pueden hacer naturales las operaciones entre fracciones reduciéndolas al caso de sumas de fracciones con el mismo denominador. La diferencia con las anteriores interpretaciones tal vez radica en que en esta parte se admite una representación gráfica en la recta con doble escala para localizar fracciones equivalentes, lo cual algebraicamente se consigue con sólo multiplicar por una constante un elemento de una clase de equivalencia; mientras que en las anteriores interpretaciones se enfatiza el aspecto operativo o algebraico subyacente.

Por otra parte, se liga a esta interpretación con el proceso de medición.

e) *Operadores multiplicativos.*

En esta interpretación la noción de fracción se contextualiza en el uso de la proporcionalidad geométrica y la composición de transformaciones de tal suerte que una transformación seguida de otra se considere como un todo, e incluso pueda remplazar dos transformaciones por una tercera (el producto). Por esta razón se liga a esta interpretación con el producto de fracciones, lo cual la distingue de las otras. Se habla de la necesidad de la reversibilidad del pensamiento en esta interpretación, lo cual la hace más compleja que las otras en las que se enfatiza lo gráfico o la formalización de las reglas.

Se hace la observación de cómo, en esta interpretación, se resalta la estructura de grupo subyacente, en la composición de transformaciones.

f) ***Elementos de un campo cociente ordenado infinito.***

En este caso los números racionales se presentan como símbolos formales con los cuales la ecuación "ax = b", donde a y b son enteros y $a \neq 0$, tiene solución. En este sentido, se presentan como una extensión algebraica de los números enteros. Las operaciones están sujetas a reglas formales con las que se construye un campo de cocientes al cual se puede definir un orden y es infinito.

g) ***Medidas o puntos en la recta numérica.***

Se hace énfasis en el fraccionamiento de la unidad y las relaciones entre diversas estrategias de partición. En esta interpretación, surgen de manera natural el orden, las operaciones y los conceptos relativos a la recta numérica. Esta es de carácter más intuitivo.

Kieren menciona la necesidad del manejo de todas las interpretaciones y que ha sido una práctica común que los racionales tienen una sola interpretación y todas las nociones sobre éstos se desarrollan a partir de esa sola interpretación, lo cual conduce a deficiencias en el aprendizaje.

Streefland (1978).

Streefland (Streefland; 1978), al hacer una exposición sobre la construcción mental del concepto de fracción —aunque no enuncia diferentes interpretaciones como Kieren— señala que la enseñanza de las fracciones padece de un análisis deficiente del concepto, tanto en sentido matemático como didáctico. Menciona que la subdivisión de cantidades discretas o continuas en partes equivalentes, es casi siempre la única manera a la que se recurre para trabajar las fracciones, y la equivalencia de fracciones se aborda casi exclusivamente de una manera algorítmica. También se refiere a la importancia de los procesos de medir, partir y subdividir, en la constitución del concepto de fracción. Adicionalmente, reconoce la relación entre las razones, proporciones y fracciones.

Kieren (1981).

Nuevamente Kieren (Kieren; 1981) modificó la clasificación presentada por él a mediados de los setentas. Abandonó la idea de diferentes interpretaciones y planteó cuatro *subconstructos* de los números racionales: medida, cociente, razón y operador.

La intención de utilizar el término *subconstructo* en vez del de *interpretación* puede haberse debido a la consideración de la fracción o del número racional como un *constructo* teórico, el cual puede construirse a partir de ideas o nociones más simples llamadas *subconstructos*. Lo cual hace pensar en la necesidad de aislar las nociones que son mecanismos para la construcción del concepto de las nociones que conforman realmente al *constructo*. Esto no es posible a partir de las interpretaciones porque en este caso éstas están muy interrelacionadas y, aunque se considera al concepto como un conglomerado de interpretaciones, no se identifican con claridad las componentes esenciales.

De este modo, la equivalencia y la partición son mecanismos constructivos que operan en cada uno de los subconstructos.

a) *Relación parte-todo y medición.*

La relación parte-todo se expresa generalmente a partir de regiones geométricas, conjuntos discretos de objetos y la recta numérica. Esto involucra naturalmente ideas relativas a la noción de longitud y área. El tratamiento de la relación parte-todo depende de la habilidad que se tenga para dividir o partir una cantidad continua o un conjunto discreto de objetos en partes iguales.

En este caso el símbolo m/n representa una parte de una cantidad. Por ejemplo 5/8 se puede referir a dividir un *todo* en ocho partes y tomar cinco de ellas; pero, también puede referirse a repartir cinco objetos entre ocho personas.

b) *Número racional como razón.*

En este subconstructo subyace la noción de magnitudes relativas, en el sentido de que la razón es un *índice de comparación* más que un número.

En este caso el símbolo m/n representa una relación entre dos cantidades. Por ejemplo, 8/13 puede interpretarse como ocho de cada trece personas tienen cierta característica o como se hace en los deportes, un jugador realizó correctamente una tarea ocho veces en trece intentos.

c) *Números racionales como divisiones indicadas y elementos de un campo cociente.*

En este subconstructo se considera la parte formal del manejo de los números racionales, en el sentido de que está más ligada a sistemas algebraicos abstractos.

En este caso el símbolo m/n se refiere a una operación de división indicada. De esta forma 5/4 representa la división $5 \div 4$, la cual no se ha efectuado.

d) *Número racional como operador.*

Aquí se consideran los casos en que el número racional opera como una *función* o una *regla* la cual transforma una cantidad en otra o una figura geométrica en otra.

En este caso el símbolo m/n representa la manera en que un objeto o una cantidad se transforma. Por ejemplo, (2/3) aplicado a 90 reduce esta cantidad a 60 (Kieren; 1981).

Hart (1981)

Un estudio realizado por el grupo CSMS en Inglaterra, con un amplio número de niños que asistían a escuelas públicas, ofrece datos de interés especial. En efecto, en el reporte se señala que los niños, al internarse en el campo de las fracciones, lo hacen intentando extender las reglas de los números naturales. Asimismo, se indica que generalmente los problemas que involucran fracciones son resueltos con más facilidad que los algoritmos, lo cual según los investigadores, apunta al hecho de que los niños utilizan estrategias distintas de las escolares para resolverlos.

Se reporta además que las fracciones, en muchos casos, no son vistas como una relación sino como un par de números independientes que pueden manejarse por separado. Otro dato relevante entre los reportados, es un error común al trabajar con el concepto de equivalencia: atender al tamaño del numerador y el denominador y no a la relación entre ambos (Hart; 1981).

Rasimba-Rajohn (1982).

Rasimba-Rajohn (Rasimba-Rajohn; 1982), estudió la forma en que dos métodos de medidas racionales (conmensuración y fraccionamiento de la unidad) corresponden a dos tipos diferentes de conocimientos. Es decir, se diferencia el proceso de conmensuración, por el cual tratamos de verificar si una unidad dada, sin fraccionar, cabe un número exacto de veces en otro segmento dado; del proceso relativo a la medición de un segmento dado por medio de fraccionar la unidad hasta cubrir el segmento dado con partes enteras o fraccionarias de la unidad.

Para verificar esto se aplicó un cuestionario para observar la relación que se da entre los dos métodos y se encontró que éstos efectivamente corresponden a diferentes comportamientos.

Generalmente, poco se habla de la necesidad de considerar la conmensuración y todo se refiere a un proceso de medición y la comprensión de los algoritmos relativos a las fracciones. El trabajo de Rasimba-Rajohn es importante porque resalta las diferencias conceptuales entre estos procesos no sólo en el plano conceptual sino también en el algorítmico.

Behr, Lesh, Post & Silver (1983).

Con similar pretensión a la de Kieren (1981), Behr, Lesh, Post & Silver plantean el problema de los diversos significados relativos al concepto de fracción (Behr, Lesh, Post & Silver; 1983). Se hace un tratamiento utilizando también la noción de *constructo*, en este sentido se enfatizan las dimensiones que las personas usan para conceptualizar aspectos relativos a los números racionales.

El estudio de Behr, Lesh, Post & Silver condujo a una redefinición de las categorías de Kieren (1976). Las cuales son los siguientes siete subconstructos:

a) *Medida fraccionaria.*

Es una reconceptualización de la relación parte-todo. Se refiere a cuánto hay de una cantidad relativa a una unidad dada de esa cantidad. En este sentido m/n representa la cantidad de la parte en relación al todo.

b) *Razón.*

Expresa la relación entre dos cantidades. Esto es, se establece una comparación entre dos cantidades.

c) *Tasa.*

Es una nueva cantidad que resulta de la relación entre otras dos cantidades, es una especie de *unidad derivada*, como es el caso de la velocidad o la densidad.

d) *Cociente.*

Es una división indicada de números enteros, de esta forma m/n se interpreta como el número entero "n" divide al número entero "m".

e) *Coordenada lineal.*

En este subconstructo se enfatizan las propiedades asociadas con aspectos topológicos de la "recta racional", esto es: relación "entre", densidad, distancia y no completez. Los números racionales se interpretan como puntos en la recta numérica resaltando que los números racionales son un subconjunto de los números reales.

f) *Decimal.*

Con este subconstructo se destacan las propiedades asociadas al sistema de numeración decimal.

g) *Operador.*

Se asocia en este caso al número racional la noción de función, de tal forma que a partir de un número racional se puede definir una transformación.

Behr, Lesh, Post & Silver consideran que la relación parte-todo a partir de cantidades discretas y continuas representa un constructo fundamental del número racional.

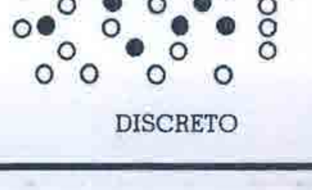
Freudenthal (1983).

Freudenthal (Freudenthal; 1983) plantea que el término fracción es más adecuado que números racionales positivos, en tanto es la fuente fenomenológica del número racional —lo cual adquiere sentido puesto que el origen de los números racionales se encuentra en la noción de *quebrado* o *fracción*.

Señala la utilización de las fracciones en diversos aspectos del lenguaje usual y analiza algunos de los significados que se les da como comparador (... es la mitad de largo que...), descriptor de una cantidad (...la mitad de un pastel...), formador de múltiplos (...tres cuartos de hora...), expresión de cantidad (...dos tercios de *veces* tan largo...), determinación de ciclos (...medio tiempo alrededor del reloj...), expresión de mezclas (... tres partes de sal y tres partes de pimienta...) y expresión de relaciones (...de cada cinco hombres uno es un chino...).

Discute la importancia de algunas interpretaciones de las fracciones como: quebrado o *fracturador* y comparador.

Cuando analiza la fracción como quebrado plantea las diferentes formas de dividir un todo: **irreversible, reversible y simbólica.** También discute la relación parte-todo, indica que las fracciones pueden hacerse patentes si un todo es: **descompuesto, cortado, rebanado, roto o coloreado.** La igualdad de las partes es: **experimentada, pensada o imaginada.** El todo puede ser: **discreto o continuo,**



DISCRETO

CONTINUO

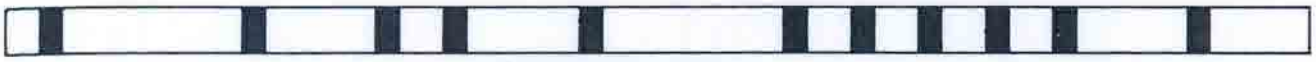
definido o indefinido,

DEFINIDO

INDEFINIDO

estructurado o sin estructura.

ESTRUCTURADO



NO ESTRUCTURADO

La atención puede centrarse en: **una parte, algunas partes, todas las partes.**

En relación con la fracción como un comparador expresa que la comparación puede hacerse **experimentarse** (...en este cuarto hay la mitad de...), **imaginarse** (...Pedro es la mitad de pesado que diez barras de oro...) o **pensarse** (...la banqueta es por lo menos dos y media veces más pequeña que la calle...). Lo cual se puede hacer de manera **directa** (cuando los objetos por comprar se colocan uno al lado del otro) o **indirecta** (cuando un tercer objeto media entre los dos para efectuar la medición).

Podemos considerar a los números racionales como una composición de multiplicaciones y divisiones, lo cual aparentemente no representa ninguna complicación. Sin embargo, desde la perspectiva fenomenológica de Freudenthal, los objetos y relaciones de equivalencia entre éstos preceden a la idea de magnitud. En las fracciones, se presentan en contraposición las ideas relativas a la multiplicación y a la división: el *operador* "n-ésima parte de" puede aplicarse a un objeto antes de que pueda tomar un valor de magnitud, una enésima parte de algo es una porción concreta; de otra forma, "n veces" no puede realizarse con el objeto dado, se requieren más objetos equivalentes al dado para llevar a cabo la operación. Esta asimetría es muy importante considerarla en el trabajo didáctico.

Podemos identificar las siguientes interpretaciones en el análisis de Freudenthal: fracción como operador o relación, relación parte-todo, relación razón (es una relación entre cantidades o magnitudes), operador razón (es cuando se transforma una cantidad o una magnitud), medida precediendo a una unidad, o sin unidad como es el caso de la recta numérica, operador inverso de la multiplicación y decimal. Se plantea también la necesidad de considerar razones externas (relativas a dos medidas con diferente dimensión) e internas (relativas a dos medidas con las misma dimensión).

Un último punto que es conveniente mencionar es la presentación de una secuencia didáctica para la aritmética de las fracciones (antes se analizan los modelos utilizados en la enseñanza y la estructura matemática subyacente en el operador razón). En dicha secuencia plantea el uso constante de la interpretación de la palabra "veces", como se hace en la multiplicación de enteros, a las fracciones.

Borasi & Michaelsen (1985).

Borasi & Michaelsen (Borasi & Michaelsen; 1985) discuten las operaciones con fracciones haciendo una comparación con los procedimientos correspondientes de razones. Se presentan algunas diferencias entre las operaciones con números racionales y las razones, las cuales implican la validación de procedimientos con los símbolos "a/b" que no son permitidos para las fracciones, como es el caso de sumar numeradores y denominadores, pero que adquieren sentido en el manejo de las razones. De esta forma los autores explican algunos de los errores cometidos por los estudiantes en el manejo de las fracciones.

Consideremos que $\mathbb{Q} = \{p/q \mid \text{donde } p \,\&\, q \in \mathbb{Z},\ y\ q \neq 0\}$ es al conjunto de los números racionales y representemos por P al conjunto de las razones:

$$\mathbb{P} = \{p/q \mid \text{donde } p \,\&\, q \in \mathbb{N},\ y\ p \leq \theta\}.$$

En este orden de ideas las razones son siempre fracciones propias y la suma también lo es, lo cual no es una restricción necesaria en el caso de las fracciones. La suma de razones se realiza de la siguiente forma: $p/q + r/s = p + r/q + s$ (en un juego un jugador batea dos *hits* en tres turnos al bat; en otro juego batea 3 *hits* en cuatro turnos al bat; entonces en los juegos bateó:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{3+4} = \frac{5}{7}$$

pero las fracciones se operan así:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\frac{ad + cd}{bd}.$$

Para cualquier valor de los enteros positivos a, b, c, y d se cumple:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} < \frac{a}{b} + \frac{c}{d}.$$

No puede haber razones equivalentes en el sentido de las fracciones equivalentes: $a/b = ak/bk$. En efecto, consideremos dos jugadores de baseball: el primero, de tres intentos ha bateado de *hit* una vez; el segundo, de 30 intentos ha bateado de *hit* 10 veces; posteriormente, cada uno de ellos de tres intentos batearon de *hit* dos veces, los records de cada uno son:

el primero: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3+3} = \frac{3}{6}$; el segundo, $\frac{10}{30} + \frac{2}{3} = \frac{10+2}{30+3} = \frac{12}{33}$

estos records, si se interpretan como fracciones tienen una connotación completamente diferente de la interpretación que se les daría como razones.

La suma de razones es conmutativa y asociativa. Esta operación puede admitir un neutro aditivo, el cual es la razón 0/0. Esto nos permite definir una substracción de razones. Borasi & Michaelsen analizan la posibilidad de definir un producto y extender la noción de razón a *razón impropia* como se hace con las fracciones.

Lo importante es que se presenta con claridad que existe una estructura matemática subyacente a las razones que entra en conflicto con la estructura de las fracciones. Este es un aspecto que se ha descuidado e incluso se ha obligado a pensar en las razones como si fueran fracciones, sólo por el hecho de representarse de la misma manera. Este es un caso de *homonimia* que requiere mucha atención.

Post, T., Behr, M. y Lesh, R. (1986)

Post, Behr y Lesh (Post, T., Behr, M y Lesh, R.; 1986) explican que la noción cuantitativa de número racional incluye aspectos como: reconocimiento de que un número racional es un número; comprensión de que los números racionales pueden expresarse de diversas formas (decimales, razones, divisiones indicadas, puntos en una línea, medidas y partes de un "todo"); los números racionales pueden ordenarse usando procedimientos gráficos y simbólicos, y que el criterio para establecer el orden no se basa en el conteo; el conjunto de los números racionales es denso lo cual contrasta con la idea del conteo en los números naturales; la habilidad para determinar lo razonable de los resultados obtenidos por procesos de estimación; los números racionales tienen valor absoluto y relativo, y que pueden ser ordenados en cada uno de estos sentidos; la relación entre numerador y denominador da significado a una fracción y no la dan los valores absolutos respectivos considerados por separado; la habilidad para comprender las operaciones basadas en inferencias transitivas y un concepto de igualdad estable.

Post, Behr & Lesh encontraron que inicialmente los conceptos sobre el orden en los números enteros influyen en la falta de comprensión del orden en los números racionales; las palabras "más" y "mayor", y sus contrapartes "menos" y "menor", causan dificultades en los niños al tratar con relaciones de orden; la falta de habilidad para pasar de un modo de representación a otro retarda la abstracción de relaciones matemáticas; los niveles de pensamiento concreto o formal con respecto al concepto de fracción parece estar relacionado con el buen desempeño en tareas de orden y equivalencia; los niños desarrollan o inventan estrategias para abordar situaciones de orden o equivalencia de fracciones las cuales están muy ligadas a las propiedades de los enteros.

Vest (1986).

La relación de los procesos de partición y las operaciones con enteros son de importancia para entender el paso de los conceptos y procedimientos de los números enteros a las fracciones. Vest (Vest; 1986) analiza la necesidad de que los niños aprendan la distinción entre los procesos de **medición** (dado un *todo* se dice cómo se ha de dividir éste y se pregunta sobre el número de partes) y **división partitiva** (dado un *todo* se dice cómo se dividirá y se pregunta sobre las características de cada parte).

Vest menciona que se revisaron los libros de texto y se encontró una relación entre el proceso de partición y los procesos relativos a la operación de división de números enteros. También se encontró que, después de haber realizado algunas experiencias de aprendizaje dirigidas a enseñarles a los niños las diferencias entre estos procedimientos, los niños no tenían una preferencia por alguno de ellos.

Este estudio muestra que, procesos relacionados con las fracciones no son conocidos por los niños en forma espontánea incluso en el caso de reducir la complejidad de éstos al caso de la división.

Ohlsson (1988).

Ohlssor (Ohlsson; 1988) plantea que la comprensión del concepto de fracción se ubica en la manera que se pasa de la teoría matemática a las aplicaciones por medio de mapeos referenciales:

Teoría matemática relativa a las fracciones.	←	Mapeo Referencial	→	Tipo de problemas del mundo real en los cuales se aplican las fracciones.

Se plantea que el significado del concepto de fracción y términos relacionados constituyen un campo semántico diferente. Para evitar confusiones se les denomina *términos cociente*, los cuales no son términos matemáticos sino referidos a las aplicaciones. De esta forma los significados de los términos cociente corresponderán a las interpretaciones de las fracciones.

Ohlsson considera que la dificultad asociada a las fracciones es de naturaleza semántica, lo cual es debido a la naturaleza compuesta de las fracciones: ¿Cómo se combina "*n*" con "*m*" para generar "*n/m*"? y a la impresionante disposición de ideas relacionadas, no sólo superpuestas, en torno al concepto: fracciones, medidas, proporciones, cocientes, razones, "*tasas*", números racionales,...

Hace un resumen de los análisis previos en torno al concepto de fracción, en el cual abarca algunos trabajos expuestos anteriormente como los de Kieren (1975 y 1980) y Behr et al. (1983). También se incluyen otros como el de Nesher y Vergnaud. En el primero se habla de:

a) La relación parte-todo.
b) La división entre dos números enteros.
c) La razón como una comparación multiplicativa entre dos cantidades.
d) El operador que cambia una cantidad en otra.
e) El número racional como *probabilidad* (Nesher; 1985).

En el segundo, se derivan interpretaciones de las fracciones y conceptos afines a partir de la multiplicación, se propone una clasificación jerárquica con categorías amplias:

a) Fracciones, razones y números racionales.
b) Funciones lineales y n-lineales asociadas a cantidades dimensionales.
c) Espacios vectoriales.

Se señala la ambigüedad de los términos usados para denotar las interpretaciones de las fracciones (*La palabra fracción se utiliza algunas veces para una parte fraccionaria de un todo, para una fracción de una magnitud (que no puede expresarse por un número entero de unidades) para un par ordenado de símbolos p/q, y para relacionar dos magnitudes de la misma clase*) y se analiza la interpretación de operador de las fracciones como una concatenación de la multiplicación y la división (Vergnaud; 1983).

Se señalan algunos alcances de estos trabajos:

- Descubrimiento de esquemas conceptuales importantes: relación parte-todo, división, razón,...

- Descubrimiento de conceptos centrales: cociente, razón operador, diferentes versiones de la relación parte-todo.

Se señalan también algunas limitaciones:

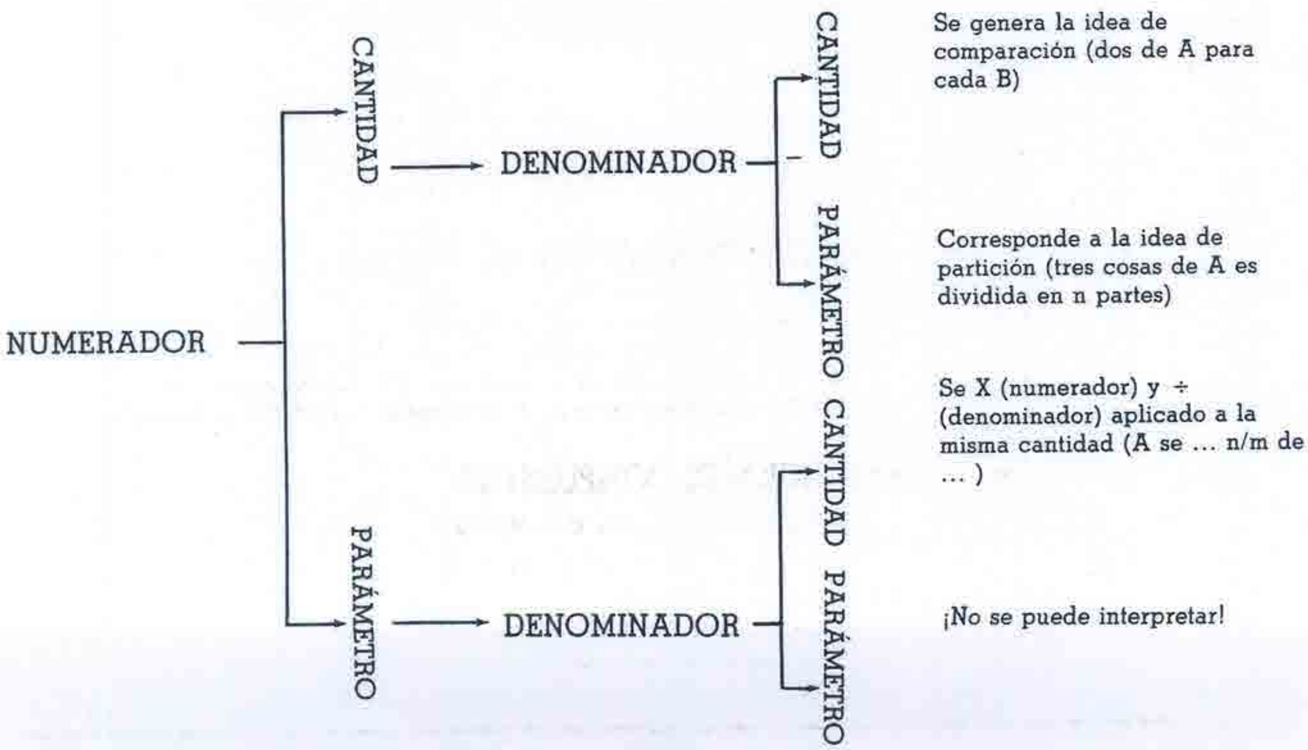
- Análisis difíciles de reconciliar: fracción V. S. número racional.
- No se especifican los criterios de análisis.
- No se clarifican las relaciones entre las interpretaciones lo cual es importante para hacer una teoría sobre el significado de las fracciones.
- No contienen todas las interpretaciones posibles.

COCIENTE
(Silver; 1986)
- **Partitivo** (el dividendo es dividido como indica el divisor)
- **Tasativo** (el divisor-expresa la cantidad que se extrae repetidamente del dividendo)

RAZÓN
(Freudenthal; 1983)
- **Interna** (se relacionan dos medidas de la misma dimensión)
- **Externa** (se relacionan dos medidas de diferentes dimensiones)

- Vergnaud clasifica problemas y los otros clasifican conceptos.

Posteriormente Ohlsson se propuso asignar una estructura al conjunto de interpretaciones más que enlistarlas o caracterizar el conjunto total de interpretaciones. Su intento lo llevó a cabo a partir del sentido que el numerador y denominador pueden tener si se les interpreta como *cantidad o parámetro*. A continuación se presenta un esquema de este enfoque:



Se presentan algunos alcances de este intento:

- Se incluyen tipos de comparación (proporciones, razones,...)
- Se incluyen tipos de particiones (división, extracción,...)
- Se incluyen tipos de operaciones compuestas (tasas, cantidades intensivas,...)

Se plantean también algunas limitaciones de este enfoque:

- El cuarto caso no se puede interpretar.
- La interpretación del cociente no es más básica que las otras, pero las fracciones, razones,... se construyen con el cociente.
- En el análisis no se genera la interpretación de las fracciones como experiencias numéricas de cantidades fraccionarias.

Se realizó otro intento en el que se agrupan diversos significados de las fracciones. En éste se definen cuatro grandes categorías, a continuación se presenta un diagrama de éste:

x/y representa diversos matemáticos (por eso es ambigua)

→ **FUNCIÓN COCIENTE:** x/y es el COCIENTE $(x, y) \equiv x \div y$

- No hay teoría para la "−" y la "÷", pero tienen el mismo estatus que la "+" y la "×" en los cálculos.
- Puede definirse como la inversa de la multiplicación (doble inversa por la conmutatividad).
- $x \div y$ está definido sólo cuando la división es exacta.

→ **NÚMEROS RACIONALES:** $r = x/y$ es solución de la ecuación $y \times r = x$

- Si r es un entero x/y es una función cociente.
- $x/y = \langle x, y \rangle \supset x \div y$, con esto se generaliza la función cociente.
- Función cociente → aspecto de procedimiento
  Número racional → aspecto ontológico
  mismo fenómeno

→ **VECTORES BINARIOS:** $x/y \equiv$ dif. (x, y)

- x/y significa el vector o su inclinación.
- Se comportan como vectores binarios.
- En este caso los vectores representan "cantidades vectoriales" (cantidades comparativas). No se limita a "cantidades intensivas".

→ **FUNCIONES COMPUESTAS:**
$h(x) \equiv$ def. $g(f(x))$ $a/b \equiv$ def.
$a \times (x \div b) = (a \times x) \div b$

- La fracción se multiplica por una cantidad y la transforma.

Estas categorías son susceptibles de subdivisiones con las cuales se presentan diversos significados asociados a las fracciones y se organizan algunas de las interpretaciones que han sido discutidas por otros investigadores. A continuación se presenta un esquema en el que se resumen estos significados.

Al principio se presentan los significados correspondientes al cociente de enteros con los cuales se indican los diferentes modos en que se puede interpretar, como acción física o mental, una relación parte-todo.

FUNCIÓN COCIENTE

- **Partición**
  Separar una cantidad en partes iguales.
  - x → cantidad que se va a partir
  - x/y = Z → Cantidad que se va a partir. resultantes.
  - y → Número de partes iguales.
- **Extracción**
  Extraer repetidamente una cantidad de otra.
  - x → Cantidad de la cual se extrae.
  - x/y = Z → Número de veces que se extrae.
  - y → Cantidad que se extrae.
- **Disminución**
  Decrementar una cantidad por alguna otra.
  - x → Cantidad que se decrementará en su estado inicial.
  - x/y = Z → Cantidad de decremento después del proceso.
  - y → Cantidad que indica cuánto decrece la cantidad dada.
- **Cociente cartesiano**
  Sacar lo latente o potencial de algo.
  - x → Cantidad multidimensional.
  - x/y = Z → Otro factor de la cantidad multidimesional.
  - y → Factor de la cantidad multidimensional.

La siguiente categoría agrupa a dos significados que están asociados a dos formas de determinar a los números racionales en la recta numérica:

NÚMEROS RACIONALES

- **Fracciones**
  Es una fracción o parte de otra cantidad.
  * Hay 5 magnitudes involucradas: la cantidad referencia, la cantidad de interés, la cantidad creada a partir de la referencia, el número de partes de la cantidad de interés y el número de partes de la cantidad de referencia.
  - x → Se refiere al número de partes de la cantidad de interés.
  - x/y = Z → Se refiere a la cantidad de interés.
  - y → Se refiere al número de partes de la cantidad dada.
- **Medidas**
  Se usan las fracciones como medidas.
  - x → Número de partes de la unidad que se toman.
  - x/y = Z → Cantidad de interés.
  - y → Cuántas partes de la unidad tiene la división hecha.

En la siguiente categoría se presentan a las razones y nociones asociadas como vectores binarios debido al comportamiento que éstas tienen y su parecido con la estructura algebraica de los vectores. En esta categoría se presenta una idea de la proporción como relación parte-todo en vez de la usual igualdad de razones.

VECTORES BINARIOS

→ **Razón**

Expresa numéricamente cuánto hay de una cantidad en relación a otra.

- x → Se refiere a la primera cantidad.
- $x/y = Z$ → Es una expresión numérica de la comparación.
- y → Se refiere a la segunda cantidad.

→ **Cantidades intensivas**

Son razones que se refieren a propiedades reales físicas.

- x → Es una de las dos cantidades por comparar.
- $x/y = X$ → Es la cantidad intensiva.
- y → Es la otra cantidad por comparar.

→ **Proporción**

Es una parte tomada en relación a un todo.

- x → Tamaño de la parte.
- x/y Z → Es la expresión numérica de la comparación.
- y → Tamaño del todo.

→ **Rapidez**

Es la razón entre una cantidad y un periodo de tiempo

- x → Cantidad que caracteriza a un proceso en Δt.
- $x/y = Z$ → Cantidad que hay en cada unidad de tiempo.
- y → Se refiere a Δt.

Por último se presenta la interpretación de operador multiplicativo.

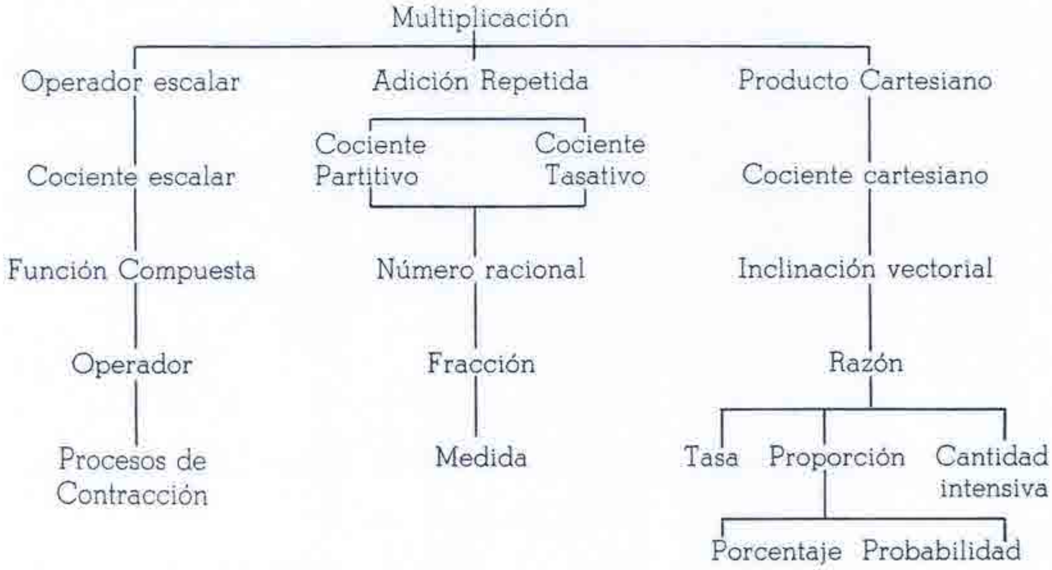
FUNCIONES COMPUESTAS

→ **Operador**

En este caso sólo se presenta la interpretación como operador multiplicativo

- a → Incremento de la cantidad interés.
- x → Entrada: cantidad de interés.
- $a/b(x) = x'$ → Salida: cantidad de interés después del proceso.
- b → Decremento de la cantidad de interés.

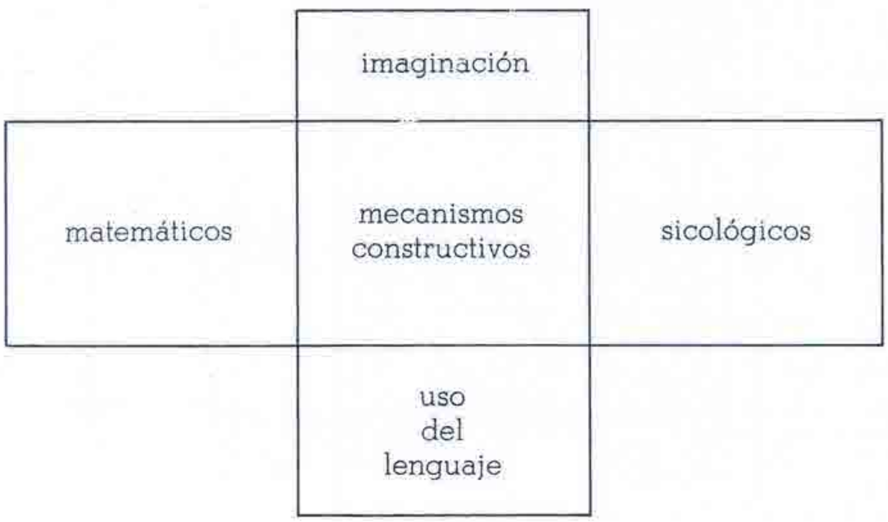
Olhsson presenta la siguiente estructura como una propuesta de organización de los *términos cociente:*



De esta forma se indentifican los antecedentes de diversos términos cocientes y cómo se pueden derivar unos de otros.

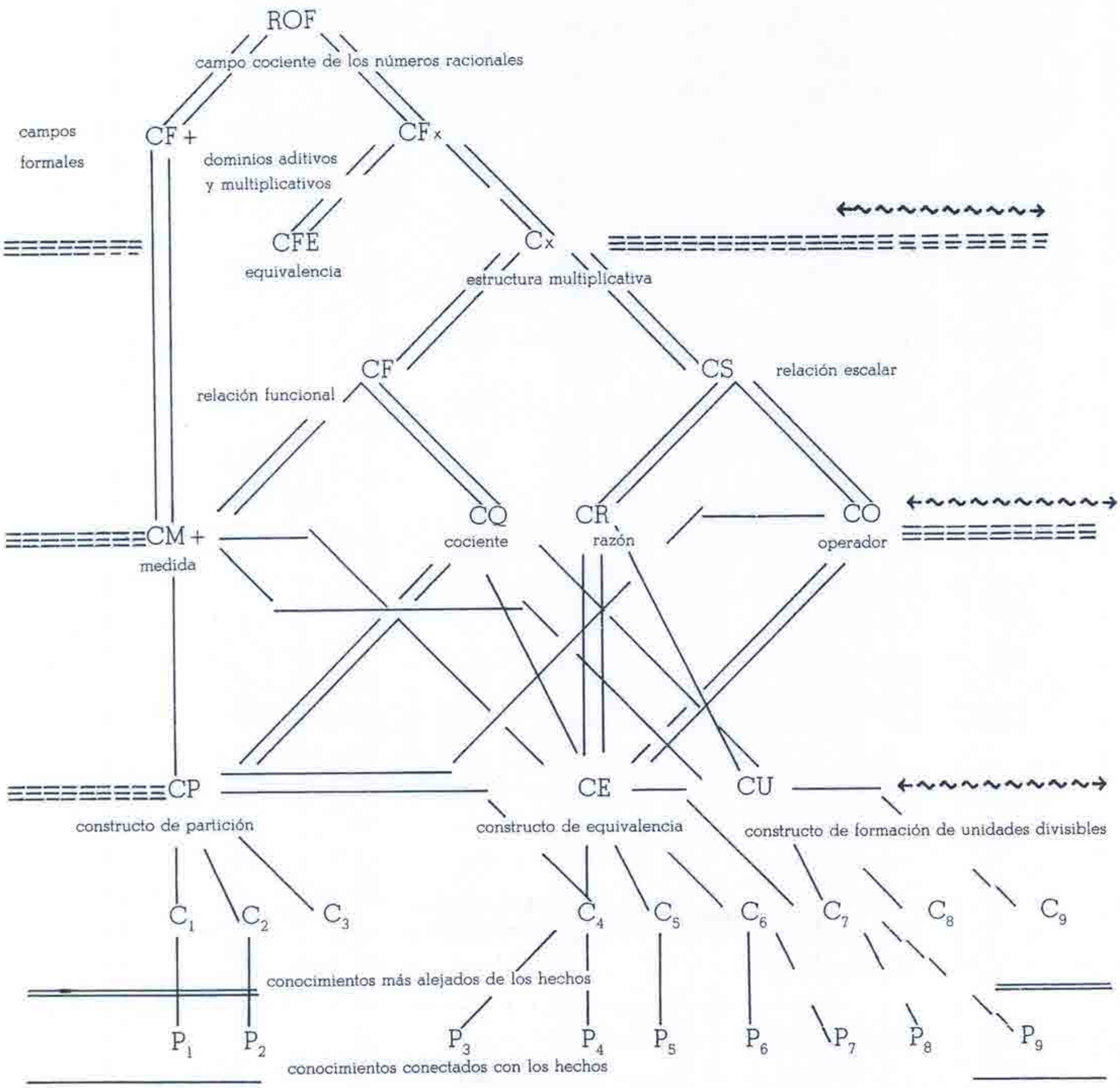
Kieren (1988).

Kieren (Kieren; 1988), en un análisis posterior presenta 5 "caras" de la construcción del conocimiento matemático:



En la "cara" matemática identifica cuatro subconstructos para los números racionales: **medida, cociente, razón y operador.**

Además plantea diversos niveles del conocimiento sobre los números racionales.



Los significados del concepto de fracción.

Los trabajos reseñados con anterioridad nos muestran la complejidad que existe en relación a la comprensión de los diversos significados o interpretaciones o ideas básicas o conceptos relativos o subconstructos de los números racionales.

Lo que queda claro es que el número racional no se explica por sí solo como puede pensarse que sucede con los números naturales, en el sentido de que el símbolo se asocia casi inmediatamente con el concepto. Como hemos podido constatar el símbolo x/y indica muchos procesos, relaciones o tipos de números.

Es innegable la necesidad de considerar aspectos básicos como: la relación parte-todo, las estructuras multiplicativas, el sistema decimal de numeración y los procesos de medición. El primero nos conduce de manera natural a los significados asociados al cociente de enteros; el segundo, nos inclina a las ideas relativas a la proporcionalidad y temas afines; el tercero, nos conduce a los decimales, y el último, a los procesos de conmensuración, localización de puntos en la recta numérica y los procesos de fraccionamiento de la unidad.

La problemática de las fracciones se complica aún más si pensamos en los modelos y referentes que podemos emplear en la enseñanza.

Tipos de todos	Tipos de partes	Dimensionalidad Geométrica
Discreto	Discreta	Unidimensional
Continuo	Continua	Bidimensional
Definido	Definida	Tridimensional
Indefinido	Indefinida	
Estructurado	Estructurada	
No estructurado	No estructurada	

Considerando el total de posibilidades, sin descartar aquellos casos poco probables, tendríamos una gran cantidad de combinaciones de tipos de modelos. La pregunta que surge de manera natural, sobre todo a partir de lo que se presenta en los libros de texto, ¿los modelos para el estudio de las fracciones no sólo son pasteles y cuadriláteros?

Todavía hay otro tipo de dificultad por mencionar: la representación escrita y lo que se enfatiza con ésta aunque el símbolo sea el mismo la cual es matizada por la equivalencia entre números racionales:

Relación Parte-todo	Estructuras multiplicativas	Sistema decimal de numeración	Procesos de medición
División indicada con "–" o con "÷".	Operaciones sucesivas de multiplicación y división. Notación funcional.	Expansiones finitas periódicas e infinitas.	Cantidades adjetivales y cantidades intensivas.

Desde esta perspectiva son cuatro aspectos esenciales los que están presentes en la comprensión de las *fracciones*. En efecto, se ha dicho *fracciones* para distinguir de los *números racionales* porque en todo lo anterior interesan las relaciones entre cantidades positivas, aunque en algunos casos esto se puede ampliar a las negativas. La estructura algebraica y de orden asociada a estos aspectos quedará incompleta desde la perspectiva formal, lo cual es un problema si interesa abordar a los números racionales como un *campo cociente ordenado infinito*. Nótese que esto implica un problema adicional que depende de las estructuras aditivas construidas con los enteros.

Del paso del conteo a las fracciones.

Muchas investigaciones han ilustrado cómo el paso de la adquisición del concepto de número a la destreza operativa con los números es largo y depende de muchos factores, los cuales no son considerados en la escuela. Por ejemplo, Vergnaud (1980) ha planteado la necesidad de considerar varios *planos conceptuales* en el desarrollo del concepto de número: el plano de los objetos, el de los conjuntos, el de los cardinales y el de las representaciones numéricas; cada uno de los cuales tiene una *noción de suma* asociada. Kulm (1985) señala la importancia de cinco principios de conteo (orden estable o conteo en secuencia fija, apareamiento uno a uno de objetos y nombres de los números, reconocimiento de que el último número contado indica el número total, conteo de objetos diferentes y conteo realizado en orden diferente) como un elemento previo a la utilización del conteo de manera efectiva. También Kulm (1985) reconoce que la enseñanza de las operaciones aritméticas descansa en algunas habilidades de conteo (continuación del conteo, conteo regresivo, conteo por bloques, conteo combinado, conteo por duplicación y la compensación).

Estas estrategias de conteo relacionadas con las operaciones aritméticas son un elemento importante en el desarrollo de estrategias de estimación, sin las cuales es difícil reconocer un manejo adecuado del sistema de numeración; al respecto, Reys, Begsten, Rybolt y Wyatt (1982) han identificado diversas estrategias de estimación (reformulación de datos numéricos sin alterar la estructura del problema, cambio de números y la estructura del problema y la compensación por ajuste de cantidades) utilizadas por los *buenos estimadores*, las cuales se han ido constatando con otros estudios en diversos países.

Es posible plantearse, después de que el niño ha recorrido un largo camino con el manejo de los números y ha avanzado en la utilización de representaciones gráficas, la enseñanza del algoritmo usual y su conveniencia como procedimiento general. Lo cual se realiza en periodos largos de tiempo.

En el campo de las fracciones no existen lineamientos tan esclarecedores como los descritos anteriormente para los números naturales. Hemos visto la complejidad de la construcción conceptual del concepto de fracción, pero no hay claridad sobre el tránsito de la adquisición del concepto al manejo operativo de éste. En lo que sigue, se plantearán algunas hipótesis en relación a este aspecto, dichas hipótesis pueden considerarse en estudios posteriores o servir de punto de partida para la discusión.

En principio haciendo una analogía con el paso del concepto de los números a los algoritmos, podemos preguntarnos si el conteo interviene en las fracciones, lo cual resulta positivo en el manejo de fracciones con el mismo denominador.

Freudenthal (Freudenthal; 1983) presenta, de forma implícita, el caso en que el conteo realizado con las fracciones puede involucrar el manejo de *sistemas* *numéricos* diferentes, sobre todo si consideramos que en la adición y substracción de fracciones tenemos que manejar denominadores diferentes en muchos casos, de esta forma combinar séptimos con sextos nos conduce a combinar conteos de siete en siete con conteos de seis en seis, lo cual resulta demasiado complicado.

Sin caer en exageraciones, podemos reconocer que una simple suma como: 3/5 + 4/9 implica referirnos a dos formas distintas de particiones: de cinco y de nueve. Lo cual se puede contar por separado pero no conjuntamente, se está combinando un conteo de *cinco en cinco* con uno de *nueve en nueve*. Este aspecto nunca se ha tratado en la enseñanza y el recurso del mínimo común múltiplo no logra aclarar esta cuestión a los niños si descontextualiza el problema de contar por bloques y se presenta como la búsqueda de una partición de la unidad que se acomode a los quintos y a los novenos, la cual, a veces, se puede complicar en su representación concreta.

Acerca de la transferencia de propiedades de los enteros a las fracciones.

Se debería, por lo menos desde una perspectiva *lógica* de la disciplina, pasar del conocimiento de los números naturales a los enteros, de los enteros a las fracciones, de las fracciones a los reales y de los reales a los complejos. Pero en el paso de los enteros a las fracciones existen muchas complicaciones que no están presentes en los otros casos.

Cuando se realizan operaciones con las fracciones parece que tenemos que romper con todo lo que se ha aprendido acerca de los enteros. En el caso de las relaciones aditivas se heredan muchas de las interpretaciones de la suma y la substracción, pero los procedimientos para realizar las operacines de suma o resta se basan en procedimientos diferentes aunque se utilizan los hechos básicos de los enteros. En el caso de las relaciones multiplicativas las interpretaciones de las operaciones no son fácilmente retomadas (esto se observa en el trabajo de Freudenthal cuando analiza el uso de la interpretación de "tomar tantas veces" de una cantidad según lo indica un factor (Freudenthal; 1983).

Por otra parte una de las mayores dificultades con las operaciones de números enteros es el "reagrupamiento" en el desarrollo de las operaciones. Pero en el caso de las fracciones el problema se presenta con el manejo de distintos denominadores y la necesidad de encontrar un denominador común, lo cual implica una reorganización de las cantidades originales más que un proceso de "reagrupamiento".

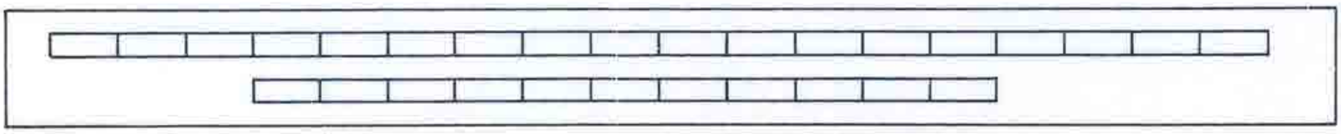
Las operaciones de multiplicación y división de enteros se realizan siguiendo también un sentido de verticalidad el cual se pierde con las fracciones, en la multiplicación de fracciones se realiza horizontalmente y la división se lleva a cabo en forma cruzada, por tora parte se ha venido introduciendo la división de fracciones transformando esta operación en una multiplicación apelando a los "recíprocos" o "inversos multiplicativos", pero esto no es la forma en que usualmente se presentan la multiplicación y división de enteros incluso a pesar de que se haga énfasis en el "algoritmo de Euclides".

Los resultados de las operaciones con fracciones son susceptibles de simplificarse, esto es, reducir el orden de magnitud de las cifras involucradas. Con los números enteros esto nunca se hace ni es lícito.

Acerca de los procesos de medición.

En efecto, en un sentido amplio la conmensuración implica encontrar un segmento que se pueda superponer un número exacto de veces en dos segmentos dados, esto se traduce a la suma de fracciones de la siguiente manera. Dados dos segmentos:

se puede emplear un segmento del tamaño □ es adecuado para superponerlo un número exacto de veces en cada segmento.



de esta forma la suma de los dos segmentos se puede pensar como:

$$\frac{20}{20} + \frac{13}{20}, \ 1 + \frac{13}{20}, \ 1 + \frac{20}{13}, \ \frac{13}{13} + \frac{20}{13}.$$

Pero desde la posibilidad de que □ represente m/n de una unidad dada, esto se puede replantear como:

$$\frac{20m}{n} + \frac{13m}{n}$$

De esta forma vemos que en el enfoque de conmensuración la suma de fracciones se reduce a una suma de números enteros, lo cual puede suceder también en el fraccionamiento de la unidad, pero en este caso existe la posibilidad de utilizar una partición en un segmento y otra en el otro, incluso de tal forma que dichas partes no se puedan "acoplar" fácilmente para reducir la suma a una suma de enteros, lo cual no es una dificultad presente en el enfoque de la conmensuración.

El caso de la conmensurabilidad resulta ser en cierto modo el caso inverso del fraccionamiento de la unidad debido a que se reproducen múltiplos del segmento por superponer y no se realiza necesariamente un proceso de fraccionamiento de alguna unidad.

Recordemos lo referido a la estructura matemática de las razones por Borasi & Michaelsen. También consideremos que los números decimales requieren del manejo de expansiones infinitas y como operadores las fracciones están sujetas a las operaciones entre funciones.

De esta forma diversas interpretaciones son susceptibles de operaciones diferentes y se pueden conflictuar unas con otras. Este es un problema que conviene asumir porque se hace mucho énfasis en la construcción de conceptos pero de forma aislada éstos no se adquieren, en realidad se profundizan en las características de muchos de ellos a través de las relaciones aritméticas ya sea de carácter operativo o de aplicación

Palabras finales.

Sabemos que los niños tienen problemas en el aprendizaje de las fracciones, de lo expuesto se deduce que el tema es complejo y no basta manejar operativamente a los números enteros para tener éxito en el aprendizaje de las fracciones.

Por otra parte, en las propuestas de enseñanza se observa un abandono de diversas ideas importantes en relación a los posibles significados de las fracciones. Esto ha generado concepciones limitadas en los estudiantes y la falta de claridad en los problemas relativos a dichos significados ha conducido a planteamientos de enseñanza ficticios o estrechos.

Se debe analizar la problemática relativa a la enseñanza de las fracciones incorporando sus diversos significados y ampliando el uso de modelos diversos para su enseñanza, pero esto no se logrará mientras los programas de estudios limiten las posibilidades creativas de los maestros y les oculten, al concretarse a enunciar contenidos disciplinarios, los diversos matices que se requieren preveer en la enseñanza de algún tema, sin que esto obligue a que se distraigan en tareas teóricas o de fundamentación. Basta en reconocer que existe una problemática que hay que tomar en cuenta, para que el maestro, como profesional de la educación, busque los caminos que más le acomodan y son más adecuados a las condiciones de trabajo que se le presentan.

BIBLIOGRAFÍA:

ÁVILA, A. *(1986); La enseñanza oficial de las matemáticas elementales en México, su psicopedagogía y trasformación 1940-1980;* Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM, Tesis de licenciatura no publicada.

BEHR, M., LESH, R., POST, T. Y SILVER, E. (1983); *Rational number concepts;* en .Lesh, R. y Landau, M.; *Acquisition of mathematics concepts and processes;* Academic Press Inc.

BORASI, R. Y MICHAELSEN, J. (1985); *Discovering the difference between fractions and rations;* Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 7, No. 3 y 4.

DIENES, Z. (1972); *Fracciones;* Varazán S.A.

FREUDENTHAL, H. (1983); *Didactical phenomenology of mathematical structures;* D. reidel.

HART, K. (ed.) (1981); *Children's Understanting of mathematics:* 11-16; John-Murray.

KIEREN, T. (1976); *On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers;* en Lesh, R. (ed); *Number and measurement: Papers from a research workshops;* ERIC/SMEAC.

KIEREN, T. (1981); *Five faces of mathematical knowledge building;* Edmonton, Departament of Secondary Education, University of Alberta.

KIEREN, T. (1988); *Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development;* en Hiebert, J. & Behr, M.; *Number Concepts and Operations in the Middle Grades;* Research Agenda for Mathematics Education, Lawrence Erlbaum Associates, National Council Teachers of Mathematics.

KULM, G. (1985); *Counting and early arithmetic learning;* National Institute of Education.

NESHER, P. (1985); *An outline for a tutorial on rational numbers;* manuscrito no publicado.

OHLSSON, S. (1988); *Mathematical Meaning and Aplicational Meaning in the Semantics of fractions and Related Concepts;* en Hiebert, J. & Behr, M.; *Number Concepts and Operations in the Middle Grades;* Research Agenda for Mathematics Education, Lawrence Erlbaum Associates, National Council Teachers of Mathematics.

POST, T., BEHR, M. y LESH, R. (1986); *Research based-observations about children's learning of rational number concepts;* Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 18, No. 1.

RATSIMBA-RAJHON, H. (1982); *Elements d' etude de deux methodes de mesures rationnelles;* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 13, No. 1.

REYS, R. E.; BESTGEN, B. J.; RYBOLT, J. F.; WYATT, J. W. (1982); *Processes used by good computational estimators;* Journal for Research in Mathematics Education, 13.

SILVER, E. (1986); *Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships;* en Hiebert, J. (ed); *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics;* Hillsdale, NJ Erlbaum.

STREEFLAND, L. (1978); *Some observations results concerning the mental constitution of the concept of fraction;* Educational Studies in Mathematics, Vol. 9.

STREEFLAND, L. (1982); *Substracting fractions with different deniminators;* Educational Studies in Mathematics, Vol. 13, No.1.

VERGNAUD, G. (1980); *L'enfats, la mathematique et la relite;* Collection Exploration Recherches en Sciences de l'education. Ed. Peter Lang.

VERGNAUD, G. (1983); *Multiplicative Structures;* en Lesh, R. & Landau, M. (eds.); *Adquisition of Mathematics Concepts and Processes;* New York, Academic Press.

VEST, F. (1986); *A study of teaching the measurement and partition concepts of division;* Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 8 No. 2.