ARTICULOS

■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 4 - No. 3 • Diciembre 1992 ■ © GEI ■ Pág. 19 ■

Resolución de Problemas Matemáticos:

Un Enfoque Psicológico

Contenido

Introducción

La resolución de problemas matemáticos prácticamente es sinónimo de "estudiar matemáticas": los maestros universitarios emplean la mayor parte del tiempo de sus clases en la resolución de problemas sobre un tema determinado; los libros de texto incluyen extensas listas de ejercicios resueltos y de problemas propuestos para que el alumno practique el tema en cuestión; la mayor parte de las tareas extraescolares consisten en la resolución de un gran número de problemas; y el sistema de evaluación se basa en pedir a los alumnos que resuelvan un conjunto de problemas. El estudiar cómo las personas resuelven problemas, y cómo ello repercute en el ámbito educativo, es sin lugar a dudas una de las funciones esenciales de aquellos que estamos interesados en el área de educación matemática.

El objetivo de este artículo es analizar estudios recientes sobre los aspectos psicológicos asociados con la resolución de problemas matemáticos, así como las implicaciones de dichos estudios para la práctica educativa.

En los últimos quince años, una gran cantidad de estudios en las áreas de psicología educativa y de educación matemática han generado diversos principios relacionados con la resolución de problemas matemáticos. Dichos principios han servido para guiar la práctica educativa, así como nuevas investigaciones sobre el tema que nos ocupa. Dos de dichos principios sirven como premisas generales para este estudio:

1. A través del estudio de las diferencias entre expertos y principiantes es posible reflexionar sobre los procesos psicológicos subyacentes en la resolución problemas. Este artículo parte de la suposición de que los expertos resuelven problemas matemáticos de manera "ideal"; por lo tanto, a través de distinguir las diferencias entre expertos y principiantes, podremos ayudar a los últimos a desarrollar las habilidades de los primeros.

Mtro. Ricardo Valenzuela González

Universidad de Texas en Austin

2. La investigación formal en las áreas de psicología educativa y de educación matemática debe guiar por un lado la actividad docente, y por el otro las modificaciones curriculares de las materias de matemáticas. Ciertamente, los hallazgos de la investigación psicológica no deben ser el único criterio a considerar en dichos cambios, aunque su contribución sí es de fundamental importancia.

La literatura consultada para este artículo fue delimitada de acuerdo con tres criterios generales:

1. La mayor parte de los artículos consultados se refieren a investigaciones en los niveles de preparatoria y universidad. Por lo tanto dichos artículos se enfocan en su mayoría, a las áreas de álgebra, geometría, trigonometría, geometría analítica y cálculo elemental.
2. Las diferencias entre expertos y principiantes pueden abarcar diversos campos de la psicología educativa, tales como los relacionados con cognición, motivación, emoción o interés, entre otros. El tratar todos estos aspectos requeriría un estudio mucho más extenso. Para los fines del presente artículo, se considerarán sólo aspectos relacionados al área cognoscitiva.[1]
3. En su larga historia, el campo de la psicología se ha desarrollado a través de las contribuciones de muy diversas escuelas de pensamiento. Es por ello que es necesario hacer explícito que el presente estudio está altamente influenciado por los principios y suposiciones de la llamada *psicología cognoscitiva*.

[1] Más específicamente, este artículo se centra en el concepto de "conocimiento previo", definido como la suma de todo cuanto conocemos. Un análisis de la literatura existente en el campo debe tomar en cuenta la diversidad de formas de definir ciertos términos psicológicos. Para evitar este problema, usaré como parte de mi marco de referencia, el estudio hecho por Alexander, Schallert y Hare (1991).

Este artículo está dividido en tres grandes secciones: en la primera se consideran diversos conceptos que sirven de marco de referencia para este estudio; en la segunda se describen algunas diferencias entre expertos y principiantes en la resolución de problemas matemáticos; en la tercera se analizan algunas implicaciones que dichas diferencias tienen para la práctica educativa.

Marco de referencia

¿Cómo resolvemos problemas? ¿Qué tipos de estrategias utilizamos cuando nos enfrentamos con un problema matemático? ¿Cómo recordamos información previamente aprendida que nos sirva para resolver un problema determinado? Seguramente aquellos que nos dedicamos a la educación matemática nos hemos hecho estas y muchas otras preguntas, y tal vez nunca nos las hemos respondido cabalmente. De forma análoga nuestros alumnos se preguntan: ¿Cómo le hizo mi maestro para resolver este problema? Y también, la pregunta muchas veces queda sin respuesta.

Las ideas de Minsky (1988) pueden servir de preámbulo para describir las formas en que las personas resuelven problemas. Minsky establece que en principio, todas las personas pueden usar el método de ensayo y error para resolver cualquier problema cuya solución pueda ser reconocida. En la práctica, este método puede resultar demasiado largo, incluso con el uso de computadoras. Una búsqueda ciega por ensayo y error podría volverse más eficiente si pudiéramos usar el *principio del progreso*: cualquier proceso de búsqueda exhaustiva puede ser reducido si poseemos algún medio de detectar cuándo un "progreso" ha sido realizado. Muchos problemas fáciles pueden ser resueltos de esta forma; sin embargo, para un problema más difícil, resulta casi tan imposible reconocer el "progreso" como resolver el problema mismo. Minsky comenta que la forma más efectiva que conocemos para resolver un problema difícil es la de dividirlo en sus partes más simples que podamos resolver por separado (método de *metas y submetas*). Finalmente Minsky concluye: la forma más eficiente para resolver un problema es el saber cómo resolverlo; así uno puede evitar totalmente la búsqueda de soluciones.

Las personas normalmente poseen dos tipos de conocimientos para resolver un problema: (1) un conocimiento específico de una materia determinada y (2) un conocimiento de estrategias generales.[2]

El conocimiento específico de una materia determinada consiste de un conjunto de *esquemas* en los que la persona ha organizado, de una forma determinada, los conceptos, principios y fórmulas sobre la materia. A través de los esquemas, la persona puede además interpretar y organizar información nueva de modo que ésta sea asimilada en forma significativa. El conocimiento específico de la materia incluye un conocimiento declarativo (*qué conceptos, principios y fórmulas debo aplicar para resolver el problema*), un conocimiento de procedimientos (*cómo debo aplicar dichos conceptos, principios y fórmulas*) y un conocimiento condicional (*en qué situaciones está permitido aplicarlos*).

En contraste, el conocimiento de estrategias generales consiste de diversos métodos generales que son aplicables para casi cualquier problema. Ejemplos de estrategias generales son el método de *metas y submetas* y el uso de *heurísticos*.[3] El conocimiento de estrategias puede ser considerado como una parte de una categoría más general denominada *metaconocimiento*. Este término se refiere, entre otras cosas, a la forma en que las personas supervisamos y regulamos nuestras acciones para el logro de una meta determinada.

Gick (1986) ilustra la forma en que estos dos tipos de conocimientos se usan para resolver problemas (Fig. 1). De acuerdo con Gick, hay dos métodos generales que las personas usan: (1) un método guiado por esquemas (es decir, por el conocimiento específico que tenemos sobre el tema) y (2) un método guiado por estrategias generales.

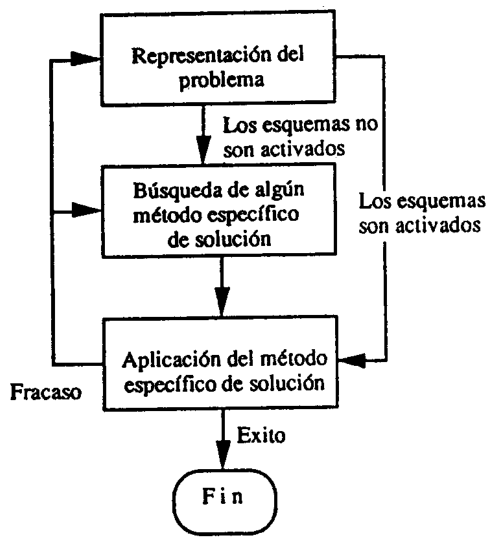

Figura 1: Modelo propuesto por Gick (1986)

El método guiado por esquemas es el más simple. En una primera fase, la persona tiene una *representación* del problema; esto es, la persona reconoce el estado inicial del problema, la meta a la que hay que llegar y las restricciones con las que tiene que cumplir. Dicha representación activa el conoci-

[2] De hecho, para resolver problemas, las personas requieren de muchos más conocimientos que los dos aquí mencionados. El conocimiento de un lenguaje natural, por ejemplo, es obviamente necesario.

[3] Una búsqueda heurística consiste en usar la información del problema y de otras fuentes auxiliares, para encontrar los procedimientos de solución más correctos, más adecuados o más probables. El clásico libro de Polya (1957/1944), *How to solve it*, trata con detalle el uso de heurísticos.

miento específico que la persona tiene en su memoria. Cuando uno de sus esquemas aparentemente se relaciona con el problema en cuestión, dicho esquema guía las acciones de la persona; ella pone en práctica el método específico de solución que su experiencia le indica.

Al usar el método guiado por estrategias generales, se presentan tres fases en el proceso de resolución de un problema: primeramente, la representación del problema; posteriormente, la búsqueda de algún método específico de solución al problema a lo largo de un "espacio" de soluciones; y finalmente, la aplicación de dicho método. Si el problema se resuelve, la tarea está terminada. Si no, se requerirá una reevaluación de las fases previas.

Estrictamente hablando, la solución de un problema no se presenta en una forma dicotómica. Todas las personas tienen ciertos conocimientos específicos y ciertos conocimientos estratégicos. La absoluta ausencia de uno de ellos haría imposible la solución del problema. Aunque aparentemente las personas tienden a usar más un método que el otro, en realidad sus conocimientos específicos de la materia y sus conocimientos de estrategias generales interactúan para resolver el problema dado.

¿Cómo se relaciona esto con la forma en que expertos y principiantes resuelven problemas? Debido a que los expertos han desarrollado un conjunto de esquemas bien estructurado, ellos guían el proceso de resolución del problema a través de tales esquemas: ante un problema, ellos saben cuál es el "mejor" método específico de solución y lo aplican directamente. Puesto que los principiantes carecen de esquemas apropiados, tienen que aplicar estrategias generales que implican mayor tiempo y esfuerzo, aumentando las posibilidades de error. Desde luego, las diferencias entre expertos y principiantes presentan muchas otras peculiaridades dependiendo de la naturaleza del problema por resolver.[4] La siguiente sección menciona diversas investigaciones que permiten ampliar y apoyar estas ideas.

Diferencias entre expertos y principiantes en la resolución de problemas matemáticos

Diversas características permiten distinguir la forma en que los expertos y los principiantes resuelven problemas matemáticos. A continuación se presenta una lista de algunas de las principales características.

Memoria: Conocimiento específico de configuraciones matemáticas

Las personas difieren en términos del tipo y cantidad de conocimiento específico que tienen en su memoria acerca de una materia determinada. En el campo de las matemáticas, expertos y principiantes se distinguen en términos del tipo y cantidad de "configuraciones matemáticas" que han memorizado, así como en su habilidad para memorizar nuevas configuraciones.

Sweller y Cooper (1985) realizaron varios experimentos para estudiar las diferencias entre expertos y principiantes en términos de memorización de ecuaciones algebraicas. A los sujetos de este estudio se les presentaron diversas configuraciones matemáticas por breve tiempo, pidiéndoles que las memorizaran. Posteriormente, los sujetos deberían reproducir en orden tantos símbolos como les fuera posible. Sweller y Cooper encontraron diferencias muy significativas entre el número de ecuaciones que los expertos podían reproducir, en comparación con los principiantes. Mientras que los exper-

[4] Los conceptos de "experto" y "principiante" varían notablemente en la literatura. El artículo de Alexander y Judy (1988) discute algunos de los problemas metodológicos presentes en este tipo de estudios. Dicho artículo trata además, de una forma general, la interacción entre el conocimiento específico de la materia y el conocimiento estratégico.

tos memorizaron las configuraciones matemáticas en conjunto, los principiantes memorizaron los símbolos de cada ecuación por separado.

Experimentos similares en áreas tales como ajedrez,[5] programación y electrónica apoyan estos resultados.

Categorías: Identificación de tipos de solución para un problema dado

En ocasiones, la resolución de problemas matemáticos requiere que las personas perciban adecuadamente los problemas, los clasifiquen de acuerdo con categorías previamente aprendidas e identifiquen el correspondiente tipo de solución. Expertos y principiantes se distinguen en la forma en que realizan estas funciones.

Schoenfeld y Hermann (1982) usaron una gran variedad de problemas matemáticos para estudiar las diferencias de percepción entre expertos y principiantes. De acuerdo a sus predicciones encontraron que los principiantes tienden a clasificar los problemas por sus características superficiales (*estructura aparente*), mientras que los expertos clasifican los problemas por su método de solución (*estructura profunda*). Esto repercute significativamente en el momento de resolver problemas concretos, ya que si los expertos perciben un problema por su estructura profunda, lo identificarán como perteneciente a una cierta categoría de problemas, y tratarán de resolverlo usando el método (adecuado) de solución correspondiente a esa categoría. Los principiantes posiblemente relacionarán el problema dado con otro problema que "aparentemente se le parece". Aún y cuando dichos problemas no tengan relación, los principiantes usarán inapropiadamente el método del problema recordado para tratar de resolver el problema dado.

Usando ecuaciones algebraicas, Sweller y Cooper (1985) encontraron resultados similares.[6]

Patrones: Formas de trabajar en la resolución de problemas matemáticos

Los expertos y principiantes difieren en términos de los patrones que siguen para resolver problemas. El término *patrón* se usa aquí para indicar la tendencia a trabajar un problema matemático en un orden determinado.

Sweller, Mawer y Ward (1983), así como Sweller y Cooper (1985), han realizado diversos experimentos con ecuaciones algebraicas, para estudiar dichos patrones. En estos estudios, dos patrones diferenciaron claramente la forma en que principiantes y expertos trabajan los problemas. Primero, los principiantes tendieron a trabajar "hacia atrás": empezaron a resolver el problema definiendo la incógnita; después, trataron de encontrar una ecuación (cualquier ecuación) que contuviera dicha incógnita; y si dicha ecuación contenía nuevas incógnitas, entonces los principiantes continuaban buscando nuevas ecuaciones hasta tener un conjunto de ellas que les permitiera resolver el problema con la información dada. Obviamente esta forma de trabajar complica el proceso de resolución del problema, y aumenta la probabilidad de cometer errores. En contraste, los expertos tendieron a trabajar "hacia adelante": los expertos conocen hasta cierto punto el método de solución del problema dado; por lo tanto, comienzan a resolverlo a partir de los datos, y se acercan gradual y direc-

---

[5] En el campo del ajedrez, el estudio de DeGroot (1966) constituye uno de los primeros intentos por analizar diferencias entre expertos y principiantes. El trabajo de Sweller y Cooper (1985) estuvo altamente influenciado por el de DeGroot.

[6] El estudio de Chi, Feltovich y Glaser (1981) verifica los resultados anteriores en el área de física. Este estudio ha influenciado significativamente los estudios en matemáticas. Schoenfeld y Herrmann (1982) presentan una interesante reflexión sobre las diferencias en la organización de los contenidos de matemáticas y física, y cómo ello repercute en el proceso de categorización de problemas.

tamente a su solución. Este patrón a veces presenta sorpresas al experto debido a que el problema fue mal categorizado, o a que el método de solución fue erróneamente seleccionado. Este fenómeno, conocido como *Einstellung*, es un riesgo que la mayoría de los expertos están dispuestos a tomar.

Las diferencias en la forma de trabajar los problemas matemáticos se pueden explicar en términos del tipo de conocimiento que las personas poseen. Los expertos han memorizado diversas configuraciones de problemas con sus respectivas soluciones; por lo tanto al ver un problema nuevo, pueden invocar el método de solución del mismo y aplicarlo directamente (método guiado por esquemas). En contraste, los principiantes no poseen los esquemas adecuados, y emplean estrategias de carácter general, como la de identificar la meta y después buscar los medios para alcanzarla (método guiado por estrategias generales).

Transferencia: Búsqueda de analogías en la solución de problemas nuevos.

Uno de los objetivos de la educación matemática es el de impartir conocimiento que pueda aplicarse en diversas situaciones de la vida real. El concepto de transferencia se refiere a este objetivo. En general, *transferencia* es el proceso por el cual la experiencia que tenemos en una actividad tiene efectos (tanto positivos como negativos) en el desarrollo de otra nueva actividad.

Una forma usual de resolver problemas nuevos consiste en buscar problemas análogos que se hayan resuelto anteriormente. Este proceso denominado *transferencia analógica* no siempre se realiza exitosamente. Novick (1988) destaca tres problemas básicos de este proceso: (1) las personas pueden carecer de un problema análogo por el hecho de que nunca han resuelto algún problema similar, o por el hecho de que no pueden reconocer la relación con problemas previamente aprendidos: (2) la búsqueda de problemas análogos puede evocar a problemas que sólo tienen una relación superificial con el problema dado; (3) aún y cuando se recuerde un problema análogo, las personas pueden ignorar cómo usarlo en el caso presente. En general, la transferencia analógica puede ser difícil de realizar porque requiere que la persona atienda a información adicional al problema que debe resolver.

En su estudio, Novick sugiere que la diferencia entre expertos y principiantes puede servir para predecir tipos y fallas en el proceso de transferencia. En la búsqueda de problemas análogos, los principiantes generalmente tienden a cometer alguna de las fallas mencionadas en el párrafo anterior. En contraste, los expertos han almacenado una gran cantidad de problemas y pueden elegir aquellos que sean más apropiados para el problema nuevo; además cuentan con reglas matemáticas automatizadas que les permiten no sobresaturar su capacidad cognoscitiva.[7]

Automatización: Uso automático de reglas matemáticas

Una actividad se realiza en forma automática cuando no requiere de la completa atención del individuo. El grado de automatización en el uso de reglas matemáticas constituye otro factor que permite diferenciar a los expertos de los principiantes.

Cooper y Sweller (1987) han estudiado los efectos del uso automático de reglas matemáticas, especialmente cuando las personas tienen que resolver problemas que requieren transferencia. Cuando el problema es muy novedoso, tanto el experto como el principiante

[7] Para un análisis sobre los conceptos de carga y capacidad cognoscitiva se recomienda el artículo de Sweller (1988). En él se presenta un modelo de computadora que simula el comportamiento de expertos y principiantes resolviendo problemas matemáticos. Sus resultados se confirman en un experimento con alumnos que resuelven problemas de trigonometría.

carecen de los esquemas necesarios para invocar el método apropiado de solución. Este proceso de transferencia requiere que las personas usen todos sus recursos cognoscitivos para tratar de resolver el problema. Y aquí es donde el concepto de automatización aparece. Debido a que los expertos han logrado automatizar ciertas operaciones matemáticas, ellos pueden concentrarse totalmente en el problema nuevo sin preocuparse por los aspectos "mecánicos" del problema. En contraste, cuando los principiantes tratan de resolver dicho problema, se preocupan no sólo por el problema en sí, sino también por la realización de operaciones que no dominan aún.

Los resultados de este estudio tal vez nos recuerden a muchos de nuestros alumnos que fracasan tratando de resolver problemas algebraicos, por el simple hecho de que no han logrado automatizar las operaciones aritméticas más fundamentales.

Metaconocimiento: Conocimiento, supervisión y regulación de nuestros propios procesos cognoscitivos

En la sección anterior se trató el problema de resolver problemas nuevos que requerían transferencia analógica. Si un problema es realmente nuevo para los expertos, estrictamente hablando los "expertos" han dejado de ser expertos. Sin embargo, aún en este caso hay algunas características distintivas que les permiten a los expertos ser más eficientes que los principiantes en la resolución de problemas. Cuando un problema nuevo se presenta, se observa que los expertos cambian de métodos de solución guiados por esquemas a otros guiados por estrategias. La diferencia sustancial se presenta no sólo en el conocimiento que los expertos tienen de estas estrategias, sino también en la forma en que las usan. El concepto de metaconocimiento se refiere a esta diferencia.

Garofalo y Lester (1985) definen *metaconocimiento* como (1) el concimiento que las personas tienen de su propio conocimiento, y (2) la forma en que las personas supervisan y regulan sus procesos cognoscitivos. El conocer la naturaleza de los procesos cognoscitivos presentes en la resolución de problemas es un ejemplo de la primera parte de la definición. La segunda parte se puede ejemplificar mediante las preguntas que los expertos se hacen para evaluar sus avances ("¿estoy aplicando el método correcto?"), para tomar decisiones ("... y ahora, ¿qué es lo que más me conviene hacer?"), o para reflexionar sobre sus logros ("¿de qué otra forma podría resolver el problema de manera más simple?").

Schoenfeld (1983a, 1983b, 1985, 1987) ha estudiado los procesos metacognoscitivos de estudiantes y maestros en el área de matemáticas. De acuerdo con Schoenfeld, cuatro factores impactan en mayor o menor grado el proceso de resolución de problemas: (1) *recursos*, o el conocimiento específico que la persona tiene de la materia; (2) *heurísticos*, o el conocimiento de estrategias para la resolución de problemas en general; (3) *control*, o el conocimiento que la persona tiene sobre cómo supervisar y regular el proceso de resolución de problemas; y (4) *sistema de creencias*, o el conjunto de creencias que la persona tiene sobre sí misma, sobre la materia en general y sobre el problema en particular. Según Schoenfeld, cualquier diferencia entre expertos y principiantes se puede analizar en términos de la forma en que ellos usan estos cuatro factores.

Implicaciones para la educación

De las ideas anteriores es posible obtener ciertas implicaciones para la práctica educativa. La pregunta que surge del análisis de las diferencias entre expertos y principiantes es clara: ¿Cómo podemos ayudar a nuestros alumnos a que lleguen a ser "expertos" en la materia? Esta sección representa un reto para el maestro de matemáticas, ya que las respuestas que los psicólogos dan a esta pregunta no apuntan a una dirección única. Por una parte, algunos investigadores opinan que la enseñanza de estrategias generales es negativa en el proceso de aprendizaje de los alumnos. Por otra parte, hay investigadores que sostienen la idea de que el uso de estrategias generales es un requisito indispensable para la educación matemática.

Críticas al uso de estrategias generales en la educación

Sweller y sus colegas defienden la tesis de que la enseñanza de las matemáticas no debe incluir la enseñanza de estrategias generales para la resolución de problemas, debido a que limita la adquisición de esquemas. Aunque el uso de estrategias generales es un mecanismo *efectivo*, no es *eficiente* para resolver problemas matemáticos. Decir que es *efectivo* significa que la persona puede llegar a resolver el problema, pero a costa de un derroche de recursos y tiempo. En otras palabras, el uso de estrategias generales sobrecarga la capacidad cognoscitiva del principiante, ya que éste requiere concentrar toda su atención en las metas del problema, en los datos del mismo, en la definición de submetas y en los procedimientos requeridos para avanzar a lo largo de las diversas etapas del problema. El principiante está más preocupado y ocupado en resolver el problema, que en asimilar la experiencia que la solución del problema le podría aportar (Owen y Sweller, 1985 y 1989; Sweller, 1989 y 1990).

¿Por qué algunos maestros insisten en enseñar estrategias generales a sus alumnos? De acuerdo con Owen y Sweller (1989), mucho del énfasis que existe por enseñar estrategias generales se deriva de la falsa inferencia de que si los alumnos conocen estrategias generales de solución de problemas, no tendrán dificultades para resolver problemas de matemáticas. Una explicación mejor sería que los alumnos carecen de esquemas adecuados y de automatización de reglas matemáticas. Owen y Sweller indican que la convencional idea de pedir a los alumnos que resuelvan una gran cantidad de problemas de los libros de texto es una práctica ineficiente para favorecer el aprendizaje. Sus investigaciones muestran que las habilidades para resolver problemas no se desarrollan por el conocimiento de estrategias generales, sino por el conocimiento específico de la materia.

¿Qué recomendaciones proponen Sweller y sus colegas para la educación matemática? Sus experimentos muestran que la adquisición de esquemas se puede favorecer a través del uso de problemas con soluciones múltiples, de problemas que se analicen desde diversas perspectivas (por ejemplo, problemas que puedan ser resueltos analítica y gráficamente), o de problemas que requieran buscar relaciones con conocimientos previamente aprendidos. De esta forma a los principiantes se les impide el uso de estrategias generales. A través de estas técnicas, los alumnos adquieren esquemas que les permitan (1) memorizar mejor nuevas configuraciones matemáticas; (2) categorizar problemas de acuerdo con sus estructuras profundas; y (3) trabajar los problemas en forma directa ("hacia adelante").

Apoyo al uso de estrategias generales en la educación

Diversos investigadores que apoyan la inclusión de estrategias generales en los programas de las materias de matemáticas critican el trabajo de Sweller. Lawson (1990) afirma que sí existe evidencia que apoya la idea de que la enseñanza de estrategias permite desarrollar habilidades para la resolución de problemas (por ejemplo, ver el trabajo de Schoenfeld, 1979). Lawson señala que el concepto que Sweller tiene de "estrategia" es limitado y debe ser ampliado. Lawson opina además que el uso de heurísticos está estrechamente relacionado con el contenido de la materia, y que por lo tanto puede coadyuvar en la adquisición de esquemas.

Garofalo y Lester (1985) sostienen que el uso de estrategias en la enseñanza de las matemáticas es benéfico; y que si los resultados de dichas enseñanzas han sido desalentadores, es porque las estrategias no se han enseñado adecuadamente. Según Garofalo y Lester, hay tres tipos generales de enseñanza de estrategias: (1) enseñanza "ciega", la cual induce a los alumnos a usar ciertas estrategias pero sin ayudarlos a entender su significado; (2) enseñanza "informativa", la cual proporciona información a los alumnos sobre el significado de la estrategia; y (3) enseñanza "del uso de autorregulado de estrategias", la cual complementa la anterior a través de ayudar a la persona a planear, supervisar y regular la utilización de la estrategia. Investigaciones futuras tendrán que probar la eficiencia de este último tipo de enseñanza.

La idea de una enseñanza autoregulada de estrategias nos lleva al concepto de metaconocimiento. Como se describió en la sección anterior, las funciones metacognoscitivas representan una variable importante para diferenciar expertos de principiantes. ¿Cómo podemos desarrollar las habilidades metacognosctivas de nuestros alumnos? Schoenfeld (1987) propone cuatro técnicas para el salón de clases que él usa para ayudar a sus alumnos a desarrollar habilidades metacognoscitivas. En la primera, se propone el uso de videotapes. El objetivo de esta técnica es la de hacer que los alumnos se den cuenta de sus propios procesos de pensamiento. La segunda técnica usa al maestro como modelo de un comportamiento metacognoscitivo. De acuerdo con Schoenfeld, el papel del maestro no debe limitarse tan sólo a encontrar la respuesta correcta de los problemas que él propone. Si el maestro muestra los procesos detallados que se presentan en la resolución de un problema, sus alumnos aprenderán a enfocar su atención en comportamientos metacognoscitivos. Como una tercera técnica, Schoenfeld propone que la clase entera trate de resolver los problemas, mientras que el maestro sirve como controlador. En forma similar a los diálogos socráticos, el maestro debe tratar de ayudar a sus alumnos a descubrir las estrategias requeridas para resolver los problemas. Finalmente, Schoenfeld propone una técnica mediante la cual los alumnos se organizan en pequeños grupos para resolver los problemas propuestos. En este caso, el maestro juega el papel de "asesor intelectual" mientras que los alumnos se entregan a resolver problemas.

En un análisis más global, Mayer (1985) propone cuatro áreas complementarias de enseñanza orientadas a mejorar la habilidad de las personas para resolver problemas. La primera área se refiere a la "enseñanza de una comprensión lingüística". La enseñanza en esta área debe proporcionar los elementos necesarios para que los alumnos sean capaces de convertir los problemas en representaciones matemáticas y viceversa. La segunda área es la de "enseñanza de esquemas". Aquí la enseñanza se debe enfocar al entendimiento del problema, a través de asociarlo con conocimientos previamente aprendidos. En tercer lugar, se tiene la "enseñanza de estrategias". Mayer afirma que se le da mucho énfasis a los productos de la solución de un problema, y poco énfasis al proceso en sí mismo. Enseñar a los alumnos *cómo* resolver problemas es indispensable. Finalmente, Mayer propone una "enseñanza para desarrollar automaticidad". Muchos errores en la solución de problemas matemáticos son debidos a errores aritméticos o algebraícos. De acuerdo con Mayer, los alumnos de cierto nivel deberían estar en condiciones de usar ciertos algoritmos de manera automática.

Conclusiones

Uno de los objetivos de la educación matemática es el de ayudar a los principiantes a ser expertos. La adquisición de esquemas es una condición necesaria pero no suficiente para lograr tal fin. El aprendizaje de estrategias es también un requisito de la educación matemática. Las investigaciones descritas apuntan al hecho de que el aprendizaje de estrategias requiere de la previa adquisición de esquemas. El aprendizaje de estrategias, independiente de la adquisición de esquemas, puede ser nocivo para el estudiante.

¿Qué recomendaciones prácticas se le pueden dar al maestro? De las investigaciones descritas se pueden inferir muchas conclusiones: (1) no enseñar estrategias generales hasta que los alumnos hayan desarrollado sus esquemas; (2) analizar con nuestros alumnos las razones por las que reprueban los exámenes "aún y cuando resolvieron todos los problemas de la tarea"; (3) evaluar la calidad de los libros de texto no sólo por el número de problemas que estos incluyen; (4) arriesgarnos a aplicar las técnicas descritas en este artículo para desarrollar en nuestros alumnos habilidades metacognoscitivas; (5) evaluar a nuestros alumnos conscientes de que la transición de principiante a experto es parte de un largo y complejo proceso de aprendizaje; (6) seleccionar los problemas que dejamos de tarea a los alumnos, de tal forma que se favorezca la adquisición de esquemas; (7) reflexionar con nuestros alumnos sobre la forma en que hemos adquirido nuestra "experiencia" para resolver problemas... La lista podría continuar; ¡le dejo al maestro esta tarea! Una última recomendación: yo le sugeriría al maestro que continuara estudiando y reflexionando sobre los últimos avances de la investigación educativa, y cómo esos avances repercuten en su diario quehacer.

Creo que mediante las inquietudes de los maestros es como será posible resolver muchos de los problemas educativos de nuestro país. La investigación educativa sigue su ritmo y nos seguirá dando ciertos lineamientos para dirigir nuestra labor docente. Y aún y cuando dichos lineamientos no constituyan principios "absolutos", tendrán el valor suficiente para mantener nuestras inquietudes despiertas. Tal vez por eso es fascinante la educación en general, y la educación matemática en particular.

Referencias

ALEXANDER, P.A. y JUDY, J.E. (1988). The interaction of domain-specific and strategic knowledge in academic performance. *Review of Educational Research, 58*, 375-404.

ALEXANDER, P.A., SCHALLERT, D. L., y HARE, V.C. (1991). Coming to terms. How researchers in learning and literacy talk about knowledge. *Review of Educational Research, 61*, 315-343.

CHI, M.T.H., FELTOVICH, P.J., y GLASER, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science, 5*, 121-152.

COOPER, G. y SWELLER, J. (1987). Effects of schema acquisition and rule automation on mathematical problem-solving transfer. *Journal of Educational Psychology, 79*, 347-362.

DE GROOT, A. D. (1966). Perception and memory versus thought. En B. Kleinmuntz (Ed.), *Problem solving*. Nueva York: Wiley.

GAROFALO, J. y LESTER, F.K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 163-176.

GICK, M.L. (1986). Problem-solving

strategies". *Educational Psychologist, 21*, 99-120.

LAWSON, M. J. (1990). The case for instruction in the use of general problem-solving strategies in mathematics teaching: A comment on Owen and Sweller. *Journal for Research in Mathematics Educational, 21*, 403-410.

MAYER, R.E. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 123-138). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

MINSKY, M. (1988). *The society of mind*. Nueva York: A Touchstone Book.

NOVICK, L.R. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 14*, 510-520.

OWEN, E. y SWELLER, J. (1985). What do students learn while solving mathematics problems? *Journal of Educational Psychology, 77*, 272-284.

OWEN, E. y SWELLER, J. (1989). Should problem solving be used as a learning device in mathematics? *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 322-328.

POLYA, G. (1957/1944), *How to solve it* (2a. ed.). Garden City, NY: Doubleday Anchor.

SCHOENFELD, A. H. (1979). Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*, 173-178.

SCHOENFELD, A. H. (1983a). Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science, 7*, 329-363.

SCHOENFELD, A. H. (1983b). Episodes and executive decisions in mathematical problem-solving. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 345-395). Nueva York: Academic Press.

SCHOENFELD, A. H. (1985). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 361-379). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

SCHOENFELD, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

SCHOENFELD, A. H. y HERMANN, D.J. (1982). Problem perception and knowledge structure in expert and novice mathematical problem solvers. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 8*, 484-494.

SWELLER, J. (1988) Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science, 12*, 257-285.

SWELLER, J. (1989). Cognitive technology: Some procedures for facilitating learning and problem solving in mathematics and science. *Journal of Educational Psychology, 81*, 457-466.

SWELLER, J. (1990). On the limited evidence for the effectiveness of teaching general problem-solving strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 411-415.

SWELLER, J. y COOPER, G. A. (1985). The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra. *Cognition and instruction, 2*, 59-89.

SWELLER, J., MAWER, R. F. y WARD, M. R. (1983). Development of expertise in mathematical problem solving. *Journal of Experimental Psychology: General, 112*, 639-661.