ARTICULOS

Un Criterio para Clasificar Habilidades Matemáticas

Introducción

La práctica educativa observada en algunos establecimientos de Enseñanza Media en Chile muestra —en forma reiterada— una clara tendencia a sobreenfatizar los contenidos matemáticos por sobre otros aspectos que deberían ser considerados propios del quehacer del profesor de matemática (Alvarez, M., y otros, 1991; González, E., y otros 1991). En efecto, si aceptamos que las actividades profesionales poseen asociado un ámbito principal para el hacer, éste debería ser el dominio donde se encuentran las génesis de las principales motivaciones para dicho hacer profesional. Esta aseveración no excluye la posibilidad —que de hecho se da— de que estos ámbitos tengan ciertas intersecciones que les quitan su calidad de independientes.

Concretamente, el ámbito del hacer del profesor de matemática muestra una intersección no vacía con otros ámbitos, cómo, por ejemplo, el de los investigadores matemáticos, o especialistas en ampliar las fronteras de esta ciencia. También los ingenieros matemáticos y diversos otros científicos, cuya preocupación prioritaria la constituye la matemática, poseen asociados ámbitos del hacer profesional que se intersecan con el del profesor de matemática.

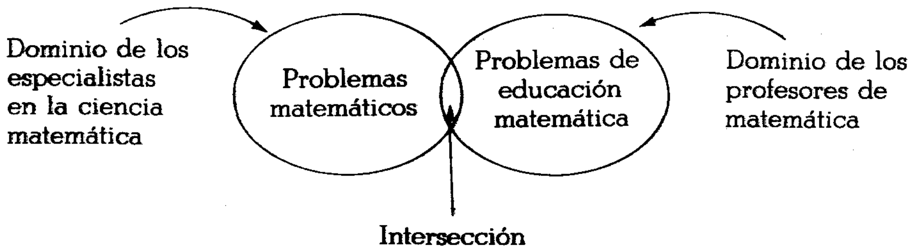
Sin embargo, el que exista esta intersección no significa en absoluto que la preocupación prioritaria del hacer profesional pueda y deba coincidir. Más aún, no resultaría aceptable tal coincidencia de actividad prioritaria para dos profesiones o actividades distintas. Esto indica, con claridad, que tales dos actividades profesionales, si bien es cierto tienen cierta intersección en su hacer, las preocupaciones prioritarias determinan campos o dominios claramente distintos y distinguibles.

Si observamos los dominios de la actividad del profesor de matemática y los dominios de la de aquellos otros profesionales que se preocupan del desarrollo de la matemática, es aceptable pensar que su intersección corresponde a la preocupación por los desarrollos matemáticos, por las relaciones y funciones inherentes a ese tipo de pensamiento, por la lógica de sus razonamientos, etc. En otras palabras, por los *contenidos* que conforman la ciencia. Esta es la intersección del dominio del hacer compartido por profesores de matemática y por especialistas en esta ciencia.

Hernán E. González Guajardo

Facultad de Ciencia,
Universidad de Santiago, Chile

Esta situación se esquematiza o grafica a continuación:



Pero, si bien existe esta intersección —y es bueno que así sea— también deben quedar establecidas las diferencias que permiten caracterizar estos dos dominios del hacer, distintos uno del otro. La parte principal del dominio de la actividad del profesor de matemática, queda reflejada por las diversas preocupaciones relacionadas con los problemas de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática, y que aparecen muy relacionados con fenómenos psicológicos y sociales.

Sin embargo —y aquí aparece lo paradójico— las interacciones verbales de los que aprenden y de los que enseñan, muestra claras evidencias de un énfasis en los contenidos por sobre aquellas preocupaciones que presumiblemente deberían constituir el centro del quehacer profesional de los profesores: *los problemas de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática.*

Cabe mencionar aquí la frecuencia con que aparece el uso del verbo "pasar"* en las conversaciones entre estudiantes, entre profesores, y entre profesores y estudiantes. Frases o preguntas como:

— "¿Te pasaron geometría?"
— "A mí me falta todavía pasar ecuaciones cuadráticas."
— "¿Pasaron el año pasado en números complejos?"
— "¿Alcanzaste a pasar logaritmos en tercero?"

son altamente frecuentes en tales conversaciones, y reflejan una clara preocupación por los contenidos, más que por las habilidades a lograr como efecto del proceso de enseñar. Esto último queda de manifiesto al observar que dicho verbo forma frases con sentido si se lo emplea en relación con nombres de contenidos. En cambio, el sentido se pierde si se lo emplea en conexión con habilidades generales o específicas. Por ejemplo:

— "¿Pasaste en la habilidad para resolver problemas que involucren lugares geométricos?"
— "Con este curso aún no he logrado pasar la habilidad para resolver ecuaciones logarítmicas."

resultan frases carentes de sentido.

(*) "Pasar materia" se usa en Chile con el sentido de cubrir una determinada temática de enseñanza, sin pronunciarse sobre los objetivos (para qué) ni la metodología (cómo).

También es frecuente observar que los problemas que comentan los profesores fuera de clase, no corresponden exactamente al ámbito del quehacer prioritario, sino más bien reflejan preocupaciones y motivaciones con claras connotaciones *contenidistas*. Esto se refleja en lo desafiante que resulta para los profesores de matemática los problemas geométricos o algebraicos con que a veces nuestros alumnos tratan de ponernos a prueba, o aquellos problemas matemáticos que hemos encontrado en algún libro, o que otro colega nos ha planteado. Por el contrario, problemas de educación matemática, propios de nuestro quehacer profesional, rara vez constituyen preocupaciones con altas dosis de motivación que nos lleven a analizarlo y discutirlo con nuestros colegas fuera del aula. Una posible explicación de este fenómeno radica en el hecho de que este tipo de problemática, por su connotación social, presenta serias restricciones en su comunicación verbal, lo que ocurre en mucho menor grado con los problemas provenientes de la matemática, para los cuales existen códigos de comunicación precisos y los entes que intervienen, al no poseer características humanas, son más estables; y los resultados de sus relaciones, previsibles con bastante exactitud.

Por otra parte, al encuestar un grupo de profesores de matemática de la ciudad de Santiago (Carvacho y Vargas, 1990), se encontró que las actividades de aula insertas en la corriente curricular academicista, fueron consideradas por los profesores varones de la muestra, como las más factibles o posibles de llevar a cabo en la clase de matemática. Si aceptamos que este enfoque curricular privilegia una línea en donde los contenidos representan valores y tradiciones culturales que se organizan en materias o disciplinas para que —supuestamente— sean asequibles a los estudiantes, la preferencia recién mencionada resulta consistente con lo expuesto anteriormente.

Esta particular preocupación por los contenidos, en detrimento de las habilidades esperadas en los estudiantes, como resultado del proceso de enseñanza de la matemática, resulta inapropiada y peligrosa al descuidar la esencia misma de tan rico proceso. Este artículo pretende aportar en tal sentido, al proponer un criterio que permite categorizar habilidades matemáticas específicas que generalmente aparecen asociadas a los objetivos y contenidos.

El Marco Conceptual

El hacer matemático, como toda actividad, lógicamente se da en la acción. Es a través de esta acción —más bien de las acciones que los profesores esperamos que nuestros estudiantes realicen— que podemos inferir los resultados del aprendizaje matemático. En efecto, nos sentimos satisfechos, y decimos que nuestra acción profesional ha sido exitosa, cuando el hacer de nuestros estudiantes cumple con ciertos patrones o requerimientos de naturaleza explícita o implícita. Para poner en evidencia la "calidad del hacer de los estudiantes", los profesores utilizamos ciertos estímulos, como son las preguntas verbales y las preguntas escritas, que en conjunto se dan de preferencia en las llamadas "pruebas" e interrogaciones. Los posibles resultados del hacer esperado, cubren una gama bastante amplia que va desde el hacer nulo: el estudiante lee el problema, lo mira y no es capaz de efectuar nada, no lo entiende, no desea o no puede hacer nada; hasta el hacer que cumple exitosamente con los más exigentes criterios: el estudiante no sólo resuelve correctamente el problema, sino que lo hace con rapidez, con seguridad, es capaz de explicar cada deducción, utiliza bien la simbología, se expresa con corrección y belleza, su letra presenta rasgos agradables, y el resultado de todo su trabajo es un escrito bien diagramado, con adecuados subrayados a color y de impecable presentación.

Sin embargo, esta actividad posee connotaciones propias de un hacer terminal. Es una que otorga respuestas finales de acuerdo con ciertas condiciones previamente enunciadas y según ciertos datos o información de naturaleza cualitativa y, especialmente, cuantitativa. Es un hacer situado al final de un proceso que, supuestamente, integra numerosos otros haceres que, justamente por considerarse previos, parecen irrelevantes frente al hacer terminal.

Esta especie de cadena de actividades matemáticas que desemboca en el hacer terminal, posee una secuencia y una continuidad que otorga una naturaleza sistémica al conjunto de actividades. Ahora bien, si cada hacer que se da en el sujeto que está "haciendo matemática" en ese instante (aprendiendo o enseñando), es el reflejo de una o de un subconjunto de habilidades específicas, entonces el sistema así planteado es un conjunto de habilidades matemáticas específicas, estrictamente secuenciadas en la acción. Determinar las etapas de esta secuencia, así como sus interrelaciones sistémicas, y también sus principales componentes, permitiría realizar un interesante aporte al proceso del hacer matemático que constituye la esencia de lo que conocemos como el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

En este sentido está encaminado este artículo.

La Propuesta

La observación de actividades elementales o cotidianas da o sugiere una pista que corresponde al siguiente símil: cuando nos entregan una caja con instrumentos o juegos, nuestra primera acción o hacer instintivo consiste en abrir la caja y observar las piezas o contenido. Generalmente es un hacer fuertemente manipulativo que canaliza el "aprendizaje" de este contenido a través de nuestros órganos sensoriales: vista y tacto frecuentemente. Tomamos los objetos o instrumentos, los observamos atentamente, los palpamos, miramos su forma, color y apariencia, elaboramos algunas hipótesis acerca del material con que están construidos y del posible uso que podemos hacer de ellos, planificamos algunas experiencias sensoriales básicas como, por ejemplo, ponerlos en fila, ordenarlos por altura, golpearlos entre sí para oír su sonido, agitarlos para notar si en su interior existen partes movibles, dejarlos caer al suelo, etc. Es claramente, una etapa de descubrimiento no guiado que dependerá de la naturaleza de los objetos, de la información previa que podamos tener de ellos y de la experiencia que hayamos acumulado en acciones o haceres semejantes.

Cuando creemos que nuestra actividad ya no puede entregarnos mayor información o conocimiento sobre los objetos en sí, nuestra naturaleza inquisitiva o *drive* cognitivo (Ausubel, 1969) nos impulsa a continuar la cadena de acciones, pero ahora esta actividad adquiere una nueva característica que permite distinguir en ella una segunda etapa.

En efecto, habiendo logrado una satisfactoria aproximación a la naturaleza física de los componentes u objetos del conjunto que estábamos examinando, la secuencia del hacer continúa en forma natural buscando interrelaciones entre los objetos, leyes que los manejen o que permitan hacer algo con ellos, propiedades que se cumplen en estos objetos, reglas estructuradas o semi estructuradas que amplíen el anterior campo del hacer (conocer los nuevos entes) y lo transformen en uno más amplio con perspectivas de acciones más complejas. Es la etapa de la búsqueda y del conocimiento de las instrucciones o reglas que permitan usar las piezas recientemente conocidas con un propósito práctico amplio. En el caso de los conjuntos de instrumentos o juegos, los fabricantes de las piezas se preocupan de adjuntar por escrito esas instrucciones y reglas.

Una vez conocidas y practicadas dichas reglas o conjuntos de interrelaciones definidas para estos objetos o entes, el hacer comienza a tomar una connotación nueva que permite asegurar que estamos comenzando una tercera etapa.

En esta tercera y última etapa de tan importante proceso del aprendizaje, desemboca en la utilización de los conocimientos adquiridos en las dos fases anteriores. Lo aprendido sobre las piezas y sus reglas o propiedades nos permite emplearlas, de manera pertinente, tras los fines propios para los cuales fueron diseñadas.

Esta tercera etapa involucra la utilización práctica, de carácter terminal, que con frecuencia reconocemos como "la aplicación" o "uso práctico" del conjunto de piezas.

Estas tres fases descritas en el símil y aplicables a un conjunto de objetos organizados tras la consecución de un determinado fin, pueden caracterizarse por preguntas o frases características:

Fase I	↔	¿Qué es?, ¿qué son?, ¿de qué están hechos?, ¿qué forma tienen?, ¿hay subconjuntos notables en ellas?
Fase II	↔	¿Cómo se relacionan?, ¿cómo se arman?, ¿qué reglas existen definidas para estos objetos?, ¿cómo se juega?, ¿qué propiedades hay que considerar?
Fase III	↔	Usémoslo, empecemos a jugar, apliquémoslo, veamos cómo funcionan esas reglas y propiedades.

El hacer matemático, como tantos otros que desarrolla el ser humano, responde o sigue también estas tres etapas.

El proceso del hacer matemático comienza con un examen reflexivo de aquellas "piezas fundamentales" que constituyen el conjunto de referencia que permitirá —posteriormente— construir los aprendizajes o haceres de las próximas dos etapas. Pero, ¿cuáles son esas "piezas fundamentales" equivalentes a los objetos básicos de nuestro símil? Claramente la respuesta a esta pregunta señala a los *conceptos matemáticos* o *ideas matemáticas*.

Todo quehacer racional se funda en el conocimiento y uso de estas especies de "partículas básicas del conocer" que son las ideas o conceptos. Ellas son las que nos permiten elaborar conocimiento organizado y comunicarlo. Además, ¿qué conocimiento no se elabora o se asimila sobre otro u otros preexistentes? (Ausubel, 1969).

El hacer matemático correspondiente a esta primera fase o etapa, resulta entonces fundamental e importante. Gran parte del éxito en las siguientes actividades estará determinado por la "calidad" del hacer de esta etapa. Parte importante de este hacer matemático aparece asociado al uso de las definiciones matemáticas que son expresiones formales de las condiciones necesarias y suficientes que las transforman en reglas intelectuales de decisión. A través de ellas "construimos" o formalizamos los conceptos o ideas matemáticos empleando otros conceptos previamente aprendidos, como requisitos o "materia prima" del proceso de asimilación.

La utilización reiterada de estas reglas de decisión (definiciones) producirán los conjuntos referenciales de entes. De esta manera, las habilidades matemáticas específicas correspondientes a esta primera etapa, aparecen asociadas a dos aspectos claves:

— la regla de decisión intelectual (definición formal)
— el conjunto referencial formado por el uso de la regla de decisión.

De manera que las habilidades matemáticas específicas correspondientes a la primera etapa (hacer matemático sobre conceptos o ideas), pueden catalogarse en dos estratos principales: las relacionadas con el hacer conectado a la definición formal, y las relacionadas con el hacer que involucra a los entes del conjunto referencial generado por el uso de la regla de decisión.

a) ***Habilidades asociadas al hacer conectado a la regla de decisión.***

- copiar una definición en el cuaderno.
- reproducir verbalmente y por escrito una definición dada.
- reconocer una definición determinada de entre otras expresiones o definiciones dadas.
- interpretar con palabras propias una determinada definición.
- reconocer que una definición determinada está erróneamente expresada (ya sea en forma verbal o escrita).
- corregir una definición determinada erróneamente expresada (ya sea en forma verbal o escrita).
- distinguir las condiciones necesarias involucradas en una definición determinada.
- distinguir la condición suficiente de las necesarias en una definición determinada.
- distinguir los preconceptos involucrados en una definición determinada.
- reconocer analogías y diferencias entre dos o más conceptos (en cualquiera de sus tres niveles: 1) diferencias entre ideas opuestas; 2) diferencias leves entre ideas no opuestas, y 3) análisis de las causas de las diferencias).
- distinguir subconjuntos notables de una determinada idea.
- reconocer otra idea que contenga o incluya al concepto en cuestión.
- usar correctamente el nombre y el símbolo asociados a una idea determinada.
- reconocer, de entre una lista de símbolos y/o nombres, aquel asociado a una determinada idea.
- conocer las relaciones: de semántica, de analogías o diferencias en el uso corriente versus su uso en el área matemática, de etimología, etc., del nombre y/o símbolo de la idea.

b) ***Habilidades específicas asociadas al hacer conectado con el conjunto referente de una idea o concepto.***

- copiar en el cuaderno ejemplos que escribe el profesor en la pizarra.
- recordar ejemplos señalados en clases.
- reconocer, de entre una lista de entes, los que son ejemplos de una idea determinada.

- decir por qué un determinado ente matemático es un no-ejemplo de una idea dada (en términos de la no satisfacción de alguna de las condiciones suficientes).
- decir por qué un determinado ente matemático, es un no-ejemplo de una idea dada (en términos de la no satisfacción de alguna de las condiciones suficientes).
- inventar ejemplos de una idea determinada.
- inventar no-ejemplos de una idea determinada.
- señalar todos los componentes del referente de una idea, si la cardinalidad del conjunto referencial es menor que o igual a 6.

Estas 23 habilidades asociadas a esta primera etapa del quehacer matemático, no son exhaustivas, ya que es posible señalar otras y/o particularizar las ya señaladas. Sin embargo, la trascendencia que tienen, como elementos básicos para construir el hacer matemático, es innegable y queda de manifiesto en la propuesta de los modos connotativos y denotativos para diseñar estrategias de aula destinadas a enseñar conceptos (Henderson, 1969; González, 1990).

Una vez que la calidad del hacer matemático de esta primera etapa queda de manifiesto a través de acciones observables que se desprenden de las habilidades específicas recién señaladas, este hacer matemático se encamina —de manera lógica y natural— a la segunda de las etapas. En ella se recombinan las ideas o conceptos para generar ciertas "plantillas" o "mapas de acción" que, a fin de cuentas, serán las construcciones o armazones fundamentales que permitirán continuar el hacer tras la etapa final de las respuestas concretas a los problemas específicos.

Estos armados, todavía teóricos, constituirán los teoremas, fórmulas, algoritmos, propiedades, corolarios, axiomas, postulados, criterios, etc., que pueden considerarse bajo el nombre de *generalizaciones*. Cada una es una construcción matemática que utiliza a las ideas o conceptos como elementos básicos. Las generalizaciones pueden ser consideradas "plantillas" porque, como son un armado de ideas y relaciones entre ideas, resulta con sentido la acción de considerar una generalización y ver si *calza* con los elementos provenientes de una determinada situación matemática dada. Justamente, esta propiedad de las generalizaciones —de hacerse susceptibles a los calces— genera o es posible asociarle una importante habilidad específica: la capacidad que deberían evidenciar los estudiantes para, dado un determinado teorema o propiedad matemática y una situación específica, determinar si se produce o no el calce de la generalización con las características de lo dado. Todos esperaríamos, por ejemplo, que nuestros estudiantes de 3° Medio (3er. grado de la enseñanza media, en Chile) pudieran determinar con éxito la factibilidad del calce del teorema de la tangente a una circunferencia desde un punto fuera de ella, con una situación geométrica dada.

Por otra parte, también tiene sentido considerar a las generalizaciones matemáticas como "mapas para la acción", dado que ellas —por su naturaleza estructural— constituyen una propuesta específica de acciones para llevar a cabo bajo condiciones dadas. Un teorema, corolario, fórmula o propiedad señala un camino específico para un hacer matemático determinado.

Estas generalizaciones matemáticas se caracterizan, además, por:

A) Son expresiones de naturaleza proposicional; es decir, resulta natural asociarles un valor de verdad.

B) Están referidas a uno o más conjuntos de entes que constituyen sus correspondientes dominios.

C) De acuerdo con B), contienen símbolos que representan variables de acordes a los dominios asociados.

D) En la expresión de cada una, figura explícita o implícitamente el cuantificador universal.

E) Su instanciación o "aplicación" constituye una nueva capacidad específica para quien la realiza.

F) Para lograr su instanciación se requiere de ciertas capacidades específicas "de entrada", las que a su vez provienen de otras generalizaciones.

G) Su estructura completa está al servicio del hacer matemático inmediato (fórmulas y algoritmos), o permite detectar situaciones en las que es posible establecer un conjunto de relaciones numéricas, métricas o algebraicas (caso de los teoremas, criterios, corolarios, propiedades, etc.).

Las principales habilidades asociadas a esta segunda etapa del hacer matemático son:

— copiar en el cuaderno una generalización escrita en la pizarra.
— reproducir en forma escrita una generalización dada en clases.
— interpretar con palabras propias (en forma oral o escrita) una determinada generalización.
— reconocer, de entre otras, una determinada generalización.
— corregir una determinada generalización expresada incorrectamente.
— reconocer la cantidad de variables involucradas en una generalización específica.
— reconocer el o los conjuntos dominios asociados a una determinada generalización (especialmente sus subconjuntos restrictivos).
— instanciar una generalización dada.
— reconocer los conceptos involucrados en una determinada generalización.
— reconocer el conjunto de "habilidades de entrada" asociado a una generalización específica.
— determinar la falsedad de una generalización usando instancias para desaprobarla.
— determinar el valor de verdad de una generalización utilizando otras generalizaciones (procedimientos deductivos).
— descubrir errores en la demostración deductiva de una generalización.
— completar la demostración deductiva de una generalización.
— descubrir una generalización mediante procedimientos inductivos.
— descubrir una generalización mediante procedimientos deductivos.
— reconocer el tipo de procedimiento deductivo (argumentos válidos) empleado en la demostración de una generalización dada.
— reconocer que de generalizaciones falsas *pueden* desprenderse tanto instancias falsas como verdaderas.
— reconocer que de generalizaciones verdaderas *no pueden* desprenderse instancias falsas.

— determinar si las condiciones dadas, para un caso específico, permiten la instanciación de la generalización.
— reconocer cuál es la generalización adecuada para resolver un determinado problema, conocida la situación dada.

La experiencia de aula (González, H., 1991) muestra evidencias de que este tipo de quehacer matemático es más desarrollado que el correspondiente a la primera etapa de las ideas o conceptos, pero —no obstante— sólo un subconjunto de las habilidades específicas aquí señaladas es tomada en cuenta. Resulta notorio que aquellas habilidades relacionadas con los procesos de dar seguridad sobre el valor de verdad de las generalizaciones (conocidos como "demostraciones matemáticas"), son generalmente, muy poco consideradas por los profesores de Enseñanza Media que las consideran "difíciles" de aprender por los estudiantes, y estos últimos, a su vez, las consideran poco prácticas e innecesarias (¿por qué preocuparse por dar seguridad a una propuesta de su profesor(a) que nunca les enseñaría algo falso?).

Generalmente, el quehacer matemático de esta segunda etapa tiende a reducirse —en la Enseñanza Media— a fórmulas o algoritmos que, aprendidos de memoria, dan al estudiante una ingenua seguridad y una cierta sensación de haber cumplido con su responsabilidad de aprender. Por otra parte, muchos profesores de matemática consideran "demasiado complejos" los procesos intelectuales involucrados en tal tipo de quehacer y, por lo tanto, alejados de las posibilidades reales de sus estudiantes. Esto hace que tal tipo de actividad sea considerada por el estudiante como poco probable de ser preguntada en las pruebas. Ambas percepciones, aunque distintas en esencia, coinciden en los resultados finales: muy pocos esfuerzos por enseñar y aprender procesos deductivos para demostrar generalizaciones matemáticas en la Enseñanza Media. ¿Qué grado de responsabilidad tenemos los profesores de matemática en esta situación? Esta es una pregunta que amerita, ciertamente, una tranquila y sincera reflexión.

Una vez completadas las etapas de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos y las generalizaciones, nuestros estudiantes se han armado de los elementos teóricos necesarios para encontrar resultados concretos a los innumerables problemas matemáticos que surgen como situaciones matemáticas teóricas o que no exhiben una sustentación empírica concreta inmediata, o bien surgen como modelaciones específicas de la realidad.

Cabe hacer notar que las dos etapas primeras no sólo contribuyen con "entes matemáticos" específicos —conceptos y generalizaciones— sino que además hay que considerar la potente contribución que hacen las destrezas específicas asociadas a esas dos etapas y que ya han sido descritas con anterioridad.

Con este bagaje, el estudiante puede enfrentar con altas probabilidades de éxito, el quehacer matemático terminal y que corresponde —según el símil del comienzo— a la etapa en donde, una vez conocidas las piezas del juego y sus reglas o condiciones, se inicia el juego interactivo propiamente.

Las destrezas específicas asociadas de esta tercera etapa del quehacer matemático, son vastamente conocidas por los profesores, ya que constituyen prácticamente el 100% de aquéllas que tratan de ser estimadas o medidas a través de un sinnúmero de instrumentos con distintos niveles de validez, confiabilidad y pertinencia.

Por ejemplo, algunas de ellas son:

Habilidades para:

— hacer cálculos aritméticos enteros y decimales.
— desarrollar expresiones algebraicas.
— factorizar expresiones algebraicas.
— operar con polinomios.
— calcular aproximaciones decimales para raíces cuadradas.
— calcular cuarta, tercera y media proporcional geométrica, numéricas.
— resolver problemas que involucran porcentajes.
— operar con potencias.
— usar productos notables.
— resolver ecuaciones de primer grado.
— construir elementos primarios y secundarios del triángulo.
— construir figuras simétricas (axial y puntual).
— resolver problemas que involucren cálculos de perímetros y áreas de polígonos regulares y circunferencias.
— determinar imágenes de funciones.
— calcular la distancia entre dos puntos del plano.
— resolver sistemas de ecuaciones de primer grado.
— graficar funciones de primer grado.
— resolver inecuaciones de primer grado con una y dos incógnitas.
— resolver problemas que impliquen lugares geométricos.
— construir triángulos.
— resolver problemas que involucren el cálculo de áreas y volúmenes de sólidos.
— calcular proposiciones donde intervengan raíces reales.
— racionalizar expresiones.
— resolver problemas que involucren ecuaciones cuadráticas.
— resolver ecuaciones bicuadráticas e irracionales.
— dividir trazos armónicamente.
— resolver problemas que impliquen la potencia de un punto.
— resolver problemas que involucren semejanza de triángulos.
— resolver cálculos usando logaritmos.
— resolver ecuaciones exponenciales.
— operar con números complejos.
— resolver sistemas de ecuaciones de segundo grado.
— hacer e interpretar gráficos estadísticos.
— procesar datos para estadísticas descriptivas
— resolver problemas que involucren probabilidades.

Esto es sólo una muestra de las innumerables habilidades específicas asociadas al quehacer matemático terminal o de tercera etapa, sustentado en el currículo de Enseñanza Media actualmente vigente. Nótese que cualquier persona que ponga en evidencia alguna de estas habilidades específicas —con un nivel de desarrollo considerado adecuado— necesariamente desarrolla un quehacer matemático que implica el haber logrado (con iguales índices de eficiencia) los quehaceres matemáticos de las dos etapas anteriores. Esta consideración rubrica la secuencia obligada planteada entre las tres etapas. Cualquier trastorno a esta secuenciación o desequilibrio en términos de énfasis otorgados, sólo contribuye a dañar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, y a enfatizar aspectos transitorios y poco relevantes que terminan dando una visión menoscabada y errónea de la ciencia matemática.

Algunas evidencias empíricas que comienzan a recogerse, tanto en la enseñanza media como en la enseñanza superior en Chile (Alvarez, M., 1991; González, E., 1991), muestran con cierta claridad el fenómeno del desequilibrio de estas etapas, especialmente en lo que se refiere a la sobredosis de dedicación para el quehacer terminal. Esto significa un claro desafío, que, con prontitud, deben afrontar los profesores de matemáticas para mejorar y enriquecer el aprendizaje de la matemática, especialmente, en el nivel medio.

BIBLIOGRAFÍA

ÁLVAREZ F. Marianela; CAMPOS A., Olga; HERNÁNDEZ M. Fabiola; GONZÁLEZ G., Hernán. "Estudio comparativo de conceptos matemáticos basado en opiniones de profesores de E. Media y E. Superior", *VII Jornada Nacional de Educación Matemática,* Valdivia, 1991.

AUSUBEL, David y ROBINSON, Floyd. *School learning. An introduction to educational psychology* Holt, Rinehart and Winston, USA, 1969.

GONZÁLEZ Guajardo, Hernán. "Algunas consideraciones sobre la enseñanza de los conceptos Matemáticos", *Revista de Ciencia y Educación*, de la EFPEM, Universidad de San Carlos de Guatemala. Vol. 4.2, Guatemala, agosto de 1990.

GONZÁLEZ Guajardo, Hernán. "Sobre la enseñanza de los conceptos matemáticos", *Revista de Educación*, No. 175, Ministerio de Educación; 27-32, 1990.

GONZÁLEZ Guajardo, Hernán, y otros. "Un estudio descriptivo sobre conceptos matemáticos en profesores de Enseñanza Media y Enseñanza Superior". *XI Encuentro Nacional de Investigadores en Educación*, septiembre de 1991, Lo Barnechea.

GONZÁLEZ Lasseube, Enrique; VILLARROEL Valenzuela, Francisco; GONZÁLEZ Guajardo, Hernán. "Estudio descriptivo acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos en la Enseñanza Media".

HENDERSON, Kenneth. "Concepts" *The Teaching of Secondary School Mathematics*. Thirty-Third Yearbook. *National Council of Teachers of Mathematics*. USA, 1970.

VARGAS, María Viviana; CARVACHO, María Soledad. "Tendencias curriculares en la enseñanza de la matemática escolar". Trabajo de graduación para optar al grado académico de Licenciado en Educación en Matemática y Computación, USACH, 1990.

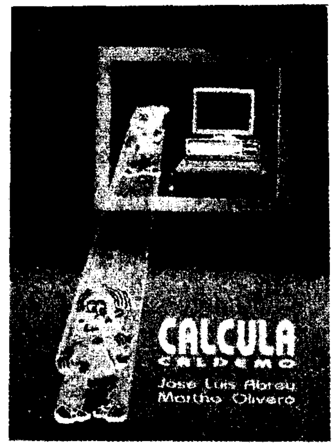
Ahora profesores y [illegible] a su [illegible] programas al precio de un [illegible] de texto

CALCULA

CALDEMO

JOSÉ LUIS ABREU (Ph. D., MIT) y M. en C. MARTA OLIVERO *Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS), Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), México, D.F., México*

Programa de experimentación en Cálculo para evaluar y graficar derivadas e integrales y sus funciones.
*Cuenta con **CALDEMO** como programa adicional que permite desarrollar presentaciones en forma de rutina continua, como para exposiciones en clase.*



CÓNICAS

CONDEMO

JOSÉ LUIS ABREU (Ph. D., MIT) y M. en C. MARTA OLIVERO *Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS), Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), México, D.F., México*

Permite analizar las secciones cónicas gráficamente, observando los efectos de los cambios de variables en las ecuaciones y experimentar con la traslación de ejes.
***CONDEMO** es un programa suplementario con el que podrá hacer dinámicas exposiciones en clase.*