■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 5 - No. 2 • Agosto 1993 ■ © GEI ■ Pág. 19 ■

ARTICULOS

¿Por qué Matemáticas?

Resumen

Tradicionalmente, las matemáticas son la materia más temida por los estudiantes, especialmente en el nivel medio superior. Una de las razones para ello es que en este punto el estudiante desconoce casi por completo lo que **en realidad** son las matemáticas, pues, a diferencia de otras disciplinas, como la medicina, la arquitectura, la abogacía, e incluso la física, que han logrado de alguna manera popularizar su imagen (e importancia), el quehacer del matemático sigue estando envuelto en un velo de misterio, tanto para el público en general como para los estudiantes en particular. Por ello, en este artículo se pretende discutir lo infundado de este temor hacia las matemáticas, así como la multitud de posibilidades que éstas ofrecen, básicamente mediante algunos ejemplos extraídos de variadas ramas de las matemáticas.

En estas notas trataré de responder a la pregunta planteada en el título, interrogante que con frecuencia se formulan los estudiantes, en particular de nivel medio y medio superior: *¿por qué es importante y/o necesario estudiar matemáticas?* Para ello, trataré de ilustrar con algunos ejemplos relativamente elementales las múltiples posibilidades que ofrecen las matemáticas para la resolución de problemas, provenientes tanto del mundo real como del mundo de las propias matemáticas.

Comencemos, sin embargo, por citar algunas razones por las que, en mi opinión, vale la pena el estudio de las matemáticas:

La razón básica es que las matemáticas son **extraordinariamente útiles** en muchísimos campos del saber (y quehacer) humano, no sólo en las ciencias exactas (como la física) y la ingeniería, sino también en las ciencias naturales y sociales. Esta respuesta, que es casi seguramente el argumento que cualquier profesor exhibiría para convencer a un alumno escéptico, me parece por sí sola una razón suficiente para justificar el estudio de las matemáticas. Pero, además, quisiera señalar que es ya un hecho que las matemáticas se encuentran en multitud de aspectos de nuestra vida cotidiana; por ejemplo, en las estadísticas, en los programas de computación, en las fórmulas para pago de impuestos, etc.

Otra razón, que me parece muy importante aunque desafortunadamente poco comprendida, es que las matemáticas son parte importante del patrimonio cultural de la humanidad: casi todo mundo está de acuerdo en que un hombre culto debe poseer algunos conocimientos de historia y geografía, de literatura, de

Fausto Ongay L.

(IMAT, Guanajuato)

música y de arte, así como algo de información científica, sin ser un experto necesariamente en ninguna de ellas. A esto es necesario agregar un conocimiento **razonablemente general y correcto** de las matemáticas. (Cabe recordar que en la antigua Academia de Platón estaba inscrita una leyenda que decía "Nadie que no sepa matemáticas puede entrar en este lugar").

Para entender estas disciplinas, sin embargo, es necesario llenar algunos requisitos (como ejemplo obvio, ¡saber leer y escribir!); las matemáticas no son la excepción: para poderlas entender y apreciar hay que aprender los requisitos, que son los que se enseñan en los cursos.

Finalmente, otra importante razón es que las matemáticas son muy interesantes *perse*: son por una parte como los acertijos o el ajedrez, un reto a nuestra imaginación e ingenio, pero además, aunque a algunos (¿a muchos?) les pueda parecer extraño, pueden ser bonitas, divertidas, sorprendentes. . . Un ejemplo muy claro de la belleza "escondida" en las matemáticas es la creación de imágenes por computadora, las que en ocasiones son verdaderas obras de arte, como se muestra en la Figura 1 (adaptada del libro *The science of fractal images*, de H. O. Peitgen y D. Saup. Springer-Verlag, 1988):

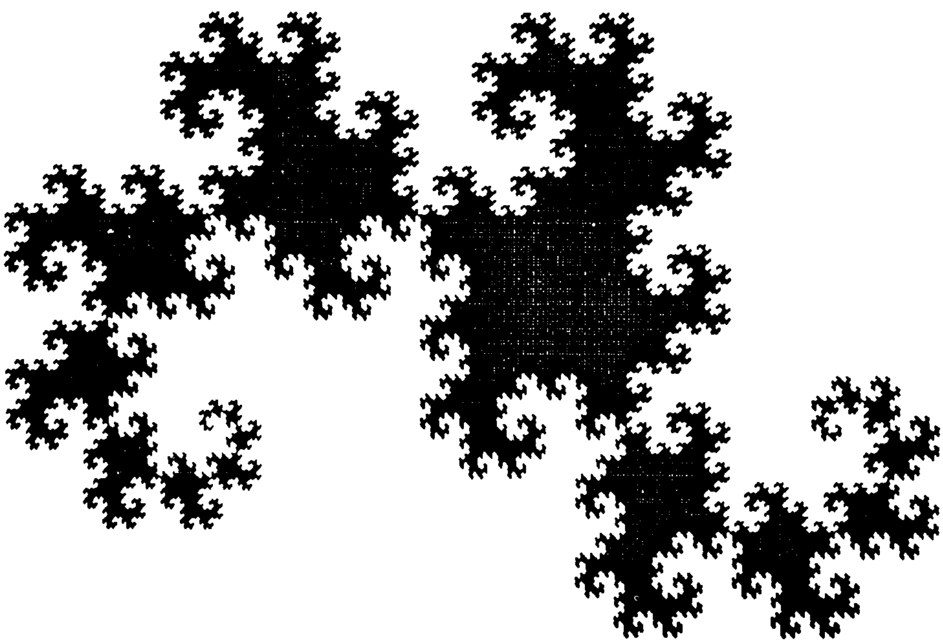

Figura 1

Para muchos estudiantes sin embargo, el problema es que tienen la impresión de que las matemáticas son tan sólo problemas tediosos y rutinarios de aritmética o álgebra, o bien que se requiere de una inteligencia excepcional para poder entenderlas. Pero ambas impresiones son erróneas: por un lado, las matemáticas son mucho, **muchísimo**, más que problemas rutinarios o "recetas de cocina". Pero, por otro lado, si bien es cierto que los grandes matemáticos han sido genios de primerísimo nivel, lo mismo puede decirse de los grandes médicos, abogados o ingenieros (además de que no todo matemático es un gran matemático); lo que realmente se requiere para hacer matemáticas, como para casi cualquier actividad intelectual, es una inteligencia mediana y mucho trabajo . . .

Quizá esta confusión que existe respecto de las matemáticas se debe al hecho que éstas tratan con objetos abstractos e idealizados (aunque quiero insistir en que no son la única disciplina con esta característica, por ejemplo, piénsese en la filosofía o en lo concreto de las nociones de ego, ética o civismo). Esto puede explicar el que la mayoría de la gente desconozca lo que realmente son las matemáticas. Por ello, quisiera comentar un poco acerca de una cuestión fundamental:

*¿qué **son** las matemáticas?*

Aunque una respuesta definitiva a esta pregunta no es posible, podemos intentar una primera aproximación buscando la definición en algún diccionario; por ejemplo, la siguiente:

"Estudio de los números, formas, arreglos y relaciones asociadas usando símbolos literales, numéricos y operacionales, rigurosamente definidos (del latín *mathematica*, a su vez del griego *mathematika* de *mathema*, ciencia, *mathanein*, conocer.)" [The American Heritage Dictionary].

Esta definición, como suelen ser las definiciones de los diccionarios, es un poco vaga e imprecisa, pero vale la pena subrayar la palabra "rigurosamente" que aparece en ella, así como la vastedad de posibilidades que se ofrecen: formas, arreglos, cantidades, son términos que pueden referirse —y se refieren— a muchas cosas. Así pues, las matemáticas se pueden crear, encontrar y aplicar en un espectro muy amplio de situaciones: por ejemplo, además de las teorías clásicamente consideradas dentro de las matemáticas, como la geometría y el álgebra, en este siglo se han incluido dentro del "gran árbol de las matemáticas" novedosas teorías como la teoría de juegos, la programación lineal y la computación, que han permitido aplicaciones (insospechadas anteriormente) de las matemáticas. Por ello, en lo personal me gusta decir que las matemáticas son un método, un enfoque o una disposición (muy eficaces) de enfrentar, y en muchos casos resolver, cierto tipo de problemas (¡muy variados!) y que se puede resumir *grosso modo* así:

¿qué es lo que sé, a qué es a lo que quiero llegar y qué es lo que se vale que haga?

Ejemplos. (En este punto quisiera también mencionar el bello libro, escrito por dos excelentes matemáticos, R. Courant y H. Robbins, que tiene por título la pregunta que nos ocupa, *¿Qué es la Matemática?*, y que responde a ella de la manera más sensata posible: mostrando, a lo largo de todo el libro, **lo que se hace** en matemáticas).

Pasemos a ver ahora algunos ejemplos concretos (y sencillos) del tipo de cosas que se pueden hacer con las matemáticas.

1. Veamos primero algunos pequeños trucos aritméticos, que resultan de fórmulas elementales:

a) Pensemos rápido, ¿cuánto es 79×81?

Respuesta: $79 \times 81 = (80 - 1) \times (80 + 1) = 80^2 - 1 = 6400 - 1 = 6399.$

b) Otro ejemplo similar es el siguiente ¿Qué señala una calculadora al calcular $(0.99999)^2$?

Respuesta: 0.99998, porque $(0.99999)^2 = (1 - 0.00001)^2 = 1 - 2 \times 0.00001 + (0.00001)^2 = 0.9999800001$, y el último 1 ya no aparece en la pantalla o *display*.

c) ¿Cuál es la suma de los números del 1 al 100?
Respuesta: si a cada uno de los números que queremos sumar le agregamos lo que le falta para 100 (99 al 1, 98 al 2, etc., hasta 0 al 100), lo que tenemos es 100 veces 100, es decir, 10 000. Esta suma es casi exactamente dos veces la suma que queremos, excepto por un cien que no hemos sumado, de modo que el resultado es $(1/2)(10\,000 + 100) = 5050$.

Este problema le fue propuesto al gran matemático alemán Karl Gauss, cuando aún era estudiante de secundaria, como un medio para mantenerlo ocupado por un largo rato haciendo la suma y, aunque la estrategia le funcionó al profesor con los compañeros del joven Gauss, usando el argumento que hemos visto, éste lo resolvió de inmediato. De hecho, Gauss observó rápidamente que si se quieren sumar los números del 1 al N, la manera más simple de hacerlo es observar que si pensamos a los números que queremos sumar como cuentas corredizas, y **duplicamos** el número de cuentas, podemos acomodarlas en un rectángulo de lados N y $N + 1$ (véase en la Figura 2 el caso de $N = 4$), de modo que la suma es claramente $N(N + 1)/2$.

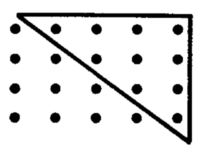

Figura 2

2. Un lugar donde las matemáticas se están aplicando cada vez con mayor frecuencia es en la economía y las finanzas, veamos un par de aplicaciones muy elementales
a) ¿Qué es mejor para un comprador, qué se le dé un descuento inicial de 15% o un descuento de 10% y otro adicional de 5%?

Respuesta: Es mejor el descuento del 15%, ya que con éste el precio real de un artículo es $1 - 0.15 = 0.85$ veces el precio original del artículo, en tanto que con la otra estrategia el precio resulta $(1 - 0.10)(1 - 0.05) = 0.855$ veces el precio original.

b) Los bancos A y B ofrecen sendos "planes maestros de ahorro", que describimos a continuación:
Plan A: Se hace una deducción inicial de 5% para gastos de manejo, se garantiza un rendimiento de 60% en tres años sin cargos por retiro del capital.
Plan B: No hay deducción inicial y se garantiza el rendimiento de 60% a tres años, pero hay un cargo de 5% por gastos de retiro.
El banco A asegura que su plan es mejor porque la deducción inicial es sobre una cantidad menor que en el plan B, pero el banco B alega que su plan es

mejor porque el rendimiento se calcula sobre un capital mayor. ¿Cuál de los dos bancos tiene razón?

Respuesta: Ninguno, el rendimiento efectivo es el mismo en ambos casos. En efecto, si suponemos un capital inicial de X pesos, el plan A da un capital final de $1.60(0.95X)$, en tanto que el plan B ofrece un capital final de $0.95(1.60X)$ y ambas cantidades son claramente iguales.

3. Muchas veces el uso de teoremas matemáticos permite diseñar un medio (o herramienta) apropiado para algún problema o suplir la falta de aquél:

a) Dos rancheros poseen terrenos colindantes y ambos han aceptado que la línea divisoria entre ellos, sea una perpendicular al lado sur, que pase a través de un árbol que sirve como referencia, según se muestra en la Figura 3:

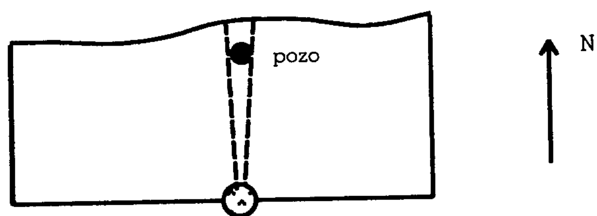

Figura 3

Casi exactamente sobre esta línea se halla un pozo que surte de agua a ambos y, por supuesto, cada ranchero alega que el pozo se encuentra dentro de su terreno. Sin disponer de escuadras, ¿en qué forma podrían resolver sus divergencias?

Respuesta: Les basta conseguir una cuerda y hacer marcas sobre ella a intervalos regulares (por ejemplo, pequeños nudos). Después, escogiendo un lado de 3 unidades, otro de 4 y un tercero de 5, el teorema de Pitágoras garantiza que el triángulo resultante es recto, y esto puede sustituir —incluso con cierta ventaja— a una escuadra pequeña. Este método de trazado era conocido ya en el antiguo Egipto, y muy probablemente es lo que les permitió lograr la admirable precisión geométrica mostrada en las pirámides.

b) Un teorema menos elemental, el teorema de Green del Cálculo con varias variables, permite la construcción de un ingenioso aparato que hace posible medir el área de una superficie plana simplemente caminando a lo largo de su perímetro. Aunque el teorema mencionado es demasiado complejo para describirlo aquí, podemos dar una fórmula sencilla que permite efectuar ese cálculo (en general, sólo aproximadamente):

$$A = \sum_{i=1}^{n} (y_i \Delta x_i + x_i \Delta y_i)$$

En esta fórmula, A es el área de la región que queremos calcular; Σ significa "suma de lo que sigue aplicando sucesivamente el subíndice i, desde 1 hasta n"; (x_i, y_i) son las coordenadas de puntos marcados sobre la frontera de la región, y Δ significa "incremento entre el valor de la coordenada en un punto y el siguiente" (véase la Figura 4)

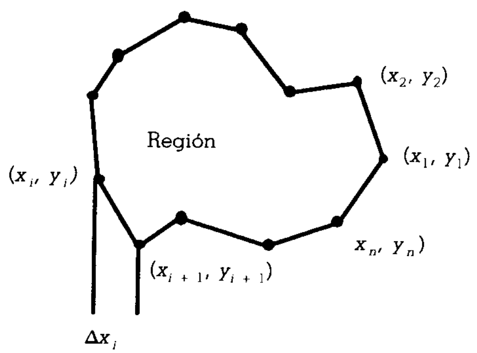

Figura 4

El lector puede convencerse de la validez de esta fórmula considerando casos particulares, como polígonos, o mejor aún, calculando con ella el área de alguna región irregular, y verificando con la cifra obtenida por otros métodos. Por ejemplo, dibújese algún estado de la república en una cuadrícula.

4. Una de las aplicaciones más frecuentes de las matemáticas es en los llamados **problemas de optimización**:

a) Según la mitología, la antigua ciudad de Cartago fue fundada por Dido, una princesa fenicia, de la siguiente manera: después de huir de la ciudad de Tiro y tras varios días de travesía, llegó a la costa de lo que hoy es Túnez. Haciendo honor a la fama de los fenicios de ser buenos negociantes, Dido consigue del monarca del lugar un trozo de tierra para ella y su gente. El pedazo de tierra en cuestión iba, sin embargo, a determinarse por lo que Dido lograra encerrar con una piel de buey. Dido, astutamente, corta la piel en largas y delgadas tiras, y de esta forma consigue un terreno suficiente como para fundar ahí una ciudad.

La pregunta es ahora: ¿cuál es la forma de la región que más convenía a Dido? Este problema se llama en matemáticas, **problema isoperimétrico**, y se puede demostrar que la solución es el círculo; aunque no resolveré aquí el problema en su forma más general, podemos con cálculos muy sencillos, resolver un caso más simple, que es el siguiente:

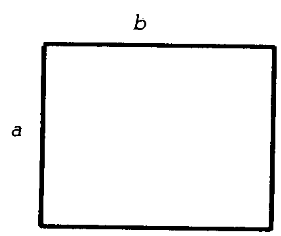

Figura 5

Supongamos que se nos da un alambre de longitud L y queremos encerrar la región rectangular que tenga perímetro L y área máxima.

Solución: Escribamos $L = 4l$ y supongamos que el rectángulo que resulta tiene lado menor a y lado mayor b (es decir, $a \leq b$), de modo que el área del rectángulo es $A = ab$ (Fig. 5).

Es claro que podemos escribir $a = l - x$, y $b = l + x$, para alguna cantidad $x \geq 0$ (¿por qué?). Luego

$$A = ab = (l - x)(l + x) = l^2 - x^2$$

Como el segundo término en la última expresión es un número mayor que o igual a cero, se sigue entonces que $A \leq l^2$, y $A = l^2$, si y sólo si $x = 0$, de modo que **hemos demostrado** que la solución es un cuadrado de lado l.

b) Un célebre problema de optimización, que dio nacimiento a una teoría llamada **cálculo de variaciones**, es el llamado problema de la braquistócrona (del griego *brachisto*, lo más corto), planteado por el matemático suizo Johann Bernoulli en 1696, que dice lo siguiente:

Supongamos que tenemos un alambre y una cuenta ensartada que puede deslizarse sin fricción por el alambre, y que se nos dan dos puntos A y B, que no están sobre la misma vertical (véase la Figura 6). ¿Cuál es la curva que permite llegar de A a B en el menor tiempo posible? La solución de este problema, que **no** es la recta que une A y B, fue dada por el propio Bernoulli y por sir Isaac Newton entre otros, y requiere de técnicas relativamente avanzadas de cálculo y ecuaciones diferenciales; por ello no la daré aquí. Sin embargo, es fácil describir la curva que resuelve el problema: esta es la cicloide, que es la curva que describe un punto fijo marcado sobre un círculo (o circunferencia) que gira sin resbalar a lo largo de una recta (Fig. 7).

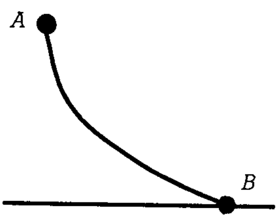

Figura 6

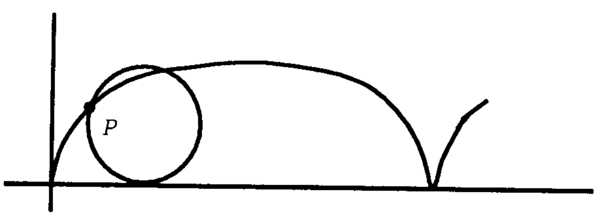

Figura 7

Esta notable curva posee otras propiedades muy interesantes. Por ejemplo, una de las más sorprendentes es que el tiempo que la cuenta tarda en llegar al punto más bajo ¡no depende del punto inicial de donde la soltemos!

5. El siguiente es un problema que parece bastante complicado *a priori*, pero cuya ingeniosa solución es en realidad muy simple (este problema aparece en el libro de V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, y Arnold se lo atribuye a N. N. Kostantinov):

Supongamos que tenemos dos bodegas A y B, unidas por dos rutas o caminos, 1 y 2, y que en cada bodega se tiene un tanque circular de radio l, como se muestra en la Figura 8:

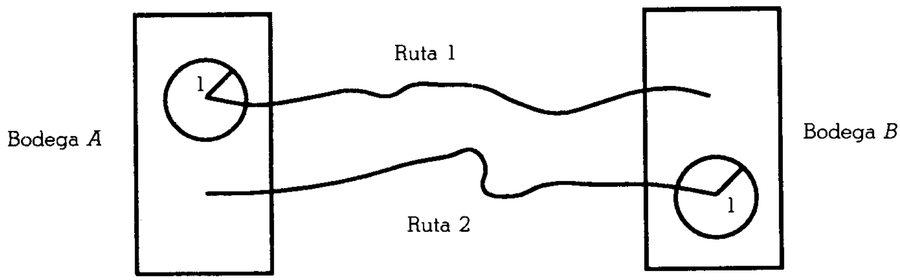

Figura 8

El encargado de la bodega desea cambiar los tanques de bodega, y cree que si los mueve de manera apropiada es posible hacerlo. Sin embargo, el ingeniero jefe de mantenimiento teme que no pasen y que si lo intentan se dañen los tanques. ¿Cómo resolver el problema sin arriesgar los tanques?

Un amigo matemático del ingeniero le ofrece la siguiente solución:

Dos personas sujetando una cuerda de longitud ligeramente menor que $2l$ deben caminar de la bodega A a la B; si alguno de ellos logra llegar sin soltar la cuerda a la bodega B, entonces no hay manera de que los tanques pasen. El encargado de bodega no está muy convencido al inicio y para convencerlo, el matemático hace el siguiente diagrama (Fig. 9): En unos ejes cartesianos representamos, sobre el eje de las abscisas, la distancia que recorrería un objeto (o persona), medida a partir de la bodega A sobre el camino 1, en tanto que sobre el eje de las ordenadas la distancia a la misma bodega pero sobre el camino 2. De esta forma, el punto de coordenadas (x, y) representa dos objetos situados simultáneamente: uno sobre la ruta 1, a la distancia x de la bodega A, y el otro sobre la ruta 2, a la distancia y (donde por supuesto, $0 \leq x \leq OP$, y también $0 \leq y \leq OR$). Así, por ejemplo, el punto Q representa que los objetos están ya en la bodega B. Luego, si, también por ejemplo, los hombres que sujetan la cuerda consiguen llegar sin soltarla de la bodega A a la B, su trayectoria es una curva que une O con Q, que podemos incluso trazar explícitamente (curva continua en la figura). Más, en general, si alguno de ellos logra llegar a la bodega B, la curva que describe su trayectoria será una que toque a alguno de los lados PQ o RQ (o a ambos), en tanto que, si no lo consiguen, la curva

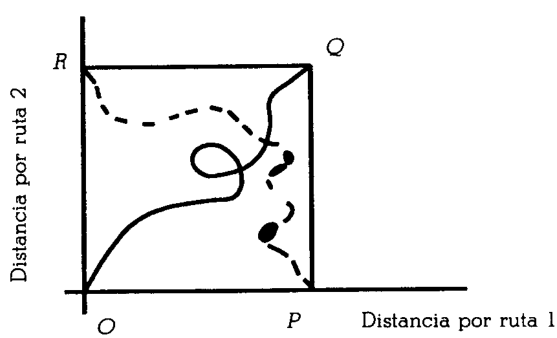

Figura 9

terminará en algún punto interior del rectángulo $OPQR$. Por otro lado, si hacemos el movimiento deseado para los tanques, la trayectoria de éstos, no importa cuán complicada sea, estaría dada por una curva que conectaría R con P (línea de trazos en la figura) y, por lo tanto, si alguno de los hombres logra llegar a la bodega B, ésta corta, al menos en un punto, a la trayectoria de los hombres. En ese punto, la distancia entre los centros sería la longitud de la cuerda, que es menor que dos veces el radio de los tanques, y así, en ese punto chocarían éstos.

6. Como último ejemplo, consideremos el siguiente acertijo clásico:
Juan desafía a Pedro a que dibuje sin levantar el lápiz y sin pasar más de una vez por cada línea el "cuadrado del diablo", que es la figura que se muestra en la parte (a) de la Figura 10. Después de algún tiempo de intentarlo, Pedro se rinde, pero reta a Juan a que resuelva lo que él piensa es un problema más difícil, el "pentágono del diablo", parte (b).

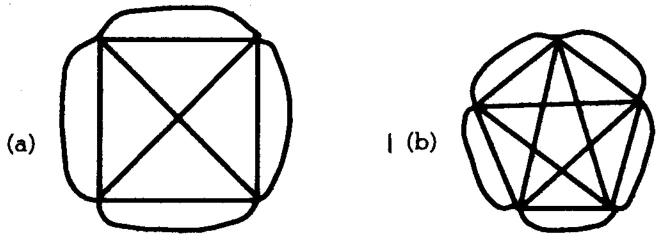

Figura 10

Sin embargo, para sorpresa de Pedro, Juan logra resolver el problema, ¿cómo fue posible?

Solución: Este es un problema de **teoría de grafos**, y su solución es como sigue. Notemos que en ambos casos hay un conjunto de puntos (4 en el cuadrado, y 5 en el pentágono), unidos por una serie de segmentos sucesivos, los puntos de intersección de las diagonales no interesan). Esto es lo que se llama un **grafo**. A los puntos del grafo les llamamos **vértices**, y a las líneas, **aristas**. Podemos ahora describir el problema del trazado de las figuras de manera más precisa: hay un grafo y queremos describir un **ciclo**; es decir, una trayectoria que empiece y termine en el mismo punto, utilizando las aristas del grafo, con la condición de que se pase por todas ellas y por todos los vértices, pero recorriendo una sola vez cada arista. Este tipo de ciclos, llamados **eulerianos**, en honor del matemático suizo Leonhard Euler, no existen en cualquier grafo, y es fácil establecer la condición para que existan (o no). Para ello basta considerar lo que ocurre en un vértice arbitrario; si queremos que exista un ciclo euleriano, cada vez que lleguemos a ese vértice por alguna arista, debe existir otra arista, que no hallamos utilizado, por la que debemos salir (Fig. 11).

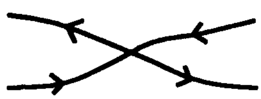

Figura 11

Esto lo que dice, es que es necesario que en **todos** los vértices, el número de aristas que llegan a ese vértice sea **par**, y puede demostrarse que esta condición basta también para la existencia de ciclos eulerianos. En el caso del cuadrado, el número de aristas por vértice es 5, por lo que no puede haber ciclos eulerianos; en el caso del pentágono tal número es 6, por lo que sí hay.

Los ejemplos descritos en estas páginas son sólo pequeños botones de muestra de la infinidad de posibilidades que ofrecen las matemáticas: No sólo sirven para la resolución de problemas, lo que indudablemente es ya en sí un aspecto muy importante, sino también son un ejercicio para nuestro intelecto y un recurso para nuestra comprensión de las cosas.

Las matemáticas pueden ser fuente de belleza, de satisfacciones y, ¿por qué no?, también de algunas frustraciones. Después de todo, como reza el dicho, *las cosas que más valen la pena son aquellas que más trabajo nos cuestan.*

Referencias

R. COURANT y H. ROBBINS. *¿Qué es la Matemática?* Colección Ciencia y Técnica. Aguilar: México, 5ª edición 1979.

R. D. DRIVER. *Why Math?* Colección UTM. Springer-Verlag: Nueva York, (1984).

Y. PÉRELMAN. *Matemáticas Recreativas* 3ª edición. Mir: Moscú (1973).