■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 5 - No. 2 • Agosto 1993 ■ © GEI ■ Pág. 11 ■

Sorpresas Matemáticas

"Las apariencias engañan"
"El león no es como lo pintan"
"Caras vemos, corazones no sabemos"
"No todo lo que brilla es oro"

Resumen:

El contenido de este trabajo está basado en el análisis informal de cuatro afirmaciones —menos triviales de lo que aparentan— y que tienen como finalidad poner de manifiesto lo relativas que pueden resultar muchas cuestiones matemáticas.

Si este artículo cumple su cometido, usted no volverá a "*decir salud, antes de que le sirvan*". . . .

La sabiduría popular nos ha provisto de estas sutiles advertencias para evitarnos algunas sorpresas. Valga aclarar que cuando hacemos caso omiso de estas enseñanzas, las experiencias no necesariamente son desagradables. . . y como "*para muestra basta un botón*", este escrito trata acerca de algunos temas que le mostrarán que la matemática puede ser tan interesante y versátil como usted esté dispuesto a conocerla. . . ¿se decide entonces a darle una probadita? Bien, ¡adelante! que "*no hay peor lucha que la que no se hace*".

Para entrar en materia, analicemos la siguiente Tabla:

TABLA 1

A) $2 \times 3 = 1$	FALSO
B) Existen triángulos con tres ángulos rectos	FALSO
C) La distancia al origen de cualquier punto del rombo es 1 (Fig. 1)	FALSO
D) Existen números a y b tales que $a + b = a$, para $b \neq 0$	FALSO

Silvia Gómez Calderón

Universidad Autónoma de Baja California
Unidad Ensenada.

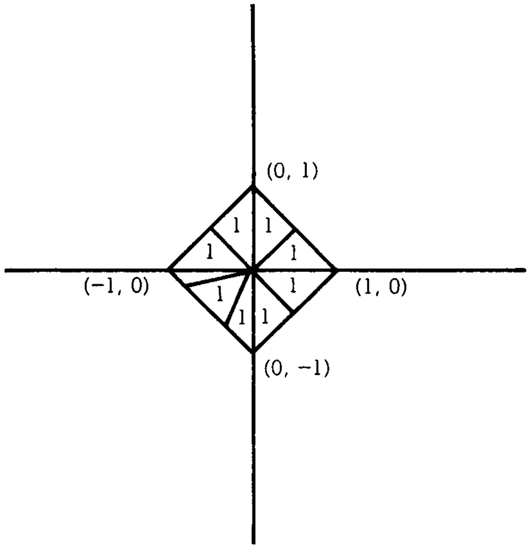

Figura 1

Estará de acuerdo en que el valor asignado a las afirmaciones anteriores es, al menos, "razonable", pero recuerde que "*en gustos se rompen géneros. . . .*"
Dejémonos de lucubraciones y "hablemos de matemáticas".

1. Algo sobre teoría de números

La teoría de números se dedica a estudiar las propiedades de los números enteros. Una de las más interesantes relaciones —de equivalencia, por cierto— entre los números enteros, es el concepto de *congruencia en módulo n*.

Definición 1. Congruencia módulo n.

Sea n un entero positivo fijo. Se dice que el entero a es congruente al entero b en módulo n, si existe un entero k, tal que $a - b = kn$. Simbólicamente, $a \equiv b$ mód n.

La aritmética del reloj es una de las aplicaciones más sencillas de este concepto, aunque generalmente pasa inadvertido. A nadie le extraña que a la *una de la tarde*, dos personas que se refieren a la misma hora en un mismo lugar y a un mismo tiempo, aseguren: una que son las 13:00 horas, y otra que es la 1:00 P.M. ¿Por qué? Pues porque 13 ≡ mód 12.
Ahora puede informar la hora de manera diferente. Por ejemplo, puede decir que son las 19 horas, en lugar de las 5:00 P.M., o decir 15 en lugar 24 en módulo 3, porque 24 − 15 es divisible entre 3. ¿Original, no?
En tanto decide adoptar o no esta modalidad, veamos lo que sigue.

2. Algo sobre geometrías no euclidianas

Para situar al lector desconectado del tema, en el contexto de las geometrías no euclidianas, relataremos un brevísimo resumen de la conocida historia de estas geometrías.

Todo empezó con los *5 postulados de Euclides:*

1) Dados dos puntos P y Q en el plano, existe una única línea (recta) que pasa por P y Q.

2) Dado cualquier segmento $\overline{PQ}$, es posible prolongarlo en uno y otro sentidos, tanto como sea necesario.

3) Dados dos puntos P y Q, existe una circunferencia de centro P y radio $r = |\overline{PQ}|$.

4) Todos los ángulos rectos son congruentes.
5) Si cuando una recta transversal corta a dos rectas dadas, los ángulos interiores de un mismo lado suman menos de 180°, entonces al ser prolongadas las dos rectas, se intersectan por el lado de estos ángulos.

NOTA 1. El *Axioma de Playfair* es un enunciado equivalente al 5° postulado de Euclides; de hecho es la versión más conocida del mismo:

"Por un punto situado fuera de una recta, pasa una recta única paralela a aquéllas"

Es fácil notar que los cuatro primeros postulados surgieron de la experiencia y que el quinto no resultaba tan evidente. Imagínese intentar comprobarlo cuando la suma de los ángulos interiores estaba muy cercana a los 180°, . . . ¡imposible!

Por otro lado y en otro tiempo, la formalización de las ramas de la matemática nos ha enseñado que un axioma es una proposición que se considera verdadera, porque no es posible demostrarla con la teoría existente hasta ese momento, y porque es necesaria para continuar los desarrollos dentro de esa misma teoría. Por supuesto que no resulta trivial "inventar" axiomas; hay que evitar las falacias y no olvidar la independencia con el cuerpo de axiomas restante. . . . Sin embargo, en la época en la que los únicos medios de creación eran la experiencia y la intuición, un axioma era considerado como "una verdad tan evidente que no necesita demostración". Por esta razón, como la idea que concibe este último postulado parecía tan elaborada, se pensó en la posibilidad de que en realidad fuera un *tecrema*, es decir, que podía inferirse de los 4 primeros postulados. Uno de los varios intentos de prueba de este polémico "enunciado", optó por estudiar su negación con la finalidad de inferir alguna contradicción. Tal falacia nunca se obtuvo (no existe) y en su lugar apareció una nueva teoría:

Las geometrías no euclidianas

Considerando el axioma de Playfair para la *negación del 5° postulado*, obtenemos que: Si no es cierto que por un punto situado fuera de una recta, pasa una paralela única, entonces

1) por ese punto pasa más de una recta con tales características, o bien
2) por tal punto no pasa paralela alguna.

A continuación mostraremos un ejemplo de estas geometrías desde un punto de vista muy superficial, pero que para nuestro objetivo será suficiente:

Ejemplo 1. La geometría en una esfera

Sabemos que se llama *círculo máximo* a todo aquel círculo que está sobre una esfera y que tiene su radio igual al radio de la esfera.

Consideremos una esfera S y sus círculos máximos. La primera representará al plano, y los segundos a las rectas en ese plano.

Si pensamos que la esfera es el globo terráqueo, fácilmente podemos aceptar que el plano euclídeo (en el sentido convencional) que contiene al ecuador, es perpendicular al plano euclídeo que contiene a un meridiano cualquiera. Nótese que el ecuador, al que llamaremos E, y cualquier meridiano son círculos máximos. Consideremos dos meridianos m_1, y m_2, de modo que sean perpendiculares los planos euclídeos que los contengan. Gráficamente podemos observar lo que muestra la Figura 2.

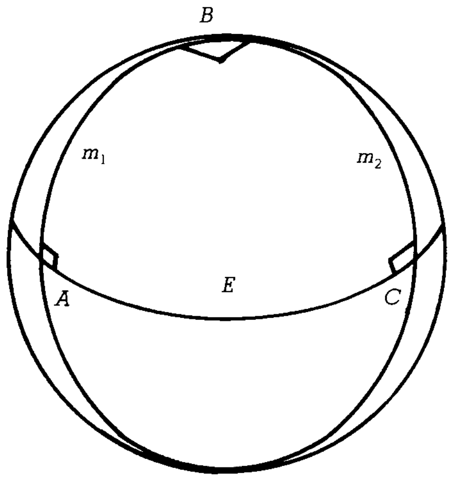

Figura 2

NOTA 2. a) AB, BC y AC son segmentos de las rectas m_1, m_2 y E, respectivamente.

b) AB, BC y AC se intersectan dos a dos en un punto; en consecuencia, $AB \cup BC \cup AC$ forma un triángulo con vértices en A, B, C.

c) AB, BC y AC son perpendiculares entre sí.

Registremos esta valiosa información, pongamos un punto y aparte, y pasemos a un tema apasionante.

3. Algo sobre métricas

Todos de una u otra manera hemos tenido contacto con la fórmula de la "distancia entre dos puntos". Lo usual es referirse a la distancia entre dos puntos de un plano; así, si el punto P_1 tiene como coordenadas (x_1, x_2) y el punto P_2 a (y_1, y_2), la distancia entre P_1 y P_2 está dada por

$$D(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

En general, si P_1 y P_2 pertenecen a $\mathscr{R}^n$, entonces

$$D(P_1\ P_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \text{ en donde}$$

$$P_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ y } P_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Surgen de manera inmediata dos preguntas: ¿Sólo es posible medir la distancia entre dos puntos de $\mathscr{R}^n$? ¿Esta forma de medir es única? Pues,

no y no

Toda función D que satisfaga las características de que:
Dado un conjunto A cualesquiera

i) D: $A \times A \rightarrow \mathscr{R}$

ii) $D(a, b) = 0$, si y sólo si $a = b$.

iii) $D(a, b) \geq 0$, para todos a, b elementos de A

iv) $D(a, b) = D(b, a)$ para todos a, b elementos de A

v) $D(a, b) \leq D(a, c) + D(c, b)$ para todos a, b, c elementos de A

recibe el nombre de *métrica* en A y podríamos decir que representa una forma de medir la distancia entre dos elementos de A.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2 Consideremos la métrica **d** definida en $\mathscr{R}^2$ como:

$\mathbf{d}(P, Q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$, en donde $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ son elementos de $\mathscr{R}^2$.

Sin mucha dificultad, el lector puede demostrar que **d** es una métrica. Analizaremos un caso, que aunque particular, nos mostrará también una agradable sorpresa.

Retomemos la Figura 1, pero ahora será la Figura 3.

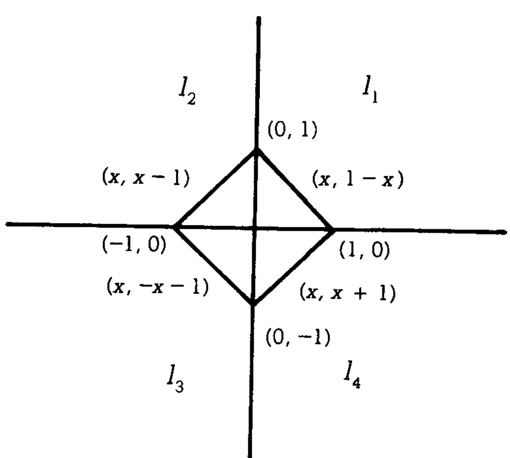

Figura 3

"Midamos" la distancia al origen de cualquier punto del rombo.

Caso 1 Sea P_1 un punto arbitrario en el lado l_1, entonces P_1 tiene coordenadas de la forma $(x, 1 - x)$ con $0 \leq x \leq 1$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}(P_1, O) &= \boldsymbol{d}[(x, 1-x), (0, 0)] \\ &= |x| + |1 - x| \quad \text{definición de } \boldsymbol{d} \\ &= x + 1 - x \quad \text{porque } 0 \leq x \leq 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

En consecuencia, la distancia al origen de cualquier punto del rombo sobre el lado l_1, es igual a 1.

Caso 2 Sea P_2 un punto cualquiera sobre el lado l_2 del rombo, entonces P_2 tiene coordenadas de la forma $(x, 1 + x)$ con $-1 \leq x \leq 0$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}(P_2, O) &= d[(x, 1 + x), (0, 0)] \\ &= |x| + |1 + x| \quad \text{definición de } \boldsymbol{d} \\ &= -x + 1 + x \quad \text{porque } -1 \leq x \leq 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, la distancia al origen de cualquier punto del rombo sobre el lado l_2, es 1.

Similarmente se obtiene que $\boldsymbol{d}(P_3, O) = \boldsymbol{d}(P_4, O) = 1$, para todo P_3 y P_4 elementos arbitrarios de los lados l_3 y l_4, respectivamente.

¿Ya sacó sus conclusiones? Bueno no olvide guardarlas, porque como "*no hay mal que dure cien años, ni cuerpo que los aguante*", ya nos estamos acercando al final.

4. Algo sobre cardinales infinitos

¿Cuántos números naturales hay? Contestar que muchos, o un número infinito, es tan ambiguo como decir que se tienen k años de edad.

Por definición, el cardinal de los números naturales se representa por **#N**, y es $\aleph$ (alef cero). El cardinal de los números reales es $\# \aleph = \aleph_1$.

$\aleph_0$ es el menor de los cardinales infinitos, y con base en la *hipótesis del continuo* le sigue $\aleph_1$. (Cabe aclarar que en la actualidad es igualmente plausible afirmar o negar esta hipótesis. El resultado es semejante a lo que sucede cuando se niega el "quinto postulado de Euclides": un vasto e interesante campo a estudiar por cada opción, sin contradicciones.) En realidad existe un número infinito de cardinales infinitos, pero para establecerlo, antes tenemos que mencionar algunos conceptos fundamentales.

Definición 2. Conjunto potencia

Sea A un conjunto. El *conjunto potencia* de A es la familia de conjuntos que contiene a todos los subconjuntos de A y se representa por 2^A.

Definición 3. Conjuntos equipotentes

Dos conjuntos A y B se llaman *equipotentes* ($A \sim B$), si existe una función f: $A \rightarrow B$ biyectiva.

NOTA 3. Si $A \sim B$, entonces $\#A = \#B$

Definición 4. Conjunto anterior

Se dice que un conjunto A es anterior a un conjunto $B (A \circ B)$, si A es equipotente a un subconjunto de B. Además se tiene que $\#A \leq B$.

NOTA 4. Si A es equipotente a un subconjunto propio de B, entonces se dice que A es estrictamente anterior a B, lo cual se representa por $A \,^{\circ}\!B$. Además se tiene que $\#A < B$.

Ahora sí, nos encontrarnos listos para recibir al

Teorema de Cantor

En todo conjunto A, se tiene que A es estrictamente anterior a $2A$.

NOTA 5. Por la Nota 4 se concluye directamente que $\#A < \#2^A$.

Obsérvese cómo el teorema de Cantor nos permite generar un número infinito de cardinales infinitos.

Otra de las muchas propiedades de los números cardinales es la siguiente:

Propiedad 1.

Sean A y B dos conjuntos ajenos, entonces $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.

Analicemos un ejemplo.

Ejemplo 3 Sea $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ y $P = \{\S, ç, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

Como $P = \{\S, ç\} \cup \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, por la Propiedad 1 tenemos que

$$\#P = \#\{\S, ç\} + \#\mathbf{N} = 2 + \mathscr{R}_0 \qquad (1)$$

Por otra parte, $\boldsymbol{N} \sim P$, ya que podemos definir una función f biyectiva de $\boldsymbol{N}$ a P.

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \S & \text{si } x = 1 \\ ç & \text{si } x = 2 \\ x - 2 & \text{Si } x \geq 3,\ x \text{ elemento de } \mathbf{N} \end{cases}$$

En consecuencia, $\#N = \#P$; es decir,

$$\#P = \aleph_0 \qquad \text{(II)}$$

Conclusión: $2 + \aleph_0 = \aleph_0$, por (I) y (II).

Bueno, el final ha llegado. ¿Se encuentra usted preparado para recibirlo? ¡Muy bien! cierre los oj. . . , ¡no, perdón!; dadas las circunstancias esto no es posible. Casi estropeo la emoción del momento. . . ¿Qué podremos hacer para mantenerla? ¡Ya sé! Imagine un eufórico grito de:

¡SORPRESA!

y empiece de inmediato a analizar la Tabla II, que no es otra cosa que la **Tabla** 1, con algunas "pequeñísimas" modificaciones.

A) $2 \times 3 \equiv 1$	VERDADERO	[Definición 1]
B) Existen triángulos con tres ángulos rectos	VERDADERO	[Nota 2]
C) La distancia al origen de cualquier punto del rombo es 1 (Fig. 1)	VERDADERO	[Ejemplo 2]
D) Existen números a y b tales que $a + b = a$, para $b \neq 0$	VERDADERO	[Ejemplo 3]

TABLA II

Conclusiones

Esperando que T.S. Elliot, dondequiera que se encuentre, no se moleste por ayudarme a concluir este escrito, me permito tomar de su obra *Little Gidding*, la siguiente "reflexión" que dice así (música maestro):

"No desistiremos de explorar,
y el final de nuestra exploración
será llegar a donde empezamos,
y conocer el lugar por primera vez".

La Matemática puede deleitarnos tanto como queramos, "*todo depende del cristal con que se mire*", y aunque es evidente que no tiene plumas, "*es gallo y dondequiera canta*".

Referencias.

STEWART, B. M. *Theory of numbers.* Macmillan Company, 1964.

GANS, David. *An introduction to non-Euclidean geometry*. Academic Press, 1973.

APOSTOL, Tom. *Análisis Matemático*. Reverté, S.A., 1979.

SUPPES, Patrick. *Introducción a la Lógica Matemática*. CECSA, 1978.