

# Una Visión General de la Didáctica de las Matemáticas en Francia\*

Mi propósito es presentar a ustedes una visión de conjunto de los trabajos de Didáctica de las Matemáticas que se realizan actualmente en Francia. No haré esta presentación desde un punto de vista teórico, sino desde el punto de vista del usuario, como yo, que además trabajo como profesora en un Instituto Universitario de Formación de Maestros (es decir, encargada de la formación inicial y continua de profesores de educación primaria).

Primeramente haré una breve referencia a la historia y los fundamentos de la Didáctica de las Matemáticas en Francia: En un segundo lugar, precisaré ciertos objetos de estudio de la didáctica, y posteriormente presentaré la resolución de problemas como fundamento del aprendizaje de las matemáticas.

## I. Historia y fundamentos de la Didáctica de las Matemáticas en Francia

La Didáctica de las Matemáticas es un campo científico reciente; nació en los años setenta en el contexto de la reforma de las llamadas "matemáticas modernas", y se desarrolló en el seno de diversas instituciones (IREM, INRP) y en ciertas universidades (París, Burdeos, Estrasburgo, y después en Lyon, Marsella y otras). Desde 1980, la realización de seminarios regulares y escuelas de verano permiten a los especialis-

tas confrontar sus puntos de vista, y diversas publicaciones difunden los trabajos que se realizan.

Como ciencia, que estudia los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos, particularmente en situación escolar, la didáctica se encuentra en el cruce de diferentes campos científicos en los cuales encuentra sus fundamentos.

—*Las adquisiciones de la psicología cognitiva.* En particular, ciertos aspectos teóricos de la epistemología genética sirven de hipótesis en lo que concierne a los procesos de aprendizaje. Se retiene en particular el hecho de que el *sujeto construye sus conocimientos* en una interacción constante con el objeto, y que el factor fundamental de desarrollo cognitivo es la equilibración —proceso dinámico de asimilación y acomodación, de desequilibración y reequilibración.

\* Conferencia dictada en la Universidad Pedagógica Nacional, en el Ajusco, en el mes de enero de 1991.

**Marie-Lise Peltier**

Instituto Universitario de Formación  
de Maestros, Ruan, Francia

Desde hace algunos años, los didactas toman también en cuenta los trabajos recientes sobre la memoria (desarrollados en relación con la teoría del procesamiento de la información).

—Desde un punto de vista *epistemológico*, uno de los aportes esenciales es sin duda la noción de obstáculo didáctico, tomada de la de obstáculo epistemológico, desarrollada por Bachelard en "La formación del espíritu científico".

Ciertos conocimientos culturales, incluso aprendidos en la escuela, se oponen duraderamente a construcciones conceptuales consideradas por el profesor (por ejemplo, el hecho de que todo entero tiene un sucesor, y si es no nulo, tiene un predecesor, obstaculiza la noción de densidad en D).

—Desde el punto de vista de los *aspectos sociales* del aprendizaje, se pueden citar los trabajos de psicología social de la escuela de Ginebra (Doise, Mugny, Perret, Clermont, Schaubert, Leoni, etc.), los cuales proporcionan información para analizar mejor el aprendizaje en situación escolar. Estos investigadores han mostrado que el trabajo colectivo y, más especialmente, *los conflictos cognitivos entre iguales* facilitan ciertas apropiaciones individuales (pues aun si el objetivo de la enseñanza es la apropiación individual de conocimientos, éstos se producen en la clase mediatizados por el hecho colectivo).

—Los aportes de la lingüística son también numerosos; ligados al aspecto lógico de las matemáticas, existen ahora en las relaciones conceptualización-formalización.

Los trabajos sobre la lectura permiten igualmente analizar ciertas dificultades en la resolución de problemas.

—Se pueden citar también trabajos de tipo *psicoanalítico* que tienen por objetivo estudiar desde un cierto punto de vista las representaciones que los maestros tienen de la matemática y de su enseñanza.

## II. Objetos de estudio de la Didáctica de las Matemáticas

Puesto que el objeto de la Didáctica de las Matemáticas es el estudio de los procesos de transmisión y adquisición de saberes dentro de un sistema institucional específico, su objetivo es entonces intervenir en el sistema educativo en forma benéfica, es decir, proponiendo condiciones para que el funcionamiento del sistema didáctico asegure en el niño la constitución de un saber viviente (susceptible de evolución) y funcional (que permita resolver problemas y plantear verdaderas interrogantes).

Para conducir su estudio, la didáctica se sitúa en un cuadro sistémico centrado en tres componentes fundamentales —el saber, el(o los) alumno(s), el profesor— y en las relaciones que se generan entre ellos. (Estos microsistemas se sitúan en una zona —la noósfera— que desempeña un papel de intermediario entre la sociedad y el sistema didáctico, en sentido estricto del término, al imponer un conjunto de restricciones a la tarea del profesor: programas, tiempos, conceptos acerca del papel de la escuela, selección, exámenes).

En relación con este sistema, la didáctica ha desarrollado conocimientos en dos direcciones esenciales:

—La puesta en evidencia de regularidades a nivel del funcionamiento cognitivo del sujeto en sus aprendizajes escolares.

—La construcción de un conjunto estructurado de instrumentos conceptuales que componen la "osamenta" de este nuevo campo conceptual.

Retomamos, para precisarlos, los tres polos que constituyen el sistema didáctico.

### o *El saber*

Se pueden distinguir diferentes saberes:

- el saber del sabio
- el saber del maestro
- el saber de los programas
- el saber que se convierte en objeto de enseñanza, tal como está en los manuales, y tal como es propuesto por el profesor
- el saber del alumno

La comunicación de un saber a un público dado supone la transformación de ese saber. Es la noción de transposición didáctica introducida por Y. Chevallard, proceso por el cual un elemento de un saber científico se convierte en un conocimiento a enseñar, y después, en un objeto de enseñanza.

La didáctica estudia esas transformaciones, las pérdidas sucesivas, las derivaciones eventuales (cambio de objetos). Por ejemplo:

conjuntos  $\rightarrow$  papas

— la búsqueda de ceros de una función de una variable  $\rightarrow$  identidades notables.

— la búsqueda de ceros de dos variables  $\rightarrow$  ecuaciones de rectas

Actualmente se realizan también investigaciones sobre los recortes efectuados en los saberes de los sabios con fines de enseñanza, y se estudia la influencia de tales recortes en la adquisición de conocimientos. Ciertos errores producidos por los estudiantes parecen en efecto debidos a recortes demasiado finos, los cuales hacen perder al estudiante el sentido del conocimiento enseñado, obstaculizando así toda ubicación por parte del estudiante.

Gerard Vergnaud introdujo la noción de campo conceptual: espacio de problemas donde el tratamiento implica conceptos o procedimientos de diferentes tipos, en estrecha conexión.

Por ejemplo: no parece oportuno separar la adquisición de la adición y la de la sustracción, ni aun construir a priori la sustracción como opuesta a la adición. Para poder realizar un análisis fino de las actuaciones de los alumnos, es necesario estudiar globalmen-

te las distintas clases de problemas aditivos, y tener en cuenta los factores semánticos subyacentes y el impacto de las formulaciones. Por ejemplo:

P1. Pablo tiene 9 canicas. Juega con sus compañeros y gana 7. ¿Cuántas canicas tiene Pablo ahora?

+7

5 ----- ? Problema del tipo medida— transformación medida (transformación positiva, búsqueda del estado final; resuelto por la mayoría de los niños de CP.

P2. Pablo acaba de perder 7 canicas. Le quedan 5. ¿Cuántas canicas tenía Paul?

-7

? ----- 5 Transformación negativa, que relaciona dos medidas, con búsqueda del estado inicial. Obstáculo didáctico: reversibilidad imposible en el tiempo. Resuelto solamente hacia los 8 años.

Por otra parte, los conceptos matemáticos pueden ser considerados desde dos puntos de vista complementarios: a) su carácter de instrumento al estudiar su funcionamiento en los diversos problemas que permiten resolver; b) su carácter de objetos, en tanto que objetos culturales que tienen un lugar reconocido en el edificio del saber matemático. Esta dialéctica instrumento-objeto, destacada por Régine Douady, tiene un papel muy importante en la construcción de situaciones de aprendizaje: un concepto desempeña seguido el papel de instrumento implícito en la resolución de un problema antes, de devenir en objeto de saber constituido. Los conceptos, además, pueden en general ser movilizados en diferentes dominios (geométrico, numérico o gráfico), lo que permitirá al maestro provocar desequilibrios cognitivos en los alumnos.

Por ejemplo, para ampliar la multiplicación a las fracciones, el problema planteado consistirá en buscar varios rectángulos de perímetro dado y en cal-

cular su área. Para tener muchos rectángulos los alumnos saldrán del campo de los enteros haciendo intervenir fracciones como  $1/2$ ,  $1/4$ . etc.

El problema del área será resuelto en el dominio geométrico, incluso gráfico, haciendo intervenir la propiedad de aditividad de medidas y la invariancia del área por recortado y pegado.

### ° *El alumno*

Como ya hemos dicho, desde el punto de vista de la apropiación individual de conocimientos, la didáctica se apoya esencialmente sobre las hipótesis piagetanas de *equilibración mayorante*.

El progreso en el conocimiento resulta de procesos dinámicos que hacen intervenir fenómenos de regulación: adaptación-asimilación y desequilibración-reequilibración. No hay acumulación progresiva de saberes, sino reorganización permanente de conocimientos; los nuevos saberes son integrados al saber anterior, aun a veces modificando este último.

Es necesario subrayar también el papel de la acción en la construcción de los conceptos. Se trata, por supuesto, de la actividad propia del niño que no se ejerce forzosamente mediante la manipulación de objetos materiales, sino de una acción finalizada, problematizada, que supone una dialéctica pensamiento-acción, muy diferente a una simple manipulación guiada, orientada con frecuencia a una simple tarea de constatación.

En una palabra, la actividad matemática consiste con frecuencia en la elaboración de una estrategia, de un procedimiento que permita anticipar el resultado de una acción aún no realizada —o no actual— sobre la cual se dispone de información. El rol de la anticipación es entonces fundamental.

La Didáctica de las Matemáticas se dedica a estudiar también las concepciones del sujeto que aprende. Por concepción del alumno entendemos:

- la clase de problemas que dan sentido a un concepto para el niño;
- el conjunto de significantes que es capaz de asociar (imagen mental, expresión simbólica);
- los instrumentos, teoremas, algoritmos, que es capaz de poner en marcha.

Pero aun si esos trabajos son muy próximos a los de la psicología, se debe señalar una diferencia sensible entre esos dos tipos de investigaciones: para el didacta el estudio de las concepciones del sujeto no son un fin en sí mismas. Lo que interesa es *el estudio de las condiciones en las cuales se construye el conocimiento* con el fin de optimizarlas, de controlarlas, de reproducirlas en situación escolar. Las concepciones del sujeto constituyen una especie de preludeo fundamental.

Es frecuente que por un análisis fino de los errores producidos, el maestro puede forjar hipótesis sobre las concepciones de los alumnos, puesto que un error no es una ausencia de conocimiento, sino el testimonio de un conocimiento erróneo que tuvo su ámbito de validez. Por ejemplo, el cálculo de una sustracción a partir de cálculos de faltantes, o la adición de cantidades decimales sin retener (cifras de llevar) (decimales considerados como parejas de enteros).

Hemos visto igualmente, que la apropiación individual se ha facilitado con frecuencia por el *conflicto socio-cognitivo*. Es al formular sus procedimientos, al defenderlos, al justificarlos, que el niño afinará su concepción de la noción considerada en el problema.

Es en una situación de comunicación entre pares, que la noción de *prueba* aparecerá necesariamente, y es ahí igualmente donde se verán aparecer en los niños diferentes niveles de prueba:

- pruebas pragmáticas, fundadas sobre la acción, sobre la experiencia;
- pruebas intelectuales fundadas sobre un razonamiento.

Es importante, en fin, tomar en cuenta la relación del alumno con el saber, la representación que él se hace acerca de la escuela, de las matemáticas: su implicación en el proyecto de enseñanza que es realizado por él.

### ◦ *El profesor*

Ciertas investigaciones tienen como objeto de estudio las representaciones que el profesor tiene de su disciplina y de la enseñanza, y la influencia que ellas ejercen sobre la elección de estrategias de aprendizaje que pone en marcha.

La didáctica se interesa igualmente por las representaciones que el profesor tiene de las concepciones del alumno; por la interpretación que hace de ellas; por la forma según la cual las tiene en cuenta para construir su proyecto de enseñanza.

Una descripción minuciosa del contrato explícito —o más frecuentemente, implícito— que rige el funcionamiento de la clase y de su componente didáctico, el cual determina las expectativas recíprocas del maestro y del alumno en términos de saber, así como lo que cada miembro tendrá a su cargo manejar, permite establecer algunas grandes clases de estrategias de aprendizaje:

— el modelo llamado "normativo", centrado sobre el contenido; en él se trata de dar, de comunicar un saber, a los alumnos:

- el maestro muestra las nociones, las introduce, proporciona los ejemplos;
- el alumno escucha, aprende, imita, se entrena, aplica;
- el saber es dado de manera acabada, ya construido;
- los problemas son presentados al final del recorrido, con fines de evaluación. Son los métodos llamados dogmáticos o magisteriales.

— el modelo llamado "incitativo" centrado en el niño; lo primero que solicita es conocer los intereses de los niños, sus necesidades, su entorno:

- el maestro escucha al alumno, suscita su curiosidad, le ayuda a utilizar fuentes de información, responde a sus preguntas;
- el alumno busca, organiza, estudia trabajando de manera autónoma en un fichero;
- el saber está ligado a las necesidades de la vida, del entorno (su estructura propia pasa a segundo plano). El problema es un móvil del aprendizaje, es concreto, ocasional.

— el modelo llamado "aproximativo", centrado en la construcción del saber por el alumno; se propone partir de concepciones existentes en el niño y ponerlas a prueba:

- el maestro propone y organiza una serie de situaciones jugando con diversas restricciones (variables didácticas), organiza las diferentes fases (investigación, formulación, validación, institucionalización); maneja la comunicación en la clase; da, llegado el momento, elementos convencionales del saber;
- el alumno intenta, busca, hace hipótesis, propone soluciones, las confronta con sus compañeros, las defiende. . .
- el saber es considerado con su propia lógica;
- el problema es medio de aprendizaje.

Para poner en marcha esta última estrategia, el maestro tendrá que fabricar problemas que permitan a cada alumno construir su saber en interacción con los otros compañeros.

Es evidente que ningún profesor utiliza exclusivamente un modelo, pero el estudio de las prácticas existentes mues-

tran que a pesar de todo, cada uno escoge, más o menos conscientemente, alguno de ellos.

### III. El problema como fundamento y medio de aprendizaje

Desde esta perspectiva, se trata de que el maestro organice una serie de secuencias que constituyan una situación global de aprendizaje.

#### A. Esquema sucinto de progresión sobre una nueva noción

1. *Una situación-problema*: situación didáctica fundamental que pone en juego los conocimientos como instrumento implícito.

2. *Situaciones y ejercicios de entrenamiento, de familiarización*, donde el conocimiento interviene como instrumento explícito de resolución; donde el conocimiento se sitúa en relación con los conocimientos anteriores.

Esta fase permite también una descontextualización progresiva en relación con la situación didáctica fundamental.

3. *Una síntesis*, en el curso de la cual el conocimiento es institucionalizado como nuevo objeto de saber (introducción eventual del lenguaje convencional) y situado en relación con los saberes anteriores.

4. *Problemas que permitan al alumno reutilizar un conjunto de nociones*. Tales problemas pueden eventualmente tener la función de una evaluación.

#### B. Las situaciones fundamentales

1. *Situaciones didácticas*. Por supuesto, es muy difícil construir buenas situaciones didácticas. Un cierto número de condiciones deben ser verificadas para que el objetivo de aprendizaje pueda ser logrado.

- la actividad propuesta como punto de partida, debe presentar un verdadero problema para los alumnos, pero a la vez ser comprendido por ellos; es decir, los niños deben poder pensar y planear la respuesta al problema;

- debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores (para que pueda introducirse en el problema);

- pero debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a hacer evolucionar sus conocimientos anteriores, a cuestionarlos, a elaborar nuevos conocimientos;

- debe también, en lo posible, contener su propia validación; es decir, el alumno debe poder por sí mismo —o confrontando con los otros alumnos— controlar su solución, decidir la validez de su respuesta;

- en síntesis, el conocimiento previsto debe ser el más adaptado para resolver el problema considerado (desde el punto de vista del alumno).

2. *Ingeniería didáctica*. Numerosos trabajos de didáctica se centran sobre esta tarea (se llama "ingeniería didáctica" a las producciones de esas investigaciones). Se trata de propuestas de situaciones de aprendizaje destinadas a asegurar de manera controlada la emergencia de conceptos matemáticos en el contexto escolar.

Tales situaciones abarcan varias fases descritas por Guy Brousseau:

- *fase de investigación o de acción* (individual o en grupo), donde el alumno actúa, anticipa, formula hipótesis, las prueba;

- *fase de formulación*, confrontación de problemas, puesta a prueba

(eventualmente un regreso al trabajo individual con restricciones diferentes). Destaca aquí el papel de las variables didácticas —elementos que el profesor puede manejar y que tienen incidencia en los procedimientos que los alumnos ponen en marcha— para que cada uno ponga a prueba sus propuestas y las de los otros; las pruebe, se las apropie;

*una fase de institucionalización* donde el nuevo conocimiento es enfocado por primera vez como instrumento explícito que permite la resolución del problema.

Estas situaciones deben inscribirse en un proyecto de aprendizaje global, y deben tomar en cuenta las concepciones iniciales de los alumnos sobre las nociones consideradas. Su objetivo, metodológico o cognitivo, debe estar claro.

La elección del contexto es igualmente importante e introduce algunos señalamientos. Si bien las motivaciones ligadas a la vida corriente, al entorno, tienen un cierto interés, los didactas prefieren una motivación interna, proporcionada por la actividad misma: juego, dificultad que se quiere resolver etc. a fin de que el problema presente un reto real para todos los alumnos, y que sea percibido como un déficit intelectual.

**3. Preguntas abiertas.** Aquí se plantean numerosas preguntas:

De parte del alumno:

- ¿qué percepción tiene de lo que espera el maestro?
- ¿qué concepto tiene de lo que es un problema?
- ¿cuál es el papel de la memoria en la resolución de un problema?
- ¿cómo se efectúa la resolución por el alumno, por cuáles etapas pasa, qué controles utiliza?
- ¿qué tipo de dificultades encuentra?

De parte del maestro:

- ¿cómo devuelve el problema a los alumnos?
- ¿cómo administra el tiempo?
- ¿cómo maneja la heterogeneidad del grupo?
- ¿cómo evalúa las actuaciones y resultados de cada uno?

Desde el punto de vista general:

- ¿las situaciones didácticas construidas por los investigadores son reproducibles?
- ¿no hay riesgo de que se desvíe el rumbo cuando sean difundidas? ¿Qué precauciones habría que tomar para evitar esas desviaciones?

Estas son cuestiones a las que los investigadores intentan dar algunos elementos de respuesta, pero el tema es vasto y queda mucho por hacer.

Para terminar, quisiera decir que intenté presentar el espíritu de este nuevo campo de investigación. No hay que esperar que la didáctica resuelva milagrosamente todos los problemas, pero se puede decir que lo que se ha logrado, da ya a los maestros medios nuevos de comprender mejor un cierto número de fenómenos estrechamente ligados a los contenidos curriculares. Lo que hasta hoy sabemos permite también interpretar mejor el comportamiento de los alumnos y, sobre todo, sus errores.

Los trabajos de ingeniería didáctica ofrecen a los maestros medios para organizar mejor la enseñanza, para justificar sus elecciones, para rechazar algunas, y de fabricar situaciones que permitan a los alumnos construir su propio saber puesto que, como dice Bachelard:

*"Para un espíritu científico, todo conocimiento es una respuesta a una pregunta. Si no hay preguntas, no puede haber conocimiento científico. Nada está dado. Todo es construido".*

**(La formación del espíritu científico).**