



## **Estrategia de enseñanza para favorecer la comprensión del valor posicional**

Alejandro Angulo Escamilla

Universidad de la Sabana, Bogotá, Colombia, [henry.angulo@unisabana.edu.co](mailto:henry.angulo@unisabana.edu.co)

Natalia Pulido Peñaloza

Colegio San Carlos IED, Bogotá, Colombia, [natyprincess13@hotmail.com](mailto:natyprincess13@hotmail.com)

Esperanza Molano Rodríguez

Colegio Restrepo Millán IED, Bogotá, Colombia, [emolanor@yahoo.com](mailto:emolanor@yahoo.com)

*Fecha de recepción: 23-07-2016*

*Fecha de aceptación: 15-05-2017*

*Fecha de publicación: 19-11-2017*

---

### **RESUMEN**

Se reporta un estudio en el cual se propone una estrategia de enseñanza para hacer frente y, eventualmente, superar las dificultades que presentan estudiantes de 2º de educación básica primaria (5–7 años) de dos colegios públicos de Bogotá (Colombia), en relación con el concepto de valor posicional. A partir de un análisis del contexto de aula de ambos grupos y de la revisión de literatura relacionada, se diseñó, implementó y evaluó una unidad didáctica bajo el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión, con el propósito de que los estudiantes avanzaran en la comprensión del concepto de valor posicional. El estudio se realizó desde un enfoque cualitativo de alcance descriptivo, utilizando el diseño metodológico de investigación–acción. Los hallazgos evidencian que los estudiantes avanzaron en la comprensión del concepto de valor posicional, a través de los desempeños de comprensión propuestos en la unidad didáctica.

**Palabras clave:** Educación matemática infantil, valor posicional, estrategia de enseñanza, Enseñanza para la Comprensión.

### **Understanding the concept of place value: A teaching strategy**

#### **ABSTRACT**

This paper reports a study that proposes an alternative teaching strategy to cope with and eventually overcome some difficulties presented by second graders (ages 5-7) at two public Elementary schools in Bogota (Colombia). Based on the analysis of the classroom contexts in both groups and on a literary review on the field, a teaching unit, founded on the Teaching for Understanding framework, was designed, implemented and evaluated. This strategy intended to enhance students' understanding of the concept of place value. This was a qualitative-descriptive study framed within the Action-Research design. The findings show that students made progress in understanding the concept of place value through the activities proposed in the teaching unit.

**Key words:** Elementary school mathematics, place value, teaching strategy, teaching for Understanding.

## 1. Introducción

En la educación de los niños de escuela primaria, gran parte del tiempo que se invierte en la enseñanza de la matemática, es dedicado al Sistema Decimal de Numeración (SDN) y al concepto de valor posicional, ya que se cree que su comprensión favorece el desarrollo del sentido numérico, las destrezas de cálculo mental y estimación, y permite comprender las operaciones con números de varios dígitos.

En este estudio reconocemos que efectivamente el valor posicional ocupa un lugar trascendental en la educación matemática en la infancia, y que debe ser abordado a lo largo de toda la escolaridad; dado que su comprensión es necesaria para entender muchas de las ideas matemáticas, en particular las asociadas al SDN, que ha sido uno de los sistemas más comunes y utilizados en las matemáticas de diferentes culturas; así, se puede decir que el concepto de valor posicional es básico para la construcción del SDN (Castaño, 2008). En esa línea, diversos trabajos, como los de Alsina (2016), Andrade y Valdemoros (2014), Ramírez (2011) o Salazar y Vivas (2013), indican que el conocimiento del SDN es fundamental para comprender ideas matemáticas contenidas en los programas de estudio en la educación matemática básica primaria y secundaria, por ejemplo, para interpretar y representar números racionales e irracionales, así como realizar operaciones básicas y solucionar problemas haciendo uso de los mismos.

A pesar de la relevancia del valor posicional, diversidad de estudios realizados desde hace varias décadas (Andrade y Valdemoros, 2014; Baroody, 1990; Baturo, 2002; Chandler y Kamii, 2009; Fuson, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Olivier, Carpenter y Fennema, 1997; Kamii y Joseph, 1988), indican que su dominio o comprensión, representa para los estudiantes un trabajo arduo, y que a pesar de los esfuerzos hechos, se puede encontrar que en los últimos años de educación primaria, persiste un porcentaje importante de niños que cometen errores al escribir los números. Estas afirmaciones concuerdan con las observaciones preliminares que realizamos en las aulas de clase de dos colegios, ya que los estudiantes evidenciaron dificultades en la lectura y escritura de los números, en el reconocimiento del valor de una cifra de acuerdo a la posición que ocupa en un numeral, en el cambio de una decena a otra, en representar números de dos o más cifras, particularmente cuando el número tiene ceros intermedios, en el conteo por unidades compuestas, en el establecimiento de relaciones de orden, seriaciones y secuencias y en las operaciones de adición y sustracción con números de varios dígitos

A partir de estas dificultades surgieron inquietudes acerca de estrategias pedagógicas que pudieran ayudar a superarlas, especialmente aquellas referidas al aprendizaje del concepto de valor posicional, que nos condujeron a indagar sobre los efectos que pudiera tener la implementación de una estrategia de enseñanza, sobre el desarrollo de la comprensión del concepto de valor posicional en el contexto de la resolución de problemas.

Nos propusimos el objetivo de diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica, desde el marco de la enseñanza para la comprensión, que favoreciera el aprendizaje del valor posicional, en la resolución de situaciones problema por estudiantes de segundo de primaria de dos colegios públicos de la ciudad de Bogotá (Colombia). Para lograrlo, se utilizó un enfoque cualitativo de alcance descriptivo y se asumió un diseño de investigación-acción. Se pretendía recoger información específica y mostrar con precisión los niveles de comprensión que desarrollan los estudiantes sobre el concepto de valor posicional al implementar la unidad didáctica. En este orden de ideas, el estudio se fundamentó en una revisión teórica que permitió establecer que la comprensión del concepto de valor posicional es un asunto complejo y fundamental para desarrollar el pensamiento numérico de los estudiantes de educación básica primaria.

## 2. La Comprensión del Concepto de Valor Posicional

En el ámbito de la educación matemática de la primera infancia, la NRCNA (2015) identifica dos áreas fundamentales: el número, y la geometría y la medición. En el área del número, una idea clave es que "Podemos representar números de contar arbitrariamente grandes de una manera eficiente y sistemática, mediante el notable sistema decimal de numeración (de base 10)" NRCNA (2015, p. 32), el cual permite usar los números para comparar cantidades, y junto con las operaciones de adición y sustracción, permite describir cómo se relacionan las cantidades antes o después de combinarlas, y establecer cómo se relacionan las partes y el todo. Esta postura frente a la centralidad e importancia de la comprensión del concepto valor posicional se ve reafirmada en el ámbito nacional del presente estudio, en los documentos oficiales del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998; MEN, 2006), en los cuales se asume el concepto de valor posicional "asociado a la acción de contar con unidades de conteo simples o complejas y con la reunión, la separación, la repetición y la repartición de cantidades discretas." (MEN, 2006, p. 59).

Diversidad de autores (Gallego y Uzuriaga, 2015; Terigi y Wolman, 2007) coinciden en considerar que las dificultades que presentan los estudiantes, en relación con el valor posicional, se pueden ver acentuadas por estrategias pedagógicas que utilizan algunos docentes en el aula, donde en ocasiones buscan estandarizar y homogenizar a través del uso de materiales que puedan manipular los estudiantes, pero sin un fundamento pedagógico y didáctico claramente establecido; o bien, porque enseñan el valor posicional como el lugar en el que se deben ubicar las unidades, decenas y centenas, pero no como el valor que adquieren las cifras de acuerdo a su posición relativa; razones por las cuales los niños presentan dificultades para una comprensión del SDN que les permita desenvolverse en la resolución de operaciones y problemas.

Estas dificultades, que influyen notablemente sobre el aprendizaje de las matemáticas, ponen de presente la necesidad de que el profesor propicie que el concepto de valor posicional se incorpore a las estructuras cognitivas de los estudiantes, mediante el uso de representaciones concretas, pictóricas o simbólicas, en la resolución de problemas; como sugieren los trabajos de Ramírez y De Castro (2012), y Ramírez y De Castro (2014), quienes utilizaron la resolución de problemas para introducir algunos aspectos del SDN en el primer curso de educación primaria, y encontraron que "la resolución de problemas favorece la comprensión de las relaciones que se dan en las cantidades involucradas en las operaciones aritméticas" (Ramírez y De Castro, 2012, p. 97).

Ramírez y De Castro (2012) también señalan que las estrategias que utilizan los niños van evolucionando, y que el agrupamiento simple se puede observar en las estrategias de los niños, al plantearles problemas de estructura aditiva o multiplicativa. Además de esta perspectiva sobre la resolución de problemas, en relación con la comprensión del concepto de valor posicional, un hallazgo del mencionado trabajo se considera trascendental en este estudio, particularmente en el diseño de la Unidad Didáctica: "en el intento de comunicar por escrito las soluciones y las estrategias, se ven reflejados los avances y dificultades para comprender y expresar adecuadamente el valor posicional de las cifras." (p. 107). Por ello, de manera intencionada en las actividades diseñadas se busca proponer situaciones o preguntas a los estudiantes en las cuales necesiten expresar cantidades.

Ese replanteamiento de la práctica docente desde la resolución de problemas, de manera que los estudiantes se sintieran motivados e interesados en comprender el valor posicional y comunicar sus comprensiones, significó un gran reto para las profesoras-autoras de este estudio, dada su formación inicial en dominios diferentes, aunque no ajenos, a la educación matemática. Al respecto, los trabajos de Fuson et al., (1997) y Thanheiser (2009) jugaron un papel importante. El primero porque presenta un marco conceptual sobre las estructuras que los niños construyen para los números de varios dígitos, y el segundo porque, con base en ese mismo marco conceptual, explora los conocimientos que necesita el profesor de matemáticas para la enseñanza del valor posicional.

Consideramos necesario que el profesor en su trabajo de aula lleve a los estudiantes a comprender el valor posicional de las cifras en una expresión numérica, en el contexto de la resolución de problemas de estructura aditiva o multiplicativa (Castaño, 2008), y que potencie la capacidad de composición y descomposición aditiva (Zúñiga, 2015) y multiplicativa, requeridas en la comprensión de los significados de las expresiones numéricas. Esto lleva a que los estudiantes establezcan relaciones y piensen de manera crítica por sí mismos, en lugar de seguir reglas o algoritmos que puedan limitar su actividad mental o el desarrollo de estrategias (Salazar y Vivas, 2013). En ese sentido, estamos de acuerdo con el MEN (2006) frente a que: "Un acompañamiento pedagógico paciente y progresivo de los estudiantes puede lograr que la gran mayoría de ellos logre la proeza de recorrer doce milenios de historia del pensamiento numérico en solo doce años de escolaridad" (p. 61)

Precisamente desde ese enfoque de acompañamiento progresivo, y dado el propósito investigativo de favorecer la comprensión del valor posicional y dar cuenta del avance de los estudiantes, se consideraron en la estructuración del marco conceptual de este estudio, aquellos trabajos teóricos o empíricos, que asumen la comprensión del valor posicional y del SDN en términos del desarrollo gradual de habilidades, y de la construcción progresiva de unidades (simples o compuestas) para incrementar la flexibilidad en el *conteo*, en la *realización de particiones*, en la *agrupación* y en la *comparación* de cantidades; constructos que desde la investigación en educación matemática (Alba y Quintero; 2016; Angulo y Herrera, 2009; Baturo, 2002; Bruno y Noda, 2014; Chandler y Kamii, 2009; Fischer, 1990; Fuson, Carroll y Drucek, 2000; Fuson et al, 1997; Kamii y Joseph, 1988; Salazar y Vivas, 2013; Zúñiga, 2015) han mostrado ser esenciales para analizar la enseñanza y el aprendizaje del valor posicional.

## **2.1. Niveles de comprensión de la Base 10**

El trabajo de Kamii y Joseph (1988) muestra la importancia que tiene para los estudiantes la comprensión del verdadero significado del valor posicional: que reconozcan que detrás de cada cifra numérica se encuentra involucrado un sistema posicional, el cual hace dar sentido a la construcción aritmética de los números; y que un sentido de derecha a izquierda en un mismo dígito puede tener o representar diferentes valores con respecto a la base numérica, usualmente la base 10, (unidades, decenas, centenas,...). Como lo sustentan Fuson et al. (1997), el desarrollo de esas comprensiones requiere que los niños construyan estructuras conceptuales, que les permiten relacionar los nombres de los números, con las representaciones escritas y con las cantidades; tales estructuras se asumen como concepciones de los números de dos dígitos: *unitaria multidígito*, *decenas y unidades*, *decenas y unidades secuenciadas*, *decenas y unidades separadas*, y la concepción integrada *decenas y unidades secuenciadas-separadas*.

Se asume que para que el estudiante comprenda la base 10, es preciso que progrese en el uso de las concepciones, desde la unitaria, hasta el sistema de decenas y unidades secuenciadas-separadas (Fuson et al., 1997). Si las concepciones no se consolidan lo suficiente, no sirven de base a las siguientes; es por esta razón que resulta imposible para algunos niños de primer grado comprender el valor de posición (Chandler y Kamii, 2009; Kamii y Joseph, 1988). Por ello, consideramos en este estudio, que al asumir los tres niveles de desarrollo de la base 10 descritos por Silva (2005), quien se basó en el trabajo de Wright, Stanger, Stafford, y Martland (2002), podremos dar cuenta del avance de los estudiantes en la comprensión de la decena y la base 10. Tales niveles son:

*Nivel 1. Concepto inicial de Decena:* El estudiante no ve la decena como una unidad (ni compuesta, ni simple). Coincidiendo con la concepción unitaria, el estudiante se centra en los elementos individuales que forman la decena.

*Nivel 2. Concepto intermedio de decena:* El estudiante comprende la decena como una unidad compuesta por unidades simples, pero depende de representaciones para las unidades compuestas. Puede realizar operaciones de suma y resta dependiendo de representaciones concretas, como por ejemplo las que realiza al usar los dedos, y no logra aún una representación escrita simbólicamente.

*Nivel 3. Concepto experto de decena:* El estudiante ha adquirido una comprensión de la decena, puede realizar operaciones de suma y resta, y utiliza representaciones simbólicas.

## 2.2. Habilidades asociadas a la adquisición y desarrollo del concepto de valor posicional

Diversos trabajos consultados (Baturó, 2002; Browning y Beauford, 2012; Bruno y Noda, 2014; Horne y Livy, 2006; Thomas y Tagg, 2005; Salazar y Vivas, 2013; Young-Loveridge, 1999) que abordan la enseñanza y el aprendizaje del concepto del valor posicional en la educación básica primaria, nos remitieron al trabajo de Jones, Thornton, Putt, Hill, Mogill, Rich y Van Zoest (1996), quienes observaron que la comprensión del concepto de valor posicional requiere el desarrollo de cuatro habilidades: *contar, hacer particiones, agrupar y relacionar números*. Dado que nuestro propósito fue favorecer la comprensión del valor posicional, consideramos, analizamos y utilizamos las cuatro habilidades mencionadas, y los niveles que describen su desarrollo, para rastrear, trazar, o evaluar la comprensión del valor posicional a lo largo de la implementación de la unidad didáctica diseñada.

A continuación, se presenta una explicación de cada habilidad y se establecen los descriptores en cada nivel que posteriormente se usan para el análisis de los resultados.

*Habilidad de Conteo:* "Los niños desarrollan una comprensión informal pero fundamental de las operaciones y del concepto de número a partir de las habilidades para contar" (Angulo y Herrera, 2009, p. 110). En ese sentido, se asume que las estrategias de conteo son la base para la adquisición y desarrollo del concepto de valor posicional, ya que se requiere pasar de usar como *unidades de conteo* las unidades (1, 2, 3, ...), a usar las decenas o centenas como unidades iterables (1 decena, 2 decenas, ...), para finalmente usar una estrategia de conteo coordinando unidades, decenas, centenas, ..., en el uso flexible y comprensivo del SDN (Jones et al. 1996)

*Habilidad de Hacer Particiones:* La comprensión del valor posicional requiere que el estudiante sea capaz de representar un número como la composición de otros. En un nivel inicial la partición se puede generar en forma canónica (en unidades y decenas), pero una comprensión esencial requiere particiones o descomposiciones no estándar. En relación con las estrategias de conteo, la partición consiste en otorgar la categoría de contado o no contado a los objetos, formando dos partes del conjunto de objetos que se cuentan. Usualmente los niños realizan la partición señalando los objetos, agrupándolos separadamente o bien a través de la memoria visual. Cuando no se dispone de material concreto se requiere de un nivel de abstracción mayor para establecer la relación parte-parte-todo (Fischer, 1990), el cual está asociado al avance en la comprensión del concepto de valor posicional.

*Habilidad de Agrupamiento:* La habilidad para agrupar objetos y representar las agrupaciones realizadas numéricamente, es fundamental para la comprensión del valor posicional; de acuerdo con Baroody (1990), se debe iniciar con agrupamientos de números de dos dígitos usando material concreto, para pasar luego a cantidades menos tangibles; sin embargo, una dificultad señalada por Jones et al. (1996) al respecto, tiene que ver con la percepción de utilidad por parte de los estudiantes al realizar los agrupamientos, y sobre la toma de decisión para hacerlos. Se requiere que los niños no solo hagan los agrupamientos para contar por unidades, sino que hagan los agrupamientos (grupos de 3, 5, 10, 12, 100, etc.) para contar usando otras unidades de conteo, y, más allá de eso, que decidan y vean la utilidad de realizarlos en la solución de un problema.

*Habilidad de relacionar números:* El conjunto de números naturales es ordenado, es decir, dados dos naturales cualesquiera diferentes, uno de ellos es menor que el otro. Sin embargo, la comparación de magnitudes no se realiza solo linealmente sobre la secuencia numérica, sino que, especialmente para números de varios dígitos, se requiere hacer la comparación por la unidad de agrupamiento (decenas, centenas, ...), de ahí que el establecimiento de relaciones (de orden) entre los números, sea fundamental en una comprensión esencial del valor posicional.

A partir de estas cuatro habilidades, Jones et al. (1996) diseñaron y validaron un marco para la enseñanza y evaluación del sentido numérico "*multidígito*"; la perspectiva que se presenta aquí como modelo teórico del desarrollo de la comprensión del valor posicional, es una adaptación de la presentada en Jones et al. (1996, p. 313).

Tabla 1. Matriz de las habilidades asociadas a la adquisición y desarrollo del concepto de valor posicional

Habilidad/ Nivel	Nivel 1 Previo al valor posicional	Nivel 2 Inicio del valor posicional	Nivel 3 Desarrollo del valor posicional	Nivel 4 Extensión del Valor posicional	Nivel 5 Esencia del Valor posicional
Conteo	El estudiante puede contar, de uno en uno, a partir de la cantidad dada. También puede contar informalmente de diez en diez.	El estudiante es capaz de contar decenas como si fueran unidades sencillas (Diez, veinte, treinta, etc.). Formar y contar decenas y unidades simples. Además, puede contar, cuando se le presentan por separado, decenas y unidades.	El estudiante es capaz de contar progresiva o regresivamente para sumar o restar mentalmente.	El estudiante es capaz de contar progresivamente ("contar desde") usando unidades decenas y centenas; usa decenas para resolver sumas mentalmente.	El estudiante cuenta progresiva o regresivamente usando centenas, decenas y unidades para sumar o restar mentalmente.
Partición	El estudiante es capaz de formar de diferentes maneras números como el "cinco", el "ocho" o el "diez".	El estudiante puede formar de diferentes maneras números de dos dígitos, sobre todo en agrupaciones de decenas y unidades. También hace partición de una centena en decenas.	El estudiante forma números de diferentes formas (canónicas o no), usualmente menores que cien. También puede determinar lo que le falta a una cantidad en comparación con otra.	El estudiante forma números de varios dígitos (hasta el mil) de diferentes maneras (Canónica o no canónica); también determina lo que le falta a una cantidad de tres dígitos en comparación con otra.	El estudiante forma números de varios dígitos, incluso mayores que 1000, de diferentes formas (canónicas o no canónicas).
Agrupamiento	El estudiante puede estimar el número de objetos en un grupo utilizando el 10 y el 5 como referencias, contar de cinco en cinco o de diez en diez, y hacer agrupamientos en colecciones para contar fácil y rápidamente.	El estudiante estima el número de objetos en un grupo usando una unidad apropiada; recurre al conteo para corroborar si su estimación es correcta, y agrupa para facilitar la verificación.	El estudiante puede determinar si la suma de dos números está dentro del rango de alguna decena (Ej. Si la suma $18 + 19$ está dentro de la decena del treinta).	El estudiante puede determinar si la suma o diferencia de dos números, de dos o tres dígitos, es mayor o menor que otro número. También determina, sin usar material concreto, cuántas unidades se forman con una combinación de decenas y unidades. (Ej. 23 decenas y 15 unidades son 245 unidades).	El estudiante puede determinar si la suma o diferencia de dos números, de dos o tres dígitos, es mayor o menor que otro número. Asimismo, encuentra, sin usar material concreto, la cantidad de unidades que se forman con una combinación dada de centenas, decenas y unidades. (Incluso si no es canónica.)
Relaciones entre números	El estudiante determina si un número (entre el 0 y el 10) es mayor o menor que 5 o 10, y también qué tan mayor o menor es ("mucho" o "poco").	El estudiante ordena números de dos dígitos por decenas (establece relaciones "es mayor que" y "es menor que" Ej. $35 > 25$ , porque 3 decenas $> 2$ decenas) o entre decenas (Ej. $35 < 37$ ).	El estudiante ordena números de dos dígitos (establece relaciones de orden); establece la relación correcta cuando se invierte el orden de los dígitos del numeral. (Ej. $35 < 53$ )	El estudiante ordena números de varios dígitos ( $< 1000$ ), incluso aquellos formados al intercambiar los dígitos.	El estudiante ordena números de varios dígitos y determina cuál de ellos se encuentra más cerca de otro.

Adaptada de Jones et al. (1996, p. 313)

Al leer la anterior matriz analítica por filas, se consigue una descripción del desarrollo de cada habilidad; entretanto, un análisis por columnas permite hacer las siguientes descripciones de la comprensión del valor posicional en cada nivel.

*Nivel 1. Previo al valor posicional:* En este nivel los estudiantes piensan en términos de unidades simples, por ello sus estrategias de conteo no coordinan el uso de decenas y unidades. No perciben la necesidad de formar grupos ni de hacer diferentes particiones. Además, en la comparación de magnitudes no usan relaciones de orden o representaciones de las mismas, se limitan al orden lineal en la secuencia de conteo.

*Nivel 2. Inicio del valor posicional:* Los estudiantes comienzan a utilizar la decena como unidad compuesta, empiezan a pensar en términos de grupos y a ver la utilidad de realizarlos para hacer más eficientes sus estrategias de conteo. Además, pueden hacer particiones en decenas y unidades que les permiten comparar números de dos dígitos usando como referente la decena.

*Nivel 3. Desarrollo del valor posicional:* De forma general, los estudiantes en este nivel son capaces de operar con números de dos dígitos, conceptualizando las decenas como unidades compuestas que pueden ser descompuestas o recompuestas en (y por) unidades simples. Por ello, en sus estrategias de conteo hacen uso coordinado de unidades simples y compuestas; este pensamiento en términos de unidades compuestas les permite hacer particiones adecuadas para resolver problemas de comparación, en particular, son capaces de establecer relaciones parte-parte-todo, necesarias para resolver los problemas verbales de estructura aditiva de comparación o igualación (Angulo y Herrera, 2009); esas relaciones no son características de los niveles anteriores. Así mismo, la habilidad de hacer particiones de dos números de dos dígitos para comparar simultáneamente las decenas y las unidades, solo empieza a exhibirse en este nivel.

*Nivel 4. Extensión del valor posicional:* Las habilidades del nivel anterior se extienden al conceptualizar la centena como unidad compuesta por 100 unidades, que puede tratarse como unidad de conteo. En este nivel, los estudiantes usan coordinadamente centenas-unidades o decenas-unidades en sus estrategias de conteo progresivo; sin embargo, aunque reconozcan que una centena es igual a 100 unidades, no siempre logran usar la equivalencia entre 10 decenas y 100 unidades para hacer particiones, agrupamientos o comparaciones.

*Nivel 5. Esencia del valor posicional:* En este nivel, la comprensión de los estudiantes en el uso de números de tres dígitos es completa, y comienza a extenderse a números de cuatro dígitos o más, en ese sentido se considera esencial. Los estudiantes exhiben las habilidades del nivel 4, y adicionalmente hacen uso consistente de equivalencia entre 10 decenas y 100 unidades, lo cual les permite construir representaciones canónicas y no canónicas de números de tres dígitos en la solución de problemas. Los estudiantes en este nivel "exhiben una comprensión coordinada de los cuatro constructos y demuestran preferencia por una representación mental sobre las representaciones físicas o con lápiz y papel." (Jones et al., 1996, p. 324)

Entre los hallazgos de Jones et al. (1996), se destaca que los niveles, sobre los que se basaron los problemas que plantearon a los niños, son consistentes, ya que, si un niño podía resolver un problema de cierto nivel, también podía resolver los de niveles anteriores; de igual forma, si era incapaz de responder un problema de cierto nivel, tampoco podía resolver los de niveles superiores. Así mismo, encontraron que cuando un estudiante era capaz de resolver algún problema de cierto nivel asociado a alguna de las cuatro habilidades, también podía resolver problemas relativos a las otras del mismo nivel.

### **2.3. Dificultades asociadas al aprendizaje del concepto de valor posicional**

En la investigación en educación matemática (Baroody, 1990; Baturó, 2002; Chandler y Kamii, 2009; Fuson, et al., 1997; Jones et al., 1996; Varelas y Becker, 1997), se ha encontrado bastante evidencia para sostener que los estudiantes, particularmente de los primeros grados de educación, tienen grandes dificultades para desarrollar una comprensión esencial del valor posicional, hay consenso frente a que los niños lo encuentran difícil de aprender, y los profesores, difícil de enseñar. Los modelos del desarrollo de las concepciones de los números de varios dígitos (Fuson et al, 1997), del desarrollo de la base 10 (Silva, 2005), y de las habilidades para la adquisición y desarrollo del valor posicional (Jones et al., 1996), desvelan la complejidad implicada en los procesos de estudio del valor posicional.

A continuación, se destacan algunas dificultades que podrían presentar los estudiantes en los primeros años de escolaridad.

### *2.3.1. Dificultades asociadas a la escritura y lectura de los números naturales*

En la escritura de las cifras algunos niños encuentran dificultad para hacer correctamente la grafía de algunos números y tienden a escribirlos en forma opuesta a la propia (a modo de una imagen especular) (Varelas y Becker, 1997). Esta es una dificultad que se supera con el trabajo escolar y generalmente desaparece hacia los siete años. Los estudiantes que tengan poco desarrollada la relación perceptivo motora presentarán dificultades para conectar lo que ven con lo que escribe, ya que no pueden coordinar adecuadamente su visión con los correspondientes movimientos de sus manos, por lo que le será complicado copiar números (Flores y Rico; 2015)

La escritura simbólica de números a partir de su expresión oral, representa ciertas dificultades (Varelas y Becker, 1997). Por ejemplo, algunos niños cometen errores como los siguientes: escribir "sesenta y uno" como 601 o "ciento veintitrés" como 100203. Estos errores ocurren también en la lectura de números, es decir al pasar de lo simbólico a lo verbal (Browning y Beauford, 2012). Otro tipo de dificultad es el cambio del orden de las cifras en el número, como escribir 31 en lugar de 13; esta dificultad puede conducir posteriormente a errores en las operaciones (Flores y Rico; 2015). La lectura de los dígitos también presenta dificultad para algunos niños (Browning y Beauford, 2012). En los números de una cifra suelen confundir algunos de ellos como el 6 y el 9 o el 2 y el 5; esto hace que cometan errores. En la lectura de números de dos cifras ocurre, como en la escritura, que algunos estudiantes cambian el orden de las cifras en el número, leyendo "catorce" cuando en realidad se trata de 41.

### *2.3.2. Dificultades asociadas a características del sistema decimal de numeración (SDN)*

En las investigaciones se han detectado diferentes grados de comprensión de la estructura del sistema de numeración decimal (Bruno y Noda, 2014). La capacidad de recitar la secuencia numérica no lleva implícito que los estudiantes posean conocimiento de la magnitud absoluta de los números (Baroody, 1990), que conozcan la relación entre números de la secuencia numérica o que lo reconozcan en su forma simbólica, sobre todo cuando se trata de números de más de una cifra (Chandler y Kamii, 2009).

En algunos casos dan muestra de percibir los dígitos del número sólo como unidades aisladas, no reconociendo la relación entre las unidades de diferente orden (Fuson et al. 1997). Como ejemplo, 89 es mayor que 90 porque en el 89 está el ocho y el nueve, y en el 90 el nueve y el cero, que es menor que ocho. La falta de comprensión del valor de posición se muestra mediante errores de este tipo (Flores y Rico, 2015).

En la lectura de números de varias cifras se presentan algunas dificultades relacionadas con las características del sistema de numeración decimal. Los números se leen de izquierda a derecha y se comienza por las unidades de mayor orden si el número contiene tantas cifras que no es posible leer la simple vista, es necesario valorarlo para conocer cuál es el orden mayor de sus cifras. Este proceso puede causar dificultad, ya que al evaluar cada posición se va indicando para cada número la terna a la que pertenece (unidad de millar, decena de millar, centenas de millar, en el caso de la segunda terna), y al decir todo el número la palabra "mil" engloba a toda la terna (136 mil), es decir, la regla cambia de la valoración a la lectura. Estudios realizados sobre esta situación (Browning y Beauford, 2012; Fuson et al. 1997) han revelado que, para números de varias cifras, ofrece más dificultad escribir simbólicamente un número dado verbalmente (por ejemplo, escribir el número seiscientos cuarenta y tres mil doscientos cincuenta y seis), que leer un número que está escrito simbólicamente (por ejemplo, decir con palabras el número 643.256).

### *2.3.3. Dificultades con el cero*

De los diez dígitos de sistema de numeración decimal, el que más dificultad provoca a los estudiantes es el cero. Una de las causas puede estar en que, a diferencia los 9 dígitos restantes, el cero no se percibe como cardinal de colección alguna. Otra posible causa es el doble papel de la presencia del cero en un

número: para indicar que dicha posición está ocupada y para indicar que no hay ninguna cantidad de unidades en dicho orden. Esta doble función no es obvia para muchos estudiantes. Otro tipo de dificultad está asociada al cambio que se produce en el paso de un número terminado en nueve (o más de un nueve) al siguiente (239, 99, 2999), que terminará en uno o varios ceros al formarse unidades de orden superior (Flores y Rico, 2015).

### **3. Contexto y método del estudio**

El estudio se encuentra enmarcado en el enfoque cualitativo, de alcance descriptivo (Hernández, Fernández, y Baptista, 2010), en tanto se aborda el problema de investigación con el fin de realizar descripciones a profundidad de un fenómeno para comprenderlo; en el caso concreto de este trabajo, se busca describir las comprensiones del valor posicional que desarrollan los estudiantes, con el propósito de comprender sus logros y dificultades en relación con el conteo, partición, agrupamiento y comparación de cantidades al resolver problemas, y en qué medida se logran avances en tales comprensiones durante la implementación de una unidad didáctica diseñada e implementada desde el marco de la Enseñanza para la Comprensión (EpC).

Se pretende recabar información específica, que permita mostrar con detalle los niveles de comprensión que desarrollan los estudiantes a partir de los referentes teóricos presentados. En coherencia, consideramos pertinente asumir un diseño de investigación-acción (Elliott, 2000) para el estudio, en el cual se realizó un proceso continuo y cíclico de articulación entre los referentes teóricos, el marco de diseño (EpC), el diseño e implementación de las actividades, y la reflexión sobre la pertinencia de las mismas. Las siguientes acciones describen ese proceso: se identificó la problemática en ambas aulas y se tomaron decisiones de acción, se realizó una revisión teórica referida a la comprensión del valor posicional, se diseñó un plan de acción (Unidad didáctica), se implementó el plan de acción, y se evaluaron los resultados que emergieron durante la implementación, para realizar ajustes e iniciar de nuevo el ciclo. En este trabajo se reporta un primer ciclo.

#### **3.1. Descripción de la Población**

La investigación se llevó a cabo con todos los estudiantes de 2º (5-7 años) de básica primaria de dos colegios públicos ubicados en la ciudad de Bogotá (Colombia). 23 estudiantes del Colegio Restrepo Millán, jornada tarde (Grupo 1) y 33 estudiantes del Colegio San Carlos, jornada mañana (Grupo 2). Estos grupos son el foco de atención en este estudio, dado que en ambos se evidenciaron, en las actividades de clase y en la información recogida de los diarios de campo, grandes dificultades particularmente referidas al concepto de valor posicional, en concordancia con las dificultades identificadas desde el campo investigativo (Baroody, 1990; Baturo, 2002; Chandler y Kamii, 2009; Fuson, et al., 1997; Jones et al., 1996; Varelas y Becker, 1997).

*Contexto de aula Grupo 1.* Está conformado por 12 niñas y 11 niños. 22 cursaron primero en la misma institución. Una estudiante presenta necesidades educativas especiales. Son dinámicos, activos, colaboradores, solidarios, emotivos y expresivos. Los estudiantes trabajan en clase con entusiasmo e interés por saber cosas nuevas, cumplen con tareas y materiales solicitados. La mayoría de estudiantes siguen instrucciones y trabajan bien en grupos. Presentan diferencias en sus ritmos de aprendizaje. Su capacidad de atención es corta y tienden a distraerse con facilidad. Algunos estudiantes escriben y toman dictado sin dificultad mientras que otros están iniciando este proceso; en algunas ocasiones solo realizan lectura de palabras con las sílabas m, p, s y n. La mayoría escribe su nombre.

*Contexto de aula Grupo 2.* Está conformado por 15 niñas y 18 niños. 26 de los niños cursaron grado primero en la institución, hay un niño repitente de grado. Es un grupo bastante colaborador, buenos compañeros, cariñosos, solidarios; demuestran interés por aprender cosas nuevas, con buena

disposición para participar en cualquier actividad, les agrada expresar constantemente lo que piensan y sienten. Algunos estudiantes del curso trabajan de manera autónoma; estos estudiantes ayudan a sus compañeros que presentan dificultades. Formulan preguntas referidas al tema que se esté estudiando. Presentan problemas de atención y concentración. A pesar del interés de los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas, se presentan dificultades en el proceso de lectoescritura y en el pensamiento numérico.

En relación con el valor posicional, en ambos grupos se encuentran estudiantes que confunden números y letras; 7 y F, 2 y S, etc. Ejemplo: al escribir 26, la grafía que usan es S6. Invierten números como el 2, 4, 5, 7 y el 9. Al escribir números de 2 dígitos, invierten el orden. No reconocen, ni toman dictado de números de 2 dígitos. No identifican símbolos como +, - e =. La mayoría no establece diferencias entre unidades y decenas. No escriben correctamente números de 3 dígitos. Se les dificulta establecer las relaciones "mayor que" y "menor que", entre números de 2 dígitos. En la solución de problemas, no tienen claras las relaciones de orden, seriaciones y secuencias, no reconocen las posiciones antes de, entre y después de; se les dificulta la comparación de cantidades, el establecimiento de relaciones de orden, y efectuar operaciones de adición o sustracción. Este "diagnóstico" inicial de los grupos, permitió la delimitación de la problemática de investigación y sirvió de base para el diseño e implementación de los desempeños de comprensión de la Unidad Didáctica.

### **3.2. Recolección de los datos**

La recolección de información se realizó por medio de diferentes instrumentos: el diario de campo, los videos de las sesiones, las guías y trabajos desarrollados por los estudiantes. En el caso del diario de campo, este permitió hacer registro de observaciones sobre cada una de las actividades diseñadas e implementadas relacionadas con el aprendizaje de valor posicional; permitió sistematizar las diferentes experiencias que se obtuvieron en cada una de las fases de la unidad didáctica y facilitó organizar la información obtenida. Así mismo, las grabaciones obtenidas durante el desarrollo de las actividades, permitieron una observación, análisis, reflexión y evaluación de la unidad didáctica. Además, permitieron volver a las observaciones registradas varias veces y así revisar, triangular con los diarios de campo, y extraer la mayor información posible que se resume en las listas de chequeo. Las guías y trabajos elaborados por los estudiantes constituyeron otra herramienta fundamental ya que, por medio de éstas, demostraron en forma individual sus avances en la comprensión del concepto de valor posicional.

### **3.3. Sistematización y análisis de la información**

Para alcanzar el objetivo del estudio, se hizo necesario elaborar y digitalizar listas de chequeo con códigos para cada una de las categorías/subcategorías establecidas a priori (Ver Tabla 2). Ello permitió tener un registro organizado y disponible de la información. Tales listas, que corresponden a su vez a la perspectiva de *valoración continua* dentro del marco de la (EpC), también sirvieron para evidenciar el desarrollo de las habilidades asociadas a la comprensión del concepto de valor posicional, y trazar los avances de los estudiantes en cada una de las fases; a partir de lo cual se realizó el posterior análisis.

Las listas de chequeo se fueron adaptando y diligenciando en el transcurso de cada una de las fases de la unidad didáctica. Se elaboraron cuatro listas: la "Actitudinal" y las otras tres correspondientes a las categorías propuestas (Ver apéndice 1). Una vez finalizado el proceso de organizar la información en las listas de chequeo, con las herramientas de la hoja de cálculo se hallaron las frecuencias absolutas y relativas de cada uno de los códigos asociados a las categorías, para facilitar el análisis al observar los avances porcentualmente.

Tabla 2. Categorías y Subcategorías de Análisis

CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
Habilidades relacionadas con la adquisición y desarrollo del concepto de valor posicional: Conteo, partición, agrupamiento y comparación. (Jones et al., 1996).	Nivel 1. Previo al valor posicional
	Nivel 2. Inicio del valor posicional
	Nivel 3. Desarrollo del valor posicional
	Nivel 4. Extensión del valor posicional
	Nivel 5. Esencia del valor posicional
Niveles de comprensión de la base 10 (Fuson et al. 1997; Silva, 2005).	Nivel 1. Concepto inicial de decena.
	Nivel 2. Concepto intermedio de decena
	Nivel 3. Concepto experto de decena
Dificultades asociadas al aprendizaje del concepto del valor posicional (Flores y Rico, 2015; Fuson et al. 1997).	Dificultades en la escritura y lectura de los números naturales
	Dificultades asociadas a características del SDN
	Dificultades con el cero.

#### 4. Marco Metodológico de Diseño (EpC)

Como se ha señalado, entendemos que la comprensión del valor posicional requiere de un uso flexible de los números de varios dígitos y de habilidades de conteo, partición, agrupación y comparación en la resolución de problemas (Jones et al. 1996). En ese sentido, y con el propósito de favorecer tal comprensión, utilizamos el marco conceptual de Enseñanza para la Comprensión (EpC) (Blythe, 1999, Blythe y Perkins, 2006; Perkins, 1995; Perkins, 2003; Perkins y Blythe, 1994), en el diseño, implementación y evaluación de la estrategia de enseñanza objeto de nuestro estudio.

En este trabajo la comprensión se entiende en relación con el desempeño, es decir, conlleva acciones y actividades o tareas en las cuales se muestra la comprensión adquirida, y se consolida y profundiza la misma. Así, la comprensión puede analizarse desde distintas dimensiones, entre las que se incluye no solo la usual de los *contenidos* y sus redes conceptuales (el qué), sino la de los *métodos* (el cómo) o procesos relativos a la construcción y validación del conocimiento, la dimensión de los *propósitos* (el por qué y para qué), y la relacionada con las formas de expresión y *comunicación*, que se despliegan en la praxis cotidiana, profesional o científico-técnica. Creemos que estas dimensiones constituyen una herramienta poderosa, para que el profesor articule con mayor precisión qué es lo que quiere que los estudiantes comprendan, y diseñe estrategias para desarrollar tales comprensiones.

Perkins (1999, p. 69) afirma que "comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe". Blythe (1999) amplía esta idea sosteniendo que "comprender es poder llevar a cabo una diversidad de acciones o "desempeños" que demuestren que uno entiende el tópico y al mismo tiempo lo amplía, y ser capaz de asimilar un conocimiento y utilizarlo de una forma innovadora" (p. 40). De acuerdo con esto, es necesario resaltar que la comprensión, y en particular la del valor posicional, se enfoca en desempeños o acciones dirigidas a la manera de pensar o actuar flexiblemente (contar, hacer particiones, agrupar y comparar cantidades con flexibilidad). El conocimiento del valor posicional es necesario para tales acciones, y de esta forma se resuelvan problemas, se crean productos o se interactúa eficazmente con el mundo que nos rodea; así, comprender implica realizar diferentes actividades en forma reflexiva con respecto a algún tema, explicarlo, clarificarlo con ejemplos acordes, presentar evidencias o presentarlo de manera novedosa.

Perkins (1995) plantea que la comprensión se construye y que siempre está en estado de formación, cuando se comprende un tema o concepto no sólo se ha adquirido información, sino que se está en capacidad de usarla en la realización de múltiples actividades. Esta visión de la comprensión en términos del desempeño, exige el diseño e implementación de actividades que trasciendan a los típicos ejercicios

rutinarios que no van más allá de la memorización y mecanización de reglas. El marco de la EpC provee cuatro constructos básicos que facilitan la orientación de los procesos de enseñanza y aprendizaje, en busca de verdaderas comprensiones.

*Tópicos generativos e Hilos Conductores:* Según Blythe, (1999)

Los tópicos generativos son centrales para uno o más dominios o disciplinas. Las cuestiones que promueven la comprensión dan a los alumnos la oportunidad de adquirirla, así como la de adquirir las habilidades necesarias para comprender con éxito trabajos más sofisticados dentro de ese dominio o disciplina (p. 58)

Los tópicos generativos son temas, cuestiones, conceptos, ideas, etc. que ofrecen profundidad, significado, conexiones y variedad de perspectivas en un grado suficiente como para apoyar el desarrollo de comprensiones poderosas por parte de estudiante. Se deben buscar tres características en un tópico generativo: su centralidad en cuanto a la disciplina, que sea asequible para los estudiantes y que se relacione con diversos temas dentro o fuera de la disciplina (Blythe y Perkins, 2006). Entretanto, los *Hilos Conductores* son elementos que abarcan las etapas de un curso, transversales a los saberes y permiten indagar sobre el tópico generador de manera interdisciplinaria; son usualmente preguntas asociadas a las comprensiones esenciales que deberían desarrollar los estudiantes.

*Metas de Comprensión:* Son conceptos, procesos y habilidades que se desea que comprendan los estudiantes y que contribuyen a establecer un centro, cuando se determina hacia dónde habrá de encaminar la enseñanza y el aprendizaje. Las metas de comprensión de las unidades se enfocan en los aspectos centrales del tópico generativo (Blythe y Perkins, 2006). Es usual plantearlas desde las dimensiones de contenido, método, propósito y comunicación.

*Desempeños de Comprensión:* Los desempeños de comprensión son acciones, actividades, tareas o proyectos que ayudan a los estudiantes a desarrollar y a demostrar la comprensión, exigen que los estudiantes usen sus conocimientos previos de maneras nuevas o en situaciones diferentes para construir la comprensión del tópico de la unidad (Blythe y Perkins, 2006). Blythe (1999) plantea que a pesar de que los desempeños parezcan indicar estados finales, realmente se refieren “a actividades de aprendizaje, las cuales dan la oportunidad de visibilizar el desarrollo de la comprensión en diferentes y novedosas situaciones, son una forma mediante la cual los estudiantes demuestran a aprehensión de sus aprendizajes” (p, 106).

La relación de las metas con los desempeños es fundamental, luego de identificar y establecer las metas, se diseñan los posibles desempeños para apoyar su logro, en los que se incorporan oportunidades para que los estudiantes reciban retroalimentación sobre su trabajo y lo revisen a medida que lo ejecutan (Blythe y Perkins, 2006). Es usual en el diseño de unidades desde el marco de EpC, que los desempeños se ordenen en secuencia y que se organicen en tres secciones (Blythe, 1999; Blythe y Perkins, 2006):

- *Desempeños Preliminares (o Desempeños de Exploración):* Corresponden al inicio de la unidad. Dan a los estudiantes la ocasión de explorar el tópico generativo y al profesor, le da la oportunidad de conocer la comprensión que tienen los estudiantes sobre el tópico. De estas exploraciones surge la posibilidad de establecer vínculos entre los intereses del estudiante y el tópico
- *Desempeños de Investigación Guiada:* Los estudiantes se centran en desarrollar la comprensión de problemas o aspectos concretos del tópico generativo que para el profesor son importantes.
- *Desempeños Finales (o Desempeños de Síntesis):* Estos desempeños son más complejos y corresponden a la última etapa, permiten que los estudiantes sinteticen y demuestren la comprensión alcanzada a lo largo de la unidad.

A medida que los estudiantes se involucran en los desempeños, es necesario ayudarlos a establecer conexiones entre sus propios logros y las metas de comprensión; así, el profesor debe estar atento al progreso de sus estudiantes, a escuchar y gestionar sus preguntas, confusiones e inquietudes, a pedir a los estudiantes que comuniquen las razones de sus respuestas, que ofrezcan pruebas que las respalden, y que hagan predicciones durante los procesos de discusión, o que escriban sus reflexiones acerca de los desempeños (Blythe, 1999; Blythe y Perkins, 2006).

*Valoración Continua:* Cuando el propósito de la instrucción es la comprensión, el proceso de valoración es más que un examen, es una parte importante del proceso de aprendizaje y debe contribuir significativamente al mismo. "Integrar el desempeño y la realimentación es justamente lo que necesitan los alumnos cuando trabajan en el desarrollo de la comprensión de un tópico o concepto específico." (Blythe, 1999, pág108). Las valoraciones que promueven la comprensión tienen que ser algo más que un examen al final de una unidad. Estas valoraciones deben informar a los estudiantes y a los docentes las comprensiones que se han alcanzado y cómo proceder en la enseñanza y el aprendizaje posteriores (Blythe y Perkins, 2006).

Tabla 3. Preguntas y elementos esenciales de la Enseñanza para la Comprensión

<i>Cuatro preguntas esenciales</i>	<i>Elemento de la EpC</i>
¿Qué quiere realmente que sus estudiantes comprendan?	<i>Tópicos Generativos</i> <i>Metas de Comprensión</i>
¿Cómo puede desarrollar esas comprensiones?	<i>Desempeños de Comprensión</i>
¿Cómo saben el profesor y los estudiantes que efectivamente comprenden? ¿cómo pueden desarrollar una comprensión más profunda?	<i>Valoración Continua</i>

Adaptada de Blythe y Perkins (2006)

En la tabla 3, presentamos un resumen de las preguntas esenciales y los elementos del marco de EpC que orientan el diseño, implementación y evaluación de la estrategia presentada. Consideramos que este marco es coherente con nuestros planteamientos teóricos sobre la comprensión del valor posicional, en tanto nos permite articular (en metas y desempeños) el diseño para su desarrollo y valoración; además, encontramos coherencia con nuestro diseño investigativo, en tanto el marco de EpC, a través del constructo de valoración continua, ofrece la oportunidad de identificar y modificar acciones que podrían obstaculizar los desempeños de comprensión de los estudiantes, y permite al docente reflexionar sobre su propia práctica pedagógica.

## 5. Estrategia didáctica diseñada

Con el fin de favorecer la comprensión del valor posicional por parte de los estudiantes, se diseñó, implementó y evaluó una unidad didáctica, desde el marco de la EpC (Blythe, 1999, Blythe y Perkins, 2006; Perkins, 1995; Perkins, 2003; Perkins y Blythe, 1994), y con fundamento en los planteamientos teóricos de este estudio. La unidad didáctica se propuso a partir del tópico generativo "*Somos como astronautas conociendo el espacio*", que se generó a partir de los intereses demostrados por los estudiantes en visitas programadas a la biblioteca, donde ellos estaban en libertad de escoger los libros de su interés y un gran número de los estudiantes eligió libros relacionados con el universo, el espacio y el sol; además, por el interés mostrado por ellos en actividades propuestas en otras asignaturas en el mismo contexto del universo a gran escala.

### 5.1. Hilos conductores

La unidad didáctica diseñada e implementada, que se presenta brevemente aquí, estuvo orientada por las siguientes preguntas potenciadoras para promover la comprensión del concepto de valor posicional.

Tabla 4. Preguntas Potenciadoras – Hilos conductores

<i>Comunica</i>	¿Por qué es importante contar?, ¿Cómo le explicarías a tus compañeros la importancia de contar?, ¿Cómo se puede expresar una cantidad grande?, ¿Cuál es el valor de una cifra de acuerdo a la posición que ocupa en un número?
<i>Crea</i>	¿Cómo podemos contar las estrellas?, ¿Qué necesitamos para contar las estrellas? ¿Cuál es la mejor forma para agrupar las estrellas?, ¿Cómo podríamos inventar una forma para contar las estrellas que vemos en el cielo en una noche?
<i>Evalúa</i>	¿Por qué es útil agrupar las estrellas?, ¿Para qué es importante agrupar las estrellas?
<i>Analiza</i>	¿Qué diferencia hay entre una estrella, una constelación y una galaxia? ¿Qué pasaría si en un número se cambiara la posición de una cifra?
<i>Aplica</i>	¿Cuántas estrellas, constelaciones y galaxias necesitamos formar cierto número? ¿Cuántos planetas tiene nuestro sistema planetario?
<i>Reconoce</i>	¿Cuáles son las unidades, las decenas y las centenas en una cantidad? ¿Cómo se representan las unidades, las decenas y las centenas? ¿A cuántas unidades equivale una decena?, ¿a cuántas equivale una centena?, ¿A cuántas decenas equivale una centena?

## 5.2. Metas de comprensión

El análisis de los documentos oficiales (MEN, 1998; MEN, 2006), del marco teórico del estudio y de los “diagnósticos” iniciales de ambos grupos de estudiantes, nos condujo a plantear las siguientes metas de comprensión en cada una de las dimensiones de la comprensión (Blythe, 1999):

Tabla 5. Metas de Comprensión

<b>Contenido</b>	<b>Método</b>
Los estudiantes usarán el conteo, la partición, la agrupación y la relación entre números para resolver problemas con operaciones básicas y comprender el concepto de valor posicional. Los estudiantes comprenderán que el uso de unidades, decenas y centenas les permite representar cantidades para resolver situaciones aditivas.	Los estudiantes determinarán la cantidad de objetos en una colección a través de la observación, clasificación y codificación. Los estudiantes contarán, agruparán, compararán y clasificarán cantidades en el contexto del universo. Los estudiantes ordenarán y determinarán si un número es mayor, menor o igual que otro.
<b>Comunicación</b>	<b>Propósito</b>
Los estudiantes demostrarán cómo pueden explicar el valor posicional de los números, a través de la socialización de las actividades propuestas en la unidad. Los estudiantes usarán la expresión verbal, escrita, gráfica y con materiales concretos para explicar sus avances en la comprensión del valor posicional de los números.	Los estudiantes descubrirán cómo el valor posicional de los números les permitirá solucionar problemas relacionados con el tópico generativo. Los estudiantes identificarán el valor posicional de las cifras en una expresión numérica, en el contexto de la resolución de problemas.

## 5.3. Desempeños de comprensión

En concordancia con lo planteado en el apartado 4, los desempeños de comprensión de la unidad diseñada se articularon en tres fases:

### 5.3.1. Fase exploratoria

Está constituida por dos actividades.

Actividad 1: “¿Qué sabemos sobre el universo y las estrellas?” (45’) Esta actividad persigue que los estudiantes exploren el tópico generativo y que las profesoras indaguen sobre las ideas previas que tienen los estudiantes, mediante la utilización de preguntas y la presentación de dos videos.

Actividad 2: “Veo, pienso y me pregunto sobre las estrellas”. (30’). La rutina de pensamiento “veo, pienso y me pregunto”, propicia que los estudiantes realicen observaciones cuidadosas y pensadas, y que exterioricen sus pensamientos referentes a la observación de la imagen mostrada. Se inicia el proceso

de indagación sobre el estado actual de desarrollo que presentan los estudiantes con respecto al concepto de valor posicional (Jones et al., 1996).

### 5.3.2. Fase de investigación guiada

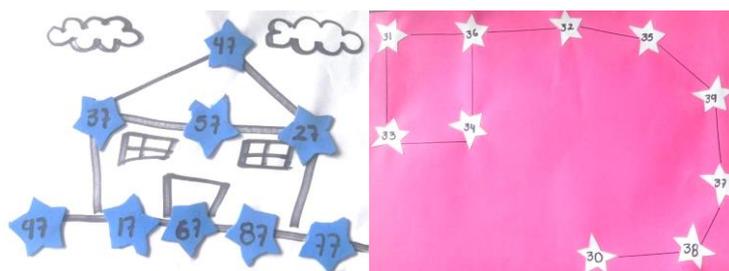
Se centró en desarrollar la comprensión esencial del concepto de valor posicional, y se estructuró en 5 actividades secuenciadas para progresar desde lo concreto, a lo gráfico, simbólico y abstracto (Salazar y Vivas, 2013).

Actividad 3. "Fabricando estrellas" (60'). En grupos los estudiantes recortan el mayor número posible de estrellas en 20 minutos. La fábrica (grupo) que produzca más estrellas ganará dos *constelaciones*. Luego, se decoran las estrellas (20'). En el tiempo restante se plantea la siguiente pregunta: ¿Cuántas estrellas han elaborado? En el tablero se recopila la información de cada grupo: ¿Cuántas fábricas se formaron?, ¿Cuál fábrica elaboró más estrellas?, ¿cuál tiene menor cantidad?

Actividad 4. "Ganando estrellas" (60'). Se espera trascender el registro de representación verbal. Se propone el juego "Jugando a los dados para ganar estrellas". En grupos de 4 o 5 estudiantes, se juegan hasta 3 rondas. Cada jugador lanza un solo dado. El jugador que saque el valor más alto, jugará primero. Puntajes: Si los dados muestran nones, quien lanzó paga una estrella a cada compañero; si la suma está entre 1 y 5, nadie paga; si está entre 6 y 9, cada jugador le paga una estrella al jugador que lanzó; si está entre 10 y 12, cada jugador paga 2 estrellas a quien lanzó. Preguntas: ¿Cuántas estrellas tenían al comienzo del juego?, ¿con cuántas terminó?, ¿Ganó o perdió estrellas?, ¿cuántas?

Actividad 5. "Agrupando estrellas" (60'). En grupos de 3 o 4 estudiantes. Con las estrellas elaboradas en la actividad 3, la elaboración de galaxias en papel, los símbolos  $<$ ,  $>$  e  $=$ , y la adecuación de 10 sobres de diferente color, que representan una cantidad de decenas determinada: azul representa 40, morado representa 50, etc., se realizan cuatro tareas:

Tarea 1. Con las estrellas y sobres, los estudiantes realizan grupos de estrellas de diez en diez hasta llegar a un número dado. Luego se entrega cierto número de estrellas a un estudiante, y él debe clasificarlo según la decena. Ejemplo: Un estudiante recibe 46 estrellas, deberá colocarlas en el sobre azul.



Tarea 2. Con estrellas marcadas con los números del 1 al 100 los niños realizan diferentes constelaciones. Ejemplos: La constelación con los números que terminen en siete unidades. La constelación con los números que tengan tres decenas.

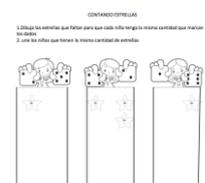
Tarea 3. Utilizando palos de paletas para formar los signos "mayor que", "menor que", e "igual que", los estudiantes comparan por decenas (entre 25 y 35) y entre decenas (entre 24 y 27).

Tarea 4. Utilizando las estrellas, se invita a los estudiantes crear constelaciones y luego les coloquen nombre, para que realicen agrupaciones. Los grupos de 10 se llamarán constelaciones, y se iniciará el proceso de intercambio de 10 estrellas por una constelación.

Actividad 6 "Practicando con las estrellas" (120') Esta actividad está articulada en 6 guías escritas que sirven para observar el registro que llevan los estudiantes, y 3 tareas a realizar en grupo.

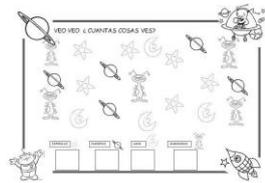
Guías escritas. Estas actividades son individuales y a cada estudiante se le entrega una fotocopia

1. Contando Estrellas



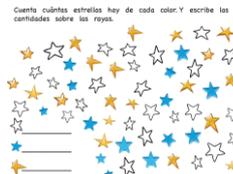
Los estudiantes dibujan las estrellas que faltan para que cada niño tenga la misma cantidad de estrellas que marcan los dados.

2. Veo, veo ¿Cuántas cosas ves?



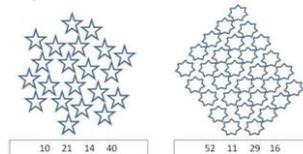
Los estudiantes realizan conteo de estrellas, planetas, lunas y marcianos, luego colorean.

3. Cuenta estrellas



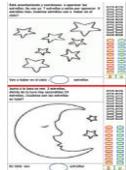
Los estudiantes realizan conteo de estrellas de cada color para luego determinar el número total de estrellas.

4. ¿Cuántas estrellas son?



Los estudiantes realizan conteo de estrellas y luego marcan en la parte inferior la representación que corresponda.

5. Suma de estrellas



Los estudiantes resolverán dos problemas sencillos de suma y luego marcarán en la parte inferior la respuesta utilizando la representación simbólica.

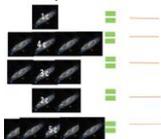
6. Valor de posición



En esta guía los estudiantes se enfrentarán a la resolución de un problema propuesto por el astronauta, consiste en encontrar el número correcto, teniendo en cuenta las pistas.

Tareas a realizar a nivel grupal con la ayuda del tablero y la participación activa de los estudiantes

1. A qué número corresponde

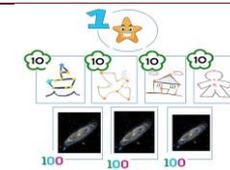


Las galaxias representan centenas. Los estudiantes deben identificar a qué número corresponde cada galaxia.

2. Une según corresponda



Estrellas, constelaciones y galaxias representan un número



3. Cuenta los cuerpos celestes que hay.

Actividad 7 "¿Cómo podemos formar un universo?" (60') Se forman grupos de 5 estudiantes, luego a cada grupo se le asigna un número de tres dígitos y el material que sirve para representar ese número (estrellas: unidades simples, constelaciones: decenas, galaxias: centenas). Cada grupo forma el universo a partir del número asignado y explican sus procedimientos.



5.3.3. Fase de Síntesis

Correspondió a la última etapa de la unidad didáctica.

Actividad 8. "Creando nuestro propio universo" (60') En grupos de 5 estudiantes, cada grupo crear su propio universo utilizando diferentes materiales (estrellas: unidades simples, constelaciones: decenas, galaxias: centenas). El cuadro elaborado por cada grupo será expuesto a los demás compañeros y ellos comunicarán qué número formaron al crear su universo y cómo lo hicieron.



5.4. Valoración Continua

En todas las sesiones se realizó retroalimentación de tipo informal sobre el concepto de valor posicional por parte de las profesoras, en acuerdo con Blythe y Perkins (2006). Durante toda la unidad, especialmente al final de cada fase, se utilizaron las listas de chequeo (ver apéndice 1) como parte de la estrategia de valoración continua, estas listas fueron una herramienta primordial registrar el proceso de cada estudiante y las diferentes dificultades que presentaban para la comprensión del concepto de valor posicional en cada fase. Además, todas las sesiones fueron filmadas<sup>1</sup> para que una posterior observación permitiera extraer información sobre la comprensión que alcanzaron los estudiantes y sobre los ajustes necesarios para las sesiones siguientes.

<sup>1</sup> Algunos video clips de la implementación se encuentran disponibles en: <https://www.youtube.com/watch?v=srYcY5YBlg>

## 6. Resultados de la implementación

A continuación, se presentan algunos hallazgos de investigación producto de la sistematización de la información recolectada y de su análisis a partir de las categorías establecidas a priori.

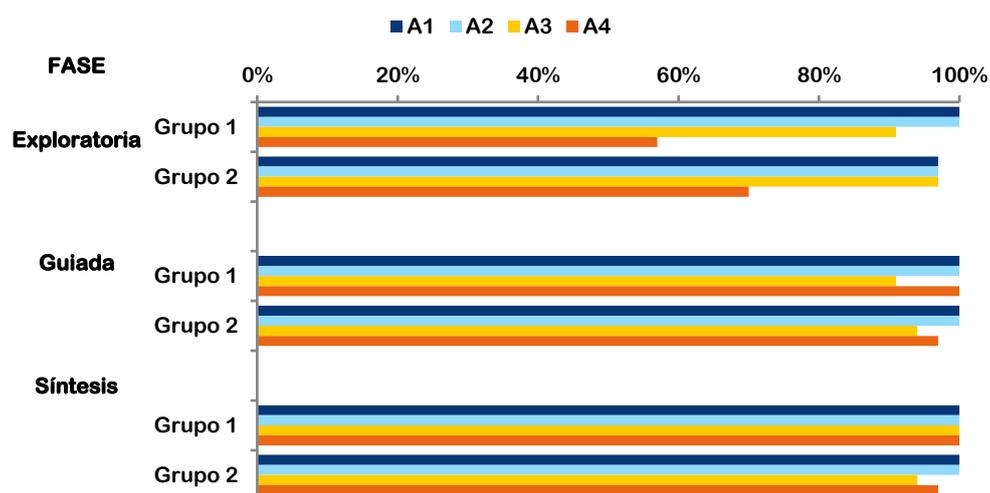
### 6.1. Análisis de la lista de chequeo "actitudinal"

En la tabla 6 y en la figura 1, se sintetiza el desempeño actitudinal de los estudiantes (Grupo1 y Grupo2). En cada columna las frecuencias relativas del número de estudiantes. Los resultados evidencian que los estudiantes de los dos grupos presentaron interés por aprender el tema y participaron activamente en las actividades propuestas durante todas las fases de la unidad didáctica (códigos A1 y A2).

Tabla 6. Resultados de la lista de chequeo actitudinal

Grupo/Código	A1	A2	A3	A4
<i>Fase Exploratoria</i>				
Grupo 1 (%)	100%	100%	91%	57%
Grupo 2 (%)	97%	97%	97%	70%
<i>Fase de Investigación Guiada</i>				
Grupo 1 (%)	100%	100%	91%	100%
Grupo 2 (%)	100%	100%	94%	97%
<i>Fase de Síntesis</i>				
Grupo 1 (%)	100%	100%	100%	100%
Grupo 2 (%)	100%	100%	94%	97%

En cuanto al código A3, algunos estudiantes no respetaron las intervenciones de otros compañeros; hablaban demostrando desinterés. En cuanto al código A4, se observa que el porcentaje de preguntas relativas al valor posicional fue aumentando ya que, en la fase exploratoria, se interesaron por indagar sobre el espacio, los planetas, los agujeros negros, etc., relacionadas al tópico generativo, pero luego se fueron centrando en preguntas asociadas al valor posicional.



Código A1. "He mostrado interés por aprender el tema".

Código A2. "Participo en las actividades propuestas".

Código A3. "Muestro respeto por las acciones y opiniones de mis compañeros".

Código A4. "Realizó preguntas relacionadas con el valor posicional".

Figura 1. Resultados de la Lista de Chequeo Actitudinal

## 6.2. Categoría “Niveles de Comprensión de la base 10”

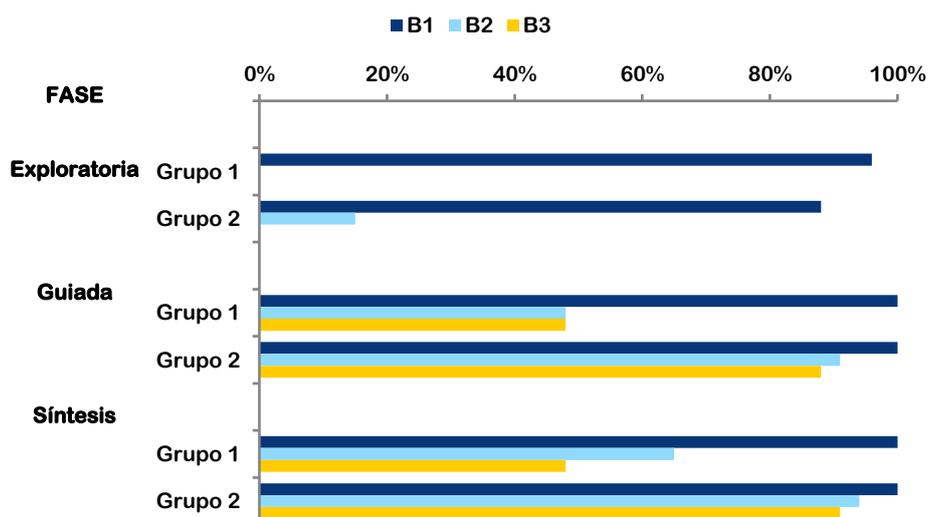
Con respecto a la categoría de comprensión de la base 10 (Silva, 2005) (Tabla 6 y Figura 3), en la fase exploratoria el 96% y el 88% de los estudiantes de los grupos 1 y 2, respectivamente, se encuentran en el nivel 1, es decir, se centran en cada uno de los elementos de la colección por separado al realizar conteo. Es importante anotar que en el grupo 2, el 15% de los estudiantes se encuentran en el nivel 2, en el que logran concebir la decena como una unidad que agrupa 10 objetos, y consiguen una representación concreta y verbal de la misma.



Figura 2. Fase Exploratoria. El estudiante realizando conteo uno a uno, se centra en cada uno de los elementos de la colección por separado

Tabla 6. Resultados en la categoría Niveles de comprensión de la Base 10

Grupo/Código	B1	B2	B3
<i>Fase Exploratoria</i>			
Grupo 1 (%)	96%	0%	0%
Grupo 2 (%)	88%	15%	0%
<i>Fase de Investigación Guiada</i>			
Grupo 1 (%)	100%	48%	48%
Grupo 2 (%)	100%	91%	88%
<i>Fase de Síntesis</i>			
Grupo 1 (%)	100%	65%	48%
Grupo 2 (%)	100%	94%	91%



Código B1. “Se centra en cada uno de los elementos de una colección por separado”.

Código B2. “Ve el número 10 como una colección de objetos, suma y resta y lo expresa verbalmente, pero no elabora una representación simbólica”.

Código B3. “Ve el número 10 como una colección de objetos, suma y resta y lo representa simbólicamente”.

\*Los códigos generan grupos no excluyentes.

Figura 3. Resultados Categoría Niveles de comprensión de la Base 10

En la implementación de la fase guiada (ver figura 4) se observó que en el grupo 1, el 48% y en el grupo 2, el 91% de los estudiantes, lograron progresar al nivel 2, ya que lograron observar el 10 como una unidad que agrupa 10 objetos y representarlo en forma concreta y verbal. De igual modo se observa que el 48% y el 88% de los grupos 1 y 2 respectivamente avanzaron al nivel 3, y lograron realizar operaciones de adición y sustracción.



Figura 4. Fase de I. Guiada. El estudiante realizando agrupamientos y conteos de 5 en 5 y de 10 en 10.

En la fase de síntesis (ver figura 5), el porcentaje de estudiantes que demostraron estar en el nivel 2, aumentó al 65% en el grupo 1 y a 94% el grupo 2. El 48% del Grupo 1 y el 91% del Grupo 2 lograron llegar al nivel 3. Esto demuestra un avance que se considera significativo en la comprensión de la base 10, en ambos grupos, presentándose resultados más altos en el Grupo 2, debido, posiblemente, a que llevan un proceso académico desde grado primero con la misma profesora, en el cual se ha favorecido intencionadamente el estudio de las nociones o habilidades asociadas al desarrollo del concepto de valor posicional.



Figura 5. Fase de Síntesis. El estudiante realiza agrupamientos y conteos de 10 en 10

### 6.3. Categoría "Habilidades asociadas a la adquisición y desarrollo del concepto de valor posicional"

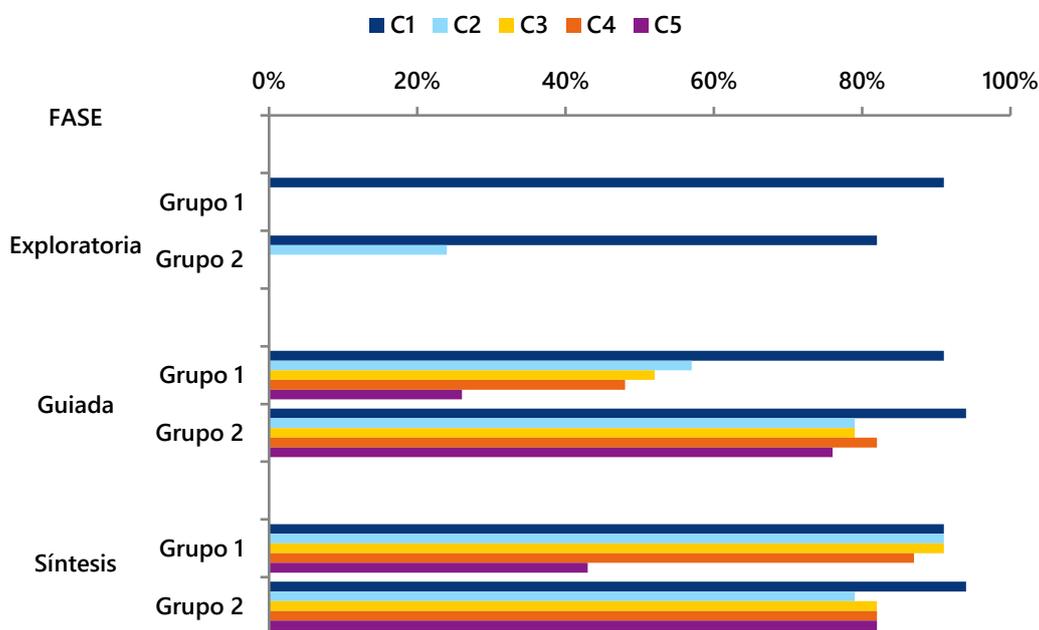
Los resultados en esta categoría se resumen en la siguiente tabla. Los códigos de cada subcategoría se describen en las figuras (6, 8, 9 y 10) correspondientes.

Tabla 7. Resultados correspondientes a la categoría "Habilidades relacionadas con la adquisición y desarrollo del concepto de valor posicional"

SUBCATEGORÍA	C					D					E					G			
	C1	C2	C3	C4	C5	D1	D2	D3	D4	D5	E1	E2	E3	E4	E5	G1	G2	G3	G4
<b>Fase Exploratoria</b>																			
Grupo 1 (%)	91	0	0	0	0	48	0	35	0	0	0	0	0	0	0	35	0	0	0
Grupo 2 (%)	82	24	0	0	0	62	3	45	0	0	33	9	0	0	0	70	0	0	0
<b>Fase de Investigación guiada</b>																			
Grupo 1 (%)	91	57	52	48	26	87	91	87	74	61	70	91	70	70	91	74	74	74	52
Grupo 2 (%)	94	79	79	82	76	91	97	97	88	85	91	94	91	94	91	94	94	88	88
<b>Fase de síntesis</b>																			
Grupo 1 (%)	91	91	91	87	43	91	87	87	78	83	87	96	78	74	91	91	87	87	74
Grupo 2 (%)	94	79	82	82	82	94	97	97	91	91	91	94	97	97	60	91	94	88	85

### 6.3.1 Subcategoría "Conteo"

En la figura 6, se observa que, en la fase exploratoria, los estudiantes de los Grupos 1(91%) y 2(82%), realizaron conteo uno a uno a partir de una cantidad dada, lo que permite ubicarlos en el nivel 1 (Jones et al., 1996); así, el 9% (Grupo1) y el 18% (Grupo2) de los estudiantes se ubicaban en un nivel incluso inferior al nivel 1.



Código C1. Cuenta, de uno en uno, a partir de una cantidad dada.  
Código C2. Determina la numerosidad exacta de una colección.  
Código C3. Cuenta grupos de diez como si fueran unidades sencillas (Diez, veinte, treinta, etc.).  
Código C4. Forma y cuenta grupos de diez y sobrantes (reconoce las decenas y las unidades).  
Código C5. Cuenta progresiva o regresivamente para sumar o restar mentalmente.

Figura 6. Resultados Subcategoría "Conteo"

Con la implementación de la fase de investigación guiada (ver figura 7), los estudiantes de ambos grupos avanzaron en la determinación de la numerosidad (cardinalidad) de una colección (57%, grupo 1; 79%, grupo 2) y en el desarrollo de otras habilidades relacionadas con el conteo, que no se observaron en la fase exploratoria: C3. Cuenta grupos de diez como si fueran unidades sencillas, y C4. Forma y cuenta grupos de diez y sobrantes, y reconocen las decenas y las unidades". Lo cual permite ubicar a estos estudiantes en el nivel 2, que marca el inicio del concepto del valor posicional. El 26%(Grupo1) y el 76%(Grupo2) de los estudiantes alcanzaron el nivel 3, al demostrar flexibilidad en el conteo progresivo o regresivo para sumar o restar mentalmente (C5).



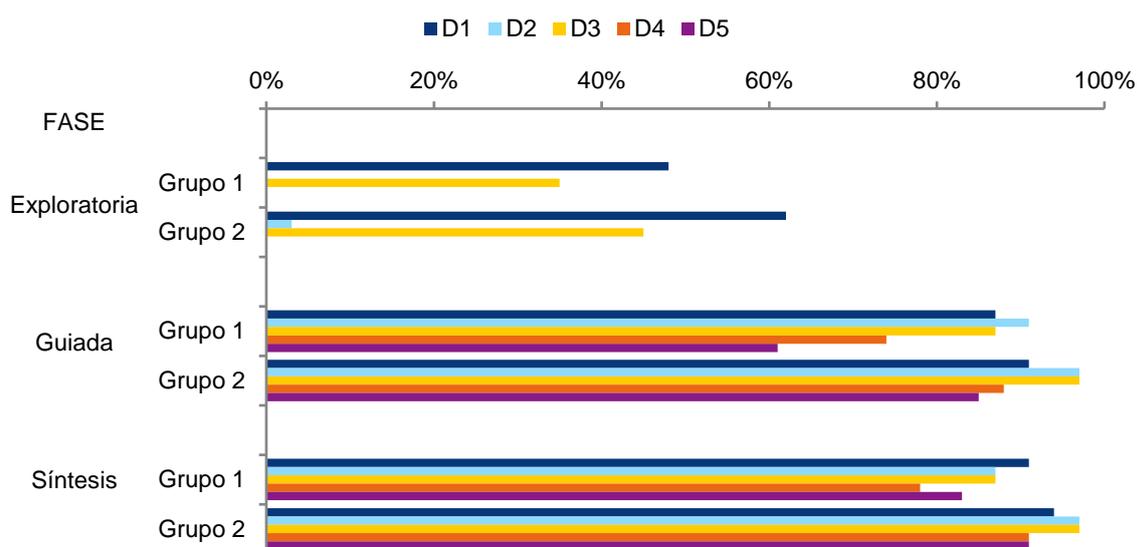
Figura 7. Fase de investigación guiada. Actividad 3. Fabricando estrellas. Inicialmente los estudiantes organizan en filas las estrellas para contarlas, en vez de agruparlas de cinco en cinco o de diez en diez.

En la fase de síntesis, se observa que, en los dos grupos, un mayor número de estudiantes determina la cardinalidad de una colección (91%, Grupo1; 79%, Grupo2), cuentan por decenas como si fueran unidades sencillas (C3: 91%, Grupo1; 82%, Grupo2) y reconocen las decenas y las unidades (C4: 87%, Grupo 1; 82%, Grupo2); estos resultados indican que como mínimo el 87% de los estudiantes del Grupo1 y el 82% de los estudiantes del Grupo2 alcanzaron el nivel 2. También se presentó un aumento en la cantidad de estudiantes en el tercer nivel. No se presentan códigos correspondientes a niveles posteriores (4 o 5), puesto que no se presentaron indicios de tal desarrollo.

### 6.3.2. Subcategoría "Partición".

Los resultados de esta subcategoría se encuentran en la tabla 7 y la figura 8. En la fase exploratoria se observa que solo el 48% (Grupo1) y el 62% (Grupo2) de los estudiantes otorgaron la categoría de contado o no contado a un objeto de la colección, el 0% (Grupo1) y el 3% (Grupo2) forman grupos separados entre el conjunto de objetos a contar, y el 35% (Grupo1) y 45% (Grupo2) forman de diferentes maneras números de un dígito; lo cual permite afirmar que inicialmente el 48% (Grupo1) y el 62% (Grupo2) de los estudiantes se ubicaban en el nivel 1. Así, el 52% (Grupo1) y el 38% (Grupo2) de los estudiantes estaban en un nivel de desarrollo previo al nivel 1.

En la fase de investigación guiada, se observa que la mayoría de estudiantes de ambos grupos avanzaron al nivel 2, ya que organizan de diferentes maneras números de dos dígitos y construyen una centena usando decenas, lo que se afianzó en la fase de Síntesis.

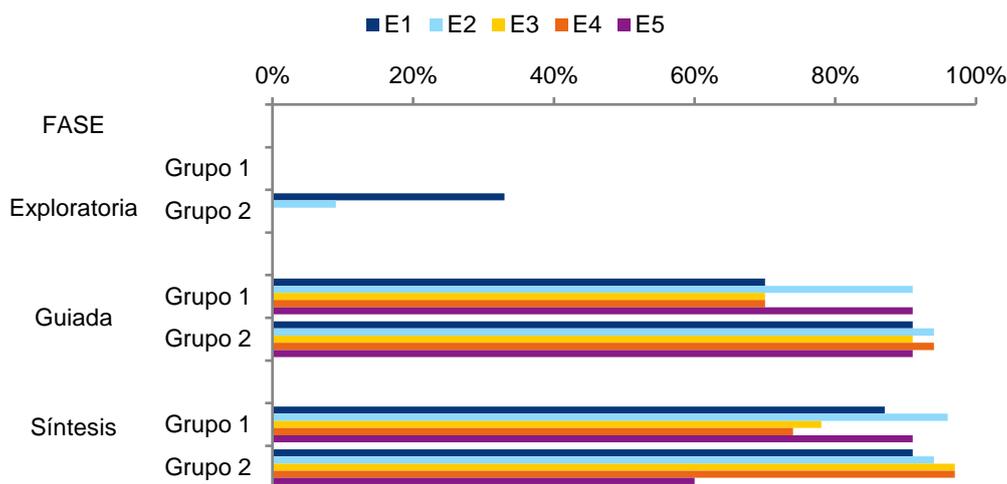


Código D1. Otorgar la categoría de contado o no contado a un objeto de la colección.  
Código D2. Forma dos grupos entre el conjunto de objetos que quiere contar  
Código D3. Forma de diferentes maneras números como el "cinco", "el ocho" y el "diez".  
Código D4. Forma de diferentes maneras números de dos dígitos, sobre todo en agrupaciones de dieces y unos.  
Código D5. Forma una centena usando decenas.

Figura 8. Resultados Subcategoría "Partición"

### 6.3.3. Subcategoría "agrupamiento".

En la fase exploratoria (ver figura 9) se observan muy bajos porcentajes en los códigos E1 y E2 en ambos grupos, indicando esto que los estudiantes se encuentran en un nivel previo al nivel 1; pero una vez comienza la implementación de la fase guiada se logra que aproximadamente el 70% de los estudiantes de ambos grupos desarrollen las habilidades que los ubican en nivel 2; con la continua retroalimentación en las dos fases finales de la unidad didáctica, se logra afianzar esta habilidad en un mayor número de estudiantes de los dos grupos.

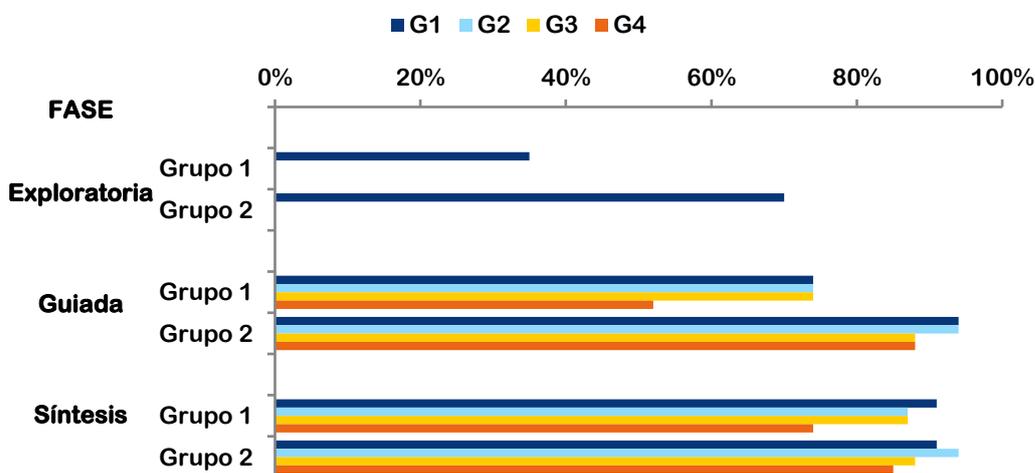


Código E1. Estima el número de objetos en un grupo utilizando el 10 y el 5 como referencia.  
Código E2. Agrupa una colección para ser contada fácil y rápidamente.  
Código E3. Estima el número de objetos en un grupo usando "la unidad apropiada" (generalmente la decena).  
Código E4. Recurre al conteo para corroborar si su estimación es correcta y agrupa para facilitar la verificación.  
Código E5. Agrupa una colección para ser contada fácil y rápidamente.

Figura 9. Resultados Subcategoría "Agrupamiento"

#### 6.3.4. Subcategoría "relación entre números"

En el Grupo1 solo el 35% de los estudiantes determinó si un número es mayor, menor o igual que 5 o 10, así, el 65% estaba en un nivel previo al nivel 1 en la fase exploratoria (ver figura 10); entretanto, en el Grupo2 el 70% se ubicó en el nivel 1. Luego, al implementar las fases de investigación guiada y de síntesis, se afianzaron las habilidades de ordenar números de dos dígitos por decenas y entre decenas, incluso cuando se colocaban en orden invertido los dos dígitos, llevando a que más del 74% de los estudiantes de ambos grupos alcanzaran el nivel 2.



Código G1. Determina si un número es mayor o menor que 5 o 10, también qué tan mayor o menor es (mucho o poco).  
Código G2. Ordena números de dos dígitos (mayor que, menor que o igual que) por decenas ( $35 > 25$ ).  
Código G3. Ordena números de dos dígitos (mayor que, menor que o igual que) entre decenas ( $35 < 37$ ).  
Código G4. Ordena números de dos dígitos, incluso se invierte el orden de los dígitos del numeral.

Figura 10. Resultados Subcategoría "Relación entre números"

En resumen, la mayor parte de los estudiantes del Grupo1 comenzaron la fase exploratoria en un nivel inferior al nivel 1 (previo al valor posicional) en las subcategorías "partición", "Agrupamiento", "relación entre números", y en nivel 1 para la subcategoría "conteo", esto indica que los estudiantes del Grupo1 aún estaban en el proceso de formación de la capacidad de operar con unidades simples. Los estudiantes

del Grupo 2 presentaron nivel 1 (previo al valor posicional) en las habilidades de conteo, partición y relación entre números y un nivel inferior al nivel 1 en la habilidad de agrupamiento. Este elevado porcentaje de estudiantes que no demostraban desarrollos correspondientes al nivel 1, sugiere la posibilidad de realizar futuras indagaciones más específicas para refinar los códigos y descriptores del nivel 1, o establecer y validar descriptores para un "nivel 0".

Con la implementación de la fase de investigación guiada se logró avanzar al nivel 2. El Grupo2 mostró un mayor porcentaje en este nivel, incluso con un 88% de los estudiantes en el nivel 3 de la subcategoría "relación entre números". La fase de síntesis permitió afianzar las cuatro habilidades en ambos grupos, pero se destacan altos porcentajes (82% y 85%) de estudiantes del Grupo2 en el nivel 3 de "conteo" y "relación entre números".

#### 6.4. Categoría "Dificultades asociadas al concepto de valor posicional"

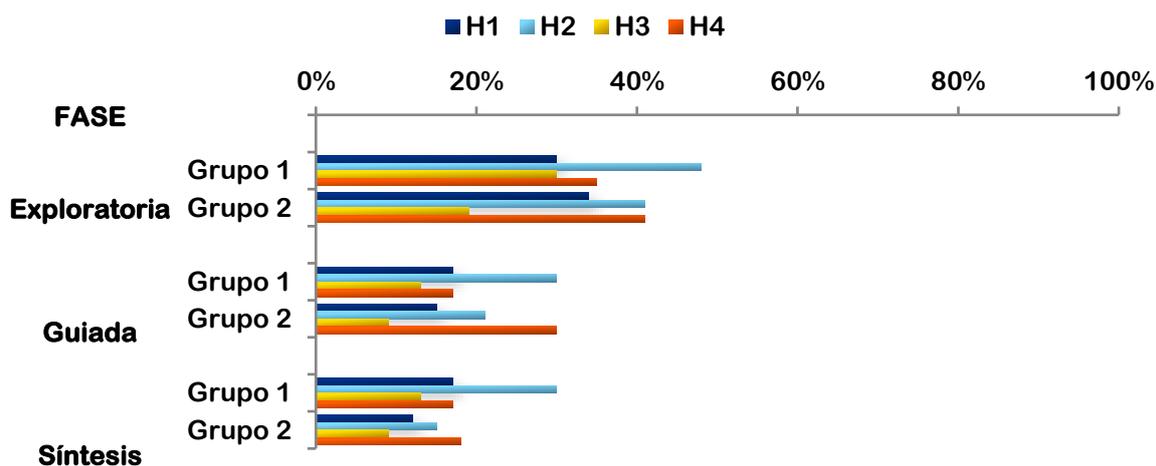
En la tabla 8 se observa el resumen de los resultados obtenidos en la lista de chequeo de dificultades asociadas al concepto de valor posicional. En la lectura de números naturales, tendían a confundir el 6 y el 9, ya que también presentan esa dificultad al escribirlos; en números de 2 dígitos, confundieron el sesenta y el setenta, ya que fonéticamente se parecen. Otra dificultad que se presentó fue que el 41, tendían a leerlo como 14, ya que estaban más familiarizados con este o preguntaban antes de decirlo porque dudaban. Con relación a la lectura de números naturales, también fue muy frecuente la inversión del "2", el "3", el "4", el "5", el "7" y el "9".

Al querer escribir un número invertían el orden de los dígitos. En las dificultades asociadas a las características del SDN se encontró que al representar números como 730, algunos estudiantes lo escribían omitiendo el 0, es decir, escribían 73; un estudiante al querer leer un número de 2 o 3 dígitos, no lograba establecer si era dos, veinte o doscientos como lo debía leer y tendía a leer los números por separado. Al representar números como 230, algunos estudiantes lo escribían 20030, al realizar la secuencia escrita algunos escribían "208", "209", "2010".

Tabla 8. Resultados en la categoría "Dificultades asociadas al concepto de valor posicional"

Grupo/Código	H1	H2	H3	H4
<i>Fase Exploratoria</i>				
Grupo 1 (%)	30%	48%	30%	35%
Grupo 2 (%)	34%	41%	19%	41%
<i>Fase de Investigación Guiada</i>				
Grupo 1 (%)	17%	30%	13%	17%
Grupo 2 (%)	15%	21%	9%	30%
<i>Fase de Síntesis</i>				
Grupo 1 (%)	17%	30%	13%	17%
Grupo 2 (%)	12%	15%	9%	18%

Durante la implementación de la unidad didáctica, en los dos grupos, se evidencia (ver figura 11) que se logró disminuir el porcentaje de estudiantes que presentaban dificultades, ya que durante este proceso necesitaban escribir y leer números permanentemente; sin embargo, en la fase de síntesis aún se encuentra un 15% de estudiantes que presentaron alguna dificultad. Consideramos que un estudio posterior, puede ayudarnos a refinar más el análisis en esta categoría.



Nota: H1. Lectura de los números naturales; H2. Escritura de los números naturales; H3. Asociadas a las características del SDN; H4. Relacionadas con el cero.

Figura 12. Resultados de Categoría "Dificultades asociadas al Concepto de Valor Posicional"

## 6.5. Análisis de la implementación de la Unidad Didáctica

A continuación, se presenta el análisis realizado a partir de las observaciones recopiladas en la implementación de cada una de las fases de la unidad didáctica, teniendo en cuenta los propósitos de cada actividad y su cumplimiento, explorando el sentido general de los datos, partiendo de las observaciones de las situaciones que se presentaron dentro del aula, la retroalimentación producto de la nueva revisión de cada uno de los instrumentos, para documentar paso a paso el proceso de análisis.

### 6.5.1. Fase exploratoria

*Actividad 1. "¿Qué sabemos sobre el universo y las estrellas?"* Los estudiantes mostraron interés en el tema, participaron activamente y querían escuchar las intervenciones de los compañeros. Los videos, "Como atrapar una estrella" y "¿De qué están hechas las estrellas?", cautivaron su atención; algunos estudiantes demostraron algunos conocimientos sobre el tema de las estrellas y constelaciones. En las preguntas o videos que se plantearon se observó lo siguiente:

Pregunta 1: tenían diversas concepciones acerca de lo que es el universo.

Pregunta 2: expresaron distintas ideas acerca del tamaño del universo, usando términos como grande, gigante, muy grande.

Pregunta 3: comunicaron lo que para ellos era la cantidad de estrellas que podía haber en el universo, utilizando diferentes términos como: muchas, muchísimas, infinito. Algunos estudiantes utilizaron números: miles, millones, mil novecientos cincuenta y cuatro, lo que para ellos significaba gran cantidad.

Video 1: evidenciaron el gran interés sobre el tema, ya que todos los estudiantes estuvieron muy atentos y contestaron bien las preguntas planteadas.

Video 2: En la pregunta 2: ¿Las estrellas son del mismo tamaño?, algunos niños seguían con la concepción de las estrellas tienen el mismo tamaño a pesar de la explicación del video. En la 3ª pregunta la mayoría de estudiantes expresaron no saber que era un observatorio o planetario; a partir de esto, algunos fueron al planetario con sus padres.

*Actividad 2. "Veo, pienso y me pregunto sobre las estrellas".* Se observó que a los estudiantes se les dificulta diferenciar entre lo que "ven" y "piensan". En el momento "VEO" de la rutina, los estudiantes describieron detalladamente la imagen teniendo en cuenta: color, tamaño, formas, lugar, tiempo, prendas de vestir, objetos y términos de cantidad (muchas estrellas, varias estrellas, hartas estrellas) algunos contaron las estrellas y dijeron la cantidad de estrellas que había, otros expresaron que estaban reunidas por grupos y que estaban ordenadas. En el PIENSO, la mayoría de estudiantes seguían

expresando lo que observaban, se realizó retroalimentación sobre la diferencia entre el “veo” y el “pienso”, luego lograron comprender la diferencia y empezaron a comunicar lo que pensaban utilizando diversidad de expresiones. En el PREGUNTO, se les dificulta plantear preguntas, pocos niños participaron, pero los pocos que lo hicieron plantearon algunas preguntas que en su mayoría no estuvieron relacionadas con la cantidad de estrellas. A partir de la pregunta ¿cuántas estrellas hay?, se vieron en la necesidad de buscar una estrategia eficaz para realizar el conteo de las estrellas. Esta actividad hizo evidente la importancia de utilizar las rutinas de pensamiento en nuestras prácticas pedagógicas, para propiciar que los estudiantes exterioricen lo que piensan y demuestren su nivel de comprensión.

#### 6.5.2. Fase de investigación guiada

*Actividad 3. Fabricando estrellas.* Mostraron gran interés por jugar a la fábrica, estaban entusiasmados por ser la fábrica que mayor producción alcanzara. Se notó el interés en trabajar en equipo por un bien común, se distribuyeron funciones para una mejor producción, esto se evidenció en la repartición de tareas, uno dibujaba las estrellas, otro las cortaba y otros las marcaban con un distintivo de la fábrica. Luego, el grupo (“la fábrica”) reunió todas las estrellas que realizaron en el tiempo establecido y las contaron, después en el tablero cada fábrica registró la cantidad de estrellas que fabricaron, a partir de esta información surgieron las siguientes preguntas: ¿cuál fábrica elaboró más estrellas?, ¿cuál fábrica elaboró menos?, ¿cuáles fábricas elaboraron la misma cantidad de estrellas?

En esta actividad se evidenció que los estudiantes iniciaron el conteo, de uno en uno, a partir de la cantidad de estrellas fabricadas, es decir, operaron con unidades simples, no hicieron agrupamiento de las estrellas para ser contadas fácil y rápidamente y compararon las estrellas fabricadas entre un grupo y otro. Una vez que se realizó la retroalimentación por parte de las profesoras, se logró que los estudiantes realizaran agrupamientos de cinco o diez estrellas para facilitar el conteo, así iniciaron el conteo de cinco en cinco y de diez en diez.

*Actividad 4. Ganando estrellas.* Se observó gran interés de los niños al jugar con los dados y al tener la oportunidad de ganar, dependiendo de la cantidad que les salía, fue necesario escribir en el tablero las reglas del juego, después del esto el juego fluyó. En las reglas se estableció que solo eran tres rondas, pero fue tanto el interés evidenciado, que fue necesario extender el tiempo de juego. Al final, se plantearon preguntas: ¿cuántas estrellas tenían al comienzo?, ¿cuántas ganaron?, ¿cuántas perdieron?, buscando el planteamiento y resolución de problemas de estructura aditiva que le dieran sentido a las acciones de conteo, agrupamiento, partición y comparación.

*Actividad 5. Agrupando estrellas.* La intención de la actividad era desarrollar agrupamientos para dar cuenta de la cantidad de elementos de una colección.

Tarea 1: la mayoría de los estudiantes realizó agrupamientos y conteo de diez en diez. Descubrieron que era más fácil contar de diez en diez, y no uno a uno, también fue muy fácil para ellos escoger el sobre donde tenían que depositar las estrellas.

Tarea 2: esta tarea sirvió para reforzar el concepto de unidad y decena, cuando se le pedía al grupo realizar la constelación (ver figura 13) con las indicaciones dadas se observó que no tenían mayor dificultad para formarlas, indicando un progreso en la comprensión del valor posicional.



*Figura 13.* Fase de investigación guiada. Actividad 5. Tarea 2. Los estudiantes forman constelaciones, agrupando 10 estrellas y las nombran

Tarea 3: fue más fácil comparar números usando material concreto, y lograron establecer comparaciones (ver figura 14) entre números teniendo en cuenta las unidades, decenas y centenas. Algunos niños justificaban sus respuestas teniendo en cuenta el valor posicional de las cifras.



Figura 14. Fase de investigación guiada. Actividad 5. Tarea 3. Los estudiantes relacionaron y compararon números

Tarea 4: Como tenían que formar constelaciones y nombrarlas, demostraron mucho interés; había varias figuras de constelaciones con las que más se identificaban (carros, mariposas, flores, etc.) y que ellos querían formar. Así que la agrupación surgió "naturalmente" en ese contexto.

*Actividad 6. Practicando con las estrellas.* Se observó en el desarrollo de las seis guías propuestas diferentes dificultades que presentan los niños, como esta fue una actividad más individual que grupal, se pudo detectar con más precisión cual era el nivel de comprensión en el que estaba cada niño, también fue una forma de evaluación para observar los avances en los estudiantes que habían presentado dificultades previamente.

Tabla 9. Resultados de actividad 6 "Practicando con las estrellas"

Actividades individuales / desempeños	Grupo 1 (%)			Grupo 2 (%)		
	Alto	Básico	Bajo	Alto	Básico	Bajo
Contando estrellas	61	26	13	64	15	21
Veo, veo ¿Cuántas cosas ves?	83	17	0	70	15	15
Cuenta estrellas	74	13	13	67	21	12
¿Cuántas estrellas son?	96	0	4	61	24	15
Suma de estrellas	78	9	13	61	24	0
Valor posicional	65	13	22	45	30	24
<i>Actividades Grupales</i>						
¿A qué número corresponde?	57	26	17	52	24	24
Une según corresponda	69	23	8	55	27	18
Conteo de Universos	48	30	22	61	24	15

En la tabla 9, se presentan las frecuencias relativas de los resultados de valoración de los trabajos escritos realizados por los estudiantes. Se muestran los niveles de desempeño y el porcentaje de estudiantes en cada uno. Por ejemplo: el 61% (Grupo 1) presentó alto desempeño en la actividad "Contando estrellas". Se observa que un porcentaje importante (entre 45% y 96%) de estudiantes de los dos grupos alcanzaron un desempeño alto, pero son inferiores a los porcentajes en las listas de chequeo, lo que cual indica que se hace necesaria la retroalimentación para que los estudiantes que se encuentran en desempeño básico y bajo alcancen la comprensión de valor posicional, y logren llegar al nivel alto.

*Actividad 7. ¿Cómo podemos formar un universo?* Esta actividad fue bastante divertida e interesante para los estudiantes, ya que, con el trabajo previo, algunos grupos no solo se limitaron a representar con el material disponible un solo universo solicitado, sino que realizaron un concurso entre ellos para ver cuál

le adivinaba al otro el valor de su universo. Observando el desarrollo de la actividad se pudo analizar que en general los estudiantes alcanzaron el nivel 2 en la comprensión de la base 10 (Silva, 2005). También se evidenció que fueron capaces de contar decenas como si fueran unidades sencillas, formaron y contaron decenas y unidades simples. También formaron centenas usando decenas.

### *6.5.3. Fase de síntesis*

Se evidenció cómo los estudiantes representaban por medio del universo que crearon, números de tres cifras, en esta actividad estuvieron muy interesados: querían que el universo de ellos fuera el del número más grande, para utilizar más estrellas, constelaciones y galaxias. Al finalizar la actividad, se realizó una exposición donde ellos observaban el trabajo realizado por sus compañeros, y jugaban a descubrir qué número estaba representando cada grupo; fue una buena la oportunidad para comparar universos, es decir, comparar las cantidades que representaban, en la comparación usaban argumentos referidos a las centenas o las decenas, lo cual es indicador de que se alcanzan los niveles de comprensión esperados.

En cuanto al alcance de las metas de comprensión al finalizar la unidad, se logró precisar que los estudiantes usaron con flexibilidad las habilidades de conteo, partición, agrupación y comparación de cantidades, para resolver problemas con operaciones básicas; hechos que se constituyen en manifestaciones de la comprensión del valor posicional. Así mismo, se evidenció que los estudiantes lograron explicar el valor posicional de los números, es los espacios de socialización abiertos en las actividades propuestas en la unidad, también usaron la expresión verbal y escrita para explicar sus procedimientos en las actividades grupales o individuales.

## **7. Conclusiones y reflexiones**

El trabajo de investigación confirma la complejidad del aprendizaje y enseñanza del concepto de valor posicional, expuesto por los diferentes autores e investigaciones consultadas, cuando expresan que a los estudiantes se les dificulta comprender el valor de un dígito en un numeral de acuerdo a la posición que ocupa en el mismo, ya que lo toman como unidades aisladas y no tienen en cuenta que el primer número de una cantidad de dos o tres cifras representa decenas o centenas; con la unidad implementada se pudo hacer frente a tales dificultades y algunos estudiantes lograron superarlas.

En relación con el diseño de la unidad didáctica, basado en la enseñanza para la comprensión (EpC), la estrategia de intervención implementada mostró que los elementos teóricos: tópico generativo, metas de comprensión, desempeños de comprensión y valoración continua, enmarcados en una estructura organizada y flexible, logró satisfacer las necesidades de las profesoras en el salón de clase, a través de su posibilidad de adaptación a los contextos y a las condiciones específicas de cada grupo; ello contribuyó a que los estudiantes lograran avances en la comprensión del concepto de valor posicional.

En el desarrollo de la fase exploratoria se pudo evidenciar el interés que muestran los estudiantes frente al tópico generativo. Ello favoreció el interés para comprometerse con el desarrollo de las fases siguientes, y avanzar en la comprensión del valor posicional. En la fase de investigación guiada se evidenciaron algunas dificultades, que fueron superadas con las actividades propuestas en la unidad. El 50% de estudiantes no había adquirido totalmente las habilidades que involucra el desarrollo del concepto de valor posicional, no alcanzaban el nivel 1, propuesto por Jones et al. (1996); al finalizar esta fase, el 61% (Grupo1) y 85% (Grupo2) de los estudiantes, identificaron claramente qué representaban las decenas y las centenas dentro de un número, esto demostró que esta fase fue fundamental para lograr avances en las habilidades asociadas a la adquisición y desarrollo del concepto de valor posicional.

En curso de la implementación se evidenciaron diferentes estrategias de conteo, partición, agrupación y comparación de cantidades. A partir de ello, se logró establecer el nivel de desarrollo de habilidades asociadas al concepto de valor posicional con el que iniciaron los estudiantes de segundo de ambos

colegios, y su progreso durante el desarrollo de la unidad didáctica. Los resultados demuestran que los estudiantes iniciaron en un nivel previo al nivel 1 propuesto por Jones et al (1996) y que al final de la unidad didáctica el 82% (Grupo 1) y 85% (Grupo 2) de los estudiantes, se encontraron en el nivel 3, lo cual demuestra la pertinencia de la estrategia de enseñanza diseñada e implementada para favorecer avances la comprensión del concepto de valor posicional.

Si bien es cierto que se cumplieron los objetivos propuestos, en el marco del diseño de investigación-acción, reflexionar sobre nuestra práctica fue un ejercicio constante, y conllevó una continua actualización en temas conceptuales, didácticos y pedagógicos para mejorar el discurso, la enseñanza y aprendizaje. Los niños y niñas están en contacto con las nociones matemáticas desde muy pequeños, en la relación diaria con su entorno y el lenguaje que escuchan de sus padres, familia y profesores. No se puede pensar que sólo tienen acceso a estas nociones al ingresar al jardín. Ellos escuchan, hablan de los números, peso, tamaño, cantidad,...; en los juegos comparan, agrupan, separan y realizan operaciones sencillas, pero básicas, con alguna intencionalidad. Ese necesario análisis sobre los conocimientos previos es un aspecto a mejorar en la unidad diseñada, ¿por qué los niños estaban en un "nivel 0"? las actividades diseñadas en la fase exploratoria deberían contribuir más a la identificación de esas experiencias previas a la comprensión del valor posicional, es decir, tales experiencias no pueden omitirse en la escuela, cuando llegan los niños a las aulas; es deber del profesor, reconocerlas, analizarlas, retomarlas y fortalecerlas.

Favorecer la comprensión del valor posicional, implica establecer estrategias didácticas que permitan fortalecer las habilidades previas, por ello consideramos que este tema no se debe abordar solo en uno o dos grados, creemos que las habilidades previas de conteo, partición, agrupación y comparación de cantidades se deben abordar desde la primera infancia, en consonancia con los hallazgos de este estudio. En ese sentido, se llama la atención sobre la extensión en el tiempo que requiere la comprensión de valor posicional, aspecto que también se constituye en oportunidad de mejora de la unidad diseñada, ya que las actividades se concentraron en un lapso muy corto; frente a esto, se recomienda ampliar los tiempos de implementación entre fases, y organizar la enseñanza y el aprendizaje del valor posicional por "ciclos en espiral": en un primer ciclo proponerse llegar al nivel 1, en un segundo ciclo (como el diseñado en esta unidad), avanzar hasta el nivel 3; luego hacer un ciclo para el cuarto nivel, y finalmente hacer uno para el nivel de comprensión esencial, tales ciclos podrían estructurarse en tres fases cada uno, en concordancia con el marco de EpC.

Esta reflexión sobre la organización curricular del valor posicional, nos llevó a realizar una revisión de los programas de matemáticas en ambas instituciones, revisión que nos ha planteado el reto adicional de integrar la comprensión de este aspecto específico del pensamiento numérico, con el desarrollo de otras habilidades propias de otros tipos (variacional, geométrico, métrico, aleatorio). En ese sentido, la comprensión y uso flexible del concepto del valor posicional, pueden ser vistos como "motores" para desarrollo de otras habilidades y aprendizajes; por ejemplo, al priorizar la enseñanza y aprendizaje del valor posicional, sobre los algoritmos de las operaciones básicas, es posible favorecer las habilidades de agrupar-partir, descomponer-recomponer, que son nucleares tanto en la estructura aditiva, como en la multiplicativa. Las anteriores reflexiones han suscitado dos interrogantes que consideramos deben seguir discutiéndose en el ámbito de la educación matemática en la infancia: ¿cuáles son las comprensiones matemáticas esenciales que esperamos en esta etapa escolar? y ¿cómo se pueden articular esas comprensiones con las esperadas en otros dominios del conocimiento?

## Referencias

- Alba, J. y Quintero, A. (2016). ¿Cómo cuentan los niños al momento de resolver problemas? *Infancias Imágenes*, 15(1), 129-138. <https://doi.org/10.14483/udistrital.jour.infimg.2016.1.a09>
- Alsina, A. (2016) El currículo del número en educación infantil. Un análisis desde una perspectiva internacional. *PNA*, 10(3), 135-160.
- Andrade, S. y Valdemoros, M. (2014). Enseñanza experimental del sistema de numeración decimal y la representación cognitiva del número. CLAME. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. Capítulo 2. Propuestas para la enseñanza de las matemáticas. México.
- Angulo, A. y Herrera, L. (2009). *El aprendizaje de nociones matemáticas básicas por parte de personas con discapacidad intelectual. Una propuesta para la enseñanza del núcleo temático "Estructura Aditiva" haciendo uso del software*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Baroody, A. (1990). How and when should place-value concepts and skills be taught?. *Journal for research in mathematics education*, 21(4), 281-286. <https://doi.org/10.2307/749526>
- Baturo, Annette R (2002) Number sense, place value and "odometer" principle in decimal numeration: Adding 1 tenth and 1 hundredth. En Cockburn, Anne D. y Nardi, Elena, Eds. *Proceedings 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 2, pages pp. 65-72, Norwich, UK.
- Blythe, T. (1999). *La enseñanza para la comprensión: guía para el docente*. Argentina: Paidós.
- Blythe, T., & Perkins, D. (2006). *¿Qué es la comprensión?* Retrieved 2015 1°-Abril from Colombia Aprende: <http://www.colombiaprende.edu.co/html/docentes/1596/article-171785.html>
- Browning, S. T., y Beauford, J. E. (2012). Language and number values: The influence of number names on children's understanding of place values. *Investigations in Mathematics Learning*, 4(2), 1-24.
- Bruno, A. y Noda, A. (2014). Comprensión del sistema de numeración decimal de una alumna con síndrome de Down. En González, M. T., Codes, M., Arnau, D. y Ortega, T. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 177-186). Salamanca: SEIEM
- Castaño, J. (2008). Una Aproximación al proceso de comprensión de los numerales por parte de los niños: relación entre representaciones mentales y representaciones semióticas. *Universitas Psychologica Pontificia Universidad Javeriana*, 7(3), 895-907.
- Chandler, C., & Kamii, C. (2009). Giving Change When Payment Is Made with a Dime: The Difficulty of Tens and Ones. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 97-118.
- Elliot, J. (2000). *La Investigación - Acción en Educación*. Madrid: Ediciones Morata, S.L. Cuarta edición.
- Fischer, F. (1990). A Part-Part-Whole Curriculum for Teaching Number in the Kindergarten. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(3), 207-215. <https://doi.org/10.2307/749374>
- Flores, P., y Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Madrid - España: Ediciones Pirámide. Grupo Anaya, S.A.
- Fuson, K., Carroll, W., y Drucek, J. (2000). Achievement Results for Second and Third Graders Using the Standards-Based Curriculum Everyday Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(3), 277-295. <https://doi.org/10.2307/749808>
- Fuson, K., Wearne, D., Hiebert, J., Murray, H., Human, P., Olivier, A., Carpenter, T., y Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 130-162. <https://doi.org/10.2307/749759>
- Gallego, G., y Uzuriaga, V. (2015). Implicaciones en la comprensión del Valor posicional. CIAEM. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, 1-10.
- Hernández, R., Fernández, C y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.
- Horne, M., y Livy, S. (2006). *Young children developing place value understandings*. En: Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 313-320. Prague: PME. 3 - 313
- Jones, G., Thornton, C., Putt, I., Hill, K., Mogill, T., Rich, B., y Van Zoest, L. (1996). Multidigit number sense: A framework for instruction and assessment. *Journal for research in mathematics education*, 27(3), 310-336. <https://doi.org/10.2307/749367>
- Kamii, C., & Joseph, L. (1988). Teaching place value and double-column addition. *Arithmetic teacher*, 35(6), 48-52.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.

- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- National Research Council of the National Academies (2015). Contenido matemático fundacional para el aprendizaje en los primeros años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 4(2), 32-60
- Perkins, D. (1995). *La Escuela Inteligente*. Barcelona: Gedisa.
- Perkins, D. (2003) ¿Qué es la comprensión?. En: M. Stone Wiske (comp.). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*, Buenos Aires: Paidós.
- Perkins, D., y Blythe, T. (1994). Putting understanding up front. *Educational Leadership*, 51, 4-4.
- Ramírez, C. (2011). Aprendizaje del valor posicional en estudiantes de grado sexto. Tesis de Maestría sin publicar. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias .
- Ramírez, M., y De Castro, C. (2012). El aprendizaje de algunos aspectos del sistema de numeración decimal a través de problemas aritméticos verbales al inicio de educación primaria. En Arnau, D., Lupiáñez, J. L. y Maz, A. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 97-109). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.
- Ramírez, M. y De Castro, C. (2014). Comprensión de las decenas y aplicabilidad de las operaciones en problemas aritméticos verbales. En González, M. T., Codes, M., Arnau, D. y Ortega, T. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 533-542). Salamanca: SEIEM.
- Salazar, C.Y. y Vivas, Y.A. (2013). *Enseñanza del sistema de numeración decimal a través de la integración de material manipulativo*. Tesis de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Educación Matemática sin publicar. Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.
- Silva, M. (2005). *Place value activity package. Activities humbly borrowed from various sources*. Recuperado el 31/10/2015 de: <http://pickettsmill.typepad.com/files/place-value-activity-pack.pdf>  
[educacion.gov.co/1621/articles-339975\\_matematicas.pdf](http://educacion.gov.co/1621/articles-339975_matematicas.pdf)
- Terigi, F., & Wolman, S. (2007). Sistema de Numeración: Consideraciones acerca de su Enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación*, 59-83.
- Thanheiser, E. (2009). Preservice elementary school teachers' conceptions of multidigit whole numbers. *Journal for Research in mathematics Education*, 251-281.
- Thomas, G., & Tagg, A. (2005). Evidence for expectations: Findings from the Numeracy Project longitudinal study. *Findings from the New Zealand Numeracy Development Project 2004*, 21-34.
- Varelas, M., & Becker, J. (1997). Children's Developing Understanding of Place Value: Semiotic Aspects. *Cognition and Instruction*, 15(2), 265-286. [https://doi.org/10.1207/s1532690xci1502\\_4](https://doi.org/10.1207/s1532690xci1502_4)
- Wright, R. J., Stanger, G., Stafford, A. K., & Martland, J. (2002). *Teaching number: Advancing children's skills and strategies*. Sage.
- Young-Loveridge, J. (1999). The acquisition of numeracy. *SET: Research information for teachers*, 1, 12.
- Zúñiga, M. (2014). El aprendizaje de la descomposición aditiva en la Educación Infantil: Una propuesta para niños y niñas de 5 y 6 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(2), 84-113.

Alejandro Angulo Escamilla. Profesor de la Facultad de Educación, Maestría en Pedagogía (Énfasis en docencia para el desarrollo del Pensamiento Matemático) Universidad de la Sabana (Colombia). Profesor de Bachillerato Internacional en el Gimnasio Vermont (Bogotá). Licenciado en Matemáticas. Magister en Docencia de las Matemáticas. Líneas de Investigación: Formación de profesores en ejercicio, Desarrollo del pensamiento y cultura estadísticos, Enseñanza y aprendizaje de la demostración en geometría.

Email: [henry.angulo@unisabana.edu.co](mailto:henry.angulo@unisabana.edu.co)

Natalia Pulido Peñaloza. Profesora de Educación Básica Primaria de la Secretaría de Educación Distrital de Bogotá (Colombia). Magister en Pedagogía Universidad de la Sabana (Colombia). Licenciada en Educación Especial. Línea de Investigación: Desarrollo de pensamiento numérico.

Email: [natyprincess13@hotmail.com](mailto:natyprincess13@hotmail.com)

Esperanza Molano Rodríguez. Profesora de Educación Básica Primaria de la Secretaría de Educación Distrital de Bogotá (Colombia). Magister en Pedagogía Universidad de la Sabana (Colombia). Licenciada en Biología. Línea de Investigación: Desarrollo de pensamiento numérico.

Email: [emolanor@yahoo.com](mailto:emolanor@yahoo.com)

## Apéndice 1

### Lista de chequeo actitudinal

Aspectos a valorar	Sí	A veces	No
He mostrado interés por aprender el tema.			
Participo en las actividades propuestas.			
Muestro respeto por acciones y opiniones de mis compañeros.			
Realizo preguntas sobre conteo.			

### Lista de chequeo de las dificultades asociadas al concepto de valor posicional

Aspectos a valorar	Sí	No	¿Cuál? Especificar
Dificultades asociadas al concepto de valor posicional. El estudiante presenta dificultades en:			
Lectura de los números naturales.			
Escritura de los números naturales.			
Asociadas a las características del SDN			
Relacionadas con el cero.			

### Lista de chequeo de habilidades asociadas a la comprensión del concepto de valor posicional

Aspectos a valorar en cada uno de los estudiantes	Sí	No
<i>Comprensión de la base 10. El Estudiante...</i>		
Se centra en cada uno de los elementos de una colección por separado.		
Ve la decena como una colección de objetos, suma y resta y lo expresa verbalmente, pero usa representaciones concretas.		
Ve la decena como una colección de objetos, suma y resta y lo representa simbólicamente.		
<i>Habilidades relacionadas con la comprensión del valor posicional. El estudiante.....</i>		
<i>Conteo</i>		
Cuenta, de uno en uno, a partir de una cantidad dada.		
Determina la numerosidad exacta de una ...		
Cuenta grupos de diez como si fueran unidades sencillas		
Forma y cuenta grupos de diez y sobrantes (reconoce las decenas-unidades).		
Cuenta progresiva o regresivamente para sumar o restar mentalmente.		
<i>Partición</i>		
Otorga la categoría de contado o no contado a un objeto de la colección.		
Forma dos grupos entre el conjunto de objetos que quiere contar.		
Forma de diferentes maneras números como el "cinco", "el ocho" y el "diez".		
Forma de diferentes maneras números de dos dígitos.		
Forma una centena usando decenas.		
<i>Agrupamiento</i>		
Estima el número de objetos en un grupo utilizando el 10 y el 5 como referencia.		
Agrupar una colección para ser contada fácil y rápidamente.		
Estima el número de objetos en un grupo usando "la unidad apropiada".		
Recurre al conteo para corroborar si su estimación es correcta y agrupa para facilitar la verificación.		
Determina si un número está dentro del rango de alguna decena (Si el "37" está dentro de la decena del treinta).		
Cuenta de diez en diez y de cinco en cinco		
<i>Relación entre números</i>		
Determina si un número (entre 1 y 10) es mayor, menor o igual que 5 o 10..		
Ordena números de dos dígitos (mayor que, menor que o igual que) por decenas (35 > 25).		
Ordena números de dos dígitos (mayor que, menor que o igual que) entre decenas (35 < 37).		
Ordena números de dos dígitos (mayor que, menor que o igual que), sobre todo cuando se invierte el orden de los dígitos del numeral.		