Capítulo 2

Puntos críticos de la función cúbica

Guillermo Guasca, Alexandra Bulla, Diego Medina,
Patricia Cifuentes y Rolando Muñoz

En este capítulo, presentamos el trabajo desarrollado durante el proceso de formación en la Maestría en Educación Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de los Andes. Nos basamos en el modelo del análisis didáctico (Gómez, 2018) para diseñar, llevar a la práctica y evaluar una unidad didáctica que contribuya al aprendizaje de los conceptos y procedimientos asociados a la optimización de funciones cúbicas; en particular, la identificación de sus puntos críticos. El propósito de este capítulo es brindar a los profesores los elementos suficientes para implementar la unidad didáctica en el aula.

De acuerdo con nuestra experiencia, encontramos que la enseñanza de la optimización de funciones se aborda como una aplicación de procedimientos en representaciones simbólicas que está alejada de situaciones reales. Esta forma de proceder impide que los estudiantes comprendan los conceptos y procedimientos matemáticos que hay alrededor de la optimización de funciones, las formas de representarla y su utilidad para resolver situaciones de la vida real. Estas razones nos llevaron a diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica, con el fin de contribuir al aprendizaje de la optimización de funciones. Particularmente, concretamos el tema de la unidad didáctica en los puntos críticos de funciones cúbicas.

Establecimos que este tema es importante porque permite contribuir al desarrollo de diferentes pensamientos y sistemas descritos en el documento de los estándares básicos de competencias en matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Por ejemplo, el estudio de los puntos críticos permite analizar la variación de la función. En esta medida, el tema contribuye al desarrollo del pensamiento variacional. También, encontramos que el tema es importante porque aborda estándares particulares para grado undécimo. Por ejemplo, el tema se relaciona con el estándar asociado a interpretar la noción de la derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una recta, así como el desarrollo de métodos para hallar las derivadas de funciones básicas. De igual manera, identificamos que el estudio de los puntos críticos es oportuno porque se incluye en el plan de estudios del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional. Consideramos que este tema se puede abordar con un grupo de estudiantes de grado undécimo que cuenten con los conocimientos previos requeridos y un uso mínimo del programa GeoGebra.

El capítulo está organizado en cuatro apartados. En primer lugar, realizamos un acercamiento a los elementos relacionados con el análisis didáctico que el profesor debe conocer para implementar la unidad didáctica. Estos aspectos están asociados al contenido, a las expectativas de aprendizaje, a las limitaciones de aprendizaje y al sistema de evaluación de la unidad didáctica. Posteriormente, presentamos el análisis de instrucción por medio de las tareas de aprendizaje y de evaluación. Allí describimos los diferentes elementos que caracterizan cada tarea de aprendizaje. Por último, presentamos la evaluación final con su respectiva rúbrica.

1. Análisis de contenido

Consideramos importante conocer y profundizar en las características matemáticas de las estructuras que componen un contenido matemático para comprender su significado. Por lo tanto, en este apartado, presentamos los conceptos y procedimientos que están relacionados con los puntos críticos de la función cúbica. Denominamos estructura conceptual a estos conceptos y procedimientos, junto con las posibles relaciones que se pueden establecer entre ellos. También, evidenciamos las diferentes formas de representar los puntos críticos y las posibles relaciones que se pueden establecer entre esas representaciones. Finalmente, describimos los diferentes fenómenos que dan sentido a este concepto matemático.

1.1. Estructura conceptual

Identificamos que los puntos críticos de la función cúbica están relacionados con los coeficientes de la expresión general mediante la expresión $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$.

Encontramos que los conceptos y procedimientos alrededor de los puntos críticos tienen que ver con el tipo de función cúbica. En primer lugar, las funciones cúbicas que no tienen o tienen un solo punto crítico están relacionadas con funciones en las que el discriminante es menor que cero, es decir, cuando $b^2 - 3ac < 0$. En este caso, relacionamos los conceptos de concavidad y punto de inflexión. En segundo lugar, identificamos que las funciones cúbicas que tienen dos puntos críticos están relacionadas con funciones en las que el discriminante es mayor que cero, es decir, cuando $b^2 - 3ac > 0$. Aquí, relacionamos los conceptos de monotonía y la idea de extremo relativo. Por otro lado, encontramos que la solución de la expresión $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ es un procedimiento que permite hallar los puntos críticos de la función cúbica. Otro procedimiento que identificamos está asociado al uso del criterio de la primera derivada. En la figura 1, presentamos las ideas consideradas en relación con los conceptos y procedimientos alrededor de los puntos críticos de la función cúbica.

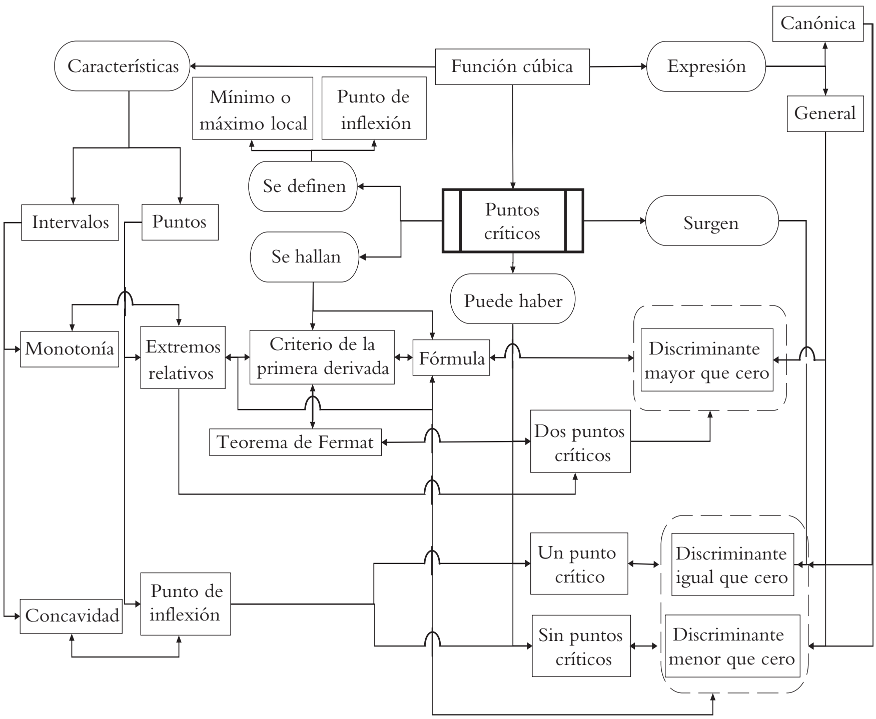


Figura 1. Conceptos y procedimientos del tema de puntos críticos de la función cúbica

1.2. Sistemas de representación

Establecimos que las representaciones de los puntos críticos tienen que ver con expresiones simbólicas, parejas ordenadas, tablas, gráficas, representaciones geométricas y ejecutables. En la figura 2, presentamos un esquema con las representaciones del tema y las relaciones entre esas representaciones.

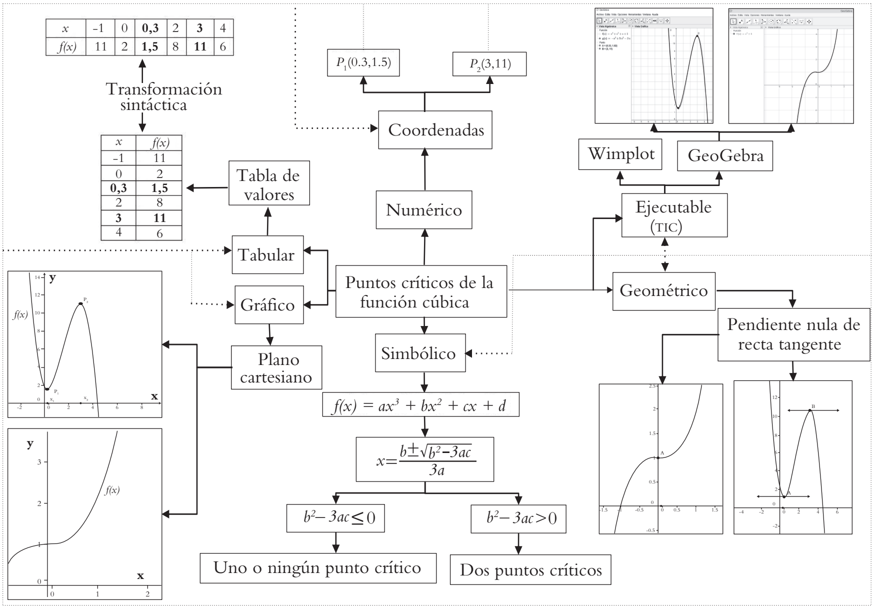


Figura 2. Representaciones del tema

La representación simbólica del tema parte de la expresión general de la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Los coeficientes de esta expresión están asociados a los puntos críticos mediante la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$. Otra representación de los puntos críticos tiene que ver con parejas ordenadas $(x_1, f(x_1))$. En este caso, el primer elemento de la pareja ordenada se relaciona con el valor x_1, de la variable independiente, que hace que el segundo valor, $f(x_1)$ de la variable dependiente, sea máximo o mínimo. Los puntos críticos también se pueden representar mediante tablas de valores. La tabla dispone de dos columnas: la primera para organizar los valores que toma la variable independiente x_1 y la segunda para los valores de la variable dependiente $f(x_1)$. La representación geométrica de los puntos críticos tiene que ver con la identificación de puntos de la función cúbica en los que la pendiente de la recta tangente es nula. La representación gráfica está relacionada con los puntos en el gráfico —en un intervalo— en los que la función $f(x)$ alcanza el máximo o mínimo valor o en los puntos en los que hay un cambio de concavidad. Por último, identificamos la representación ejecutable de los puntos críticos de la función cúbica mediante el uso de un *software* como GeoGebra o Wimplot. En este caso, el carácter dinámico de la representación ejecutable permite establecer relaciones entre las diferentes representaciones de los puntos críticos de la función cúbica.

1.3. Fenomenología

Los fenómenos que dan sentido al tema privilegian la visión funcional del concepto matemático seleccionado. El significado y la interpretación de los puntos críticos de una función cúbica se pueden usar para describir y analizar fenómenos de la vida cotidiana. Los puntos críticos son características de las funciones cúbicas que permiten clasificar y analizar dichos fenómenos. Por esa razón, identificamos los fenómenos por medio de dos procesos: (a) el proceso de indagar por situaciones problema que permiten ser modeladas por medio de una función cúbica; y (b) el proceso de clasificar dichas situaciones problema según la cantidad de puntos críticos de la función modelada.

Algunos de los fenómenos que se modelan a partir del concepto de punto crítico se pueden clasificar en tres grupos de acuerdo con sus características: primero, la descripción de variaciones para referirse a las variaciones de temperaturas, del crecimiento de un feto y del comportamiento de un aerogenerador; segundo, el análisis de concavidad para agrupar el análisis del movimiento de los planetas, de las ondas cerebrales, del ritmo cardiaco y de la anemia; y, tercero, la optimización por medio del análisis de crecimiento y decrecimiento, para incluir la maximización o minimización del volumen de un sólido, la maximización de las utilidades de una empresa y la minimización de los costos de producción de una empresa. Esta clasificación genera los contextos fenomenológicos.

El análisis de las características comunes entre los fenómenos identificados se traduce en la necesidad de estudiar la cantidad y las características de los puntos críticos de la función cúbica. El estudio de cada uno de los contextos fenomenológicos evidencia tres subestructuras. Según la estructura matemática del tema, una función cúbica puede tener dos puntos críticos, solo un punto crítico o no tener puntos críticos. Con respecto a la característica, es necesario realizar este estudio a partir del discriminante de la función cúbica,

$b^2 - 3ac$, que surge de la forma algebraica $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$. El discriminante permite identificar tres posibles opciones: (a) $b^2 - 3ac > 0$, que se traduce en una función cúbica con dos puntos críticos, uno de ellos máximo y el otro mínimo; (b) $b^2 - 3ac < 0$, lo que significa que la función cúbica tiene un punto crítico, denominado punto de inflexión; y, (c) $b^2 - 3ac = 0$, que implica una función cúbica sin puntos críticos. De esta manera, se definen tres subestructuras matemáticas para el concepto de puntos críticos de la función cúbica: dos puntos críticos, un punto crítico y sin puntos críticos.

Por su parte, el marco PISA 2012 menciona que, en la acción de resolver problemas, es posible clasificar el desafío de acuerdo con los contextos de la vida en los que se caracteriza el problema (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España, 2013). Con base en la idea anterior, es posible organizar los fenómenos propuestos para el tema de los puntos críticos de la función cúbica en contextos de carácter personal, social, profesional o científico. Por ejemplo, una situación en la que se requiera obtener las utilidades máximas de una empresa necesita que el individuo (o grupo de individuos) identifique, en la función de utilidad, los valores en la variable independiente que hacen que la variable dependiente alcance su máximo valor. Por esa razón, se puede relacionar el fenómeno de las utilidades de una empresa con un contexto personal. En la figura 3, presentamos la organización de los fenómenos que dan sentido a los puntos críticos de la función cúbica.

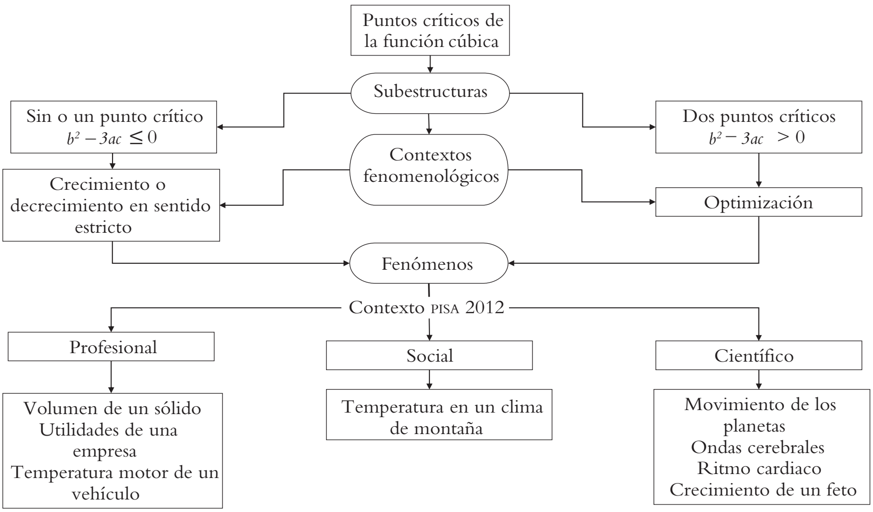


Figura 3. Fenomenología del tema

Los conceptos y procedimientos que giran en torno a los puntos críticos, las diferentes formas de representarlos y los posibles fenómenos que modelan son importantes porque permiten establecer y describir lo que esperamos que el estudiante aprenda sobre los puntos críticos. A continuación, abordamos esta cuestión.

2. Análisis cognitivo

En este apartado, describimos los aprendizajes esperados en términos de expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo. Las expectativas de aprendizaje se relacionan con los procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales del marco PISA 2012 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España, 2013), los objetivos de aprendizaje y los procedimientos rutinarios del tema, denominados capacidades. Las expectativas afectivas se relacionan con las actitudes de los estudiantes al enfrentarse a las tareas de aprendizaje.

2.1. Procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales

Con esta unidad didáctica, contribuimos al proceso matemático de interpretar, al llevar a los estudiantes a valorar y evaluar los puntos críticos como máximo o mínimo de acuerdo con el contexto del problema. También, buscamos contribuir al proceso de formular, porque consideramos pertinente que los estudiantes reconozcan los conceptos y las relaciones más relevantes de la situación para modelarla matemáticamente mediante una función cúbica. Finalmente, pretendemos contribuir al proceso de emplear, por la importancia que encontramos en el uso de algoritmos —como el criterio de la primera derivada o una fórmula— para calcular los puntos críticos.

Buscamos contribuir a todas las capacidades matemáticas fundamentales. No obstante, privilegiamos las capacidades de matematización y representación. Esta contribución se evidenciará al llevar al estudiante a identificar variables y modelos matemáticos para posteriormente representarlos. Asimismo, abordamos con mayor profundidad la capacidad matemática de diseño de estrategias para resolver problemas. En este caso, la contribución se presentará al inducir a los estudiantes a tomar decisiones sobre diferentes formas de abordar un problema relacionado con fenómenos de optimización.

2.2. Objetivos de aprendizaje

Los objetivos de aprendizaje para el tema abordan sus conceptos y procedimientos, sus representaciones y los fenómenos que modela. A continuación, presentamos los objetivos de aprendizaje que establecimos para nuestra unidad didáctica.

Objetivo 1. Utilizar el concepto de punto crítico para diferenciar cuándo una situación problema modelada por una función cúbica forma parte de un fenómeno de optimización o un fenómeno de crecimiento o de decrecimiento estricto.

Objetivo 2. Determinar los puntos críticos en situaciones de optimización a partir de algunas representaciones de la función cúbica y establecer relaciones entre estas representaciones.

Objetivo 3. Interpretar los puntos críticos de la función cúbica como solución de situaciones de optimización para definirlos como mínimos o máximos, al valorar su viabilidad y sus posibles limitaciones en el contexto del problema.

2.3. Capacidades

Las capacidades son procedimientos rutinarios relacionados con las posibles acciones que el estudiante ejecuta para resolver una tarea. Por ejemplo, el estudiante puede usar el criterio de la primera derivada para hallar y determinar la cantidad de puntos críticos. También, puede determinar la cantidad de puntos críticos al usar el discriminante $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$. Estos ejemplos son capacidades que el estudiante debe activar para diferenciar si una función cúbica modela un fenómeno de optimización o crecimiento o decrecimiento estricto. Presentamos el listado completo de capacidades en el anexo 1[1].

La identificación de las capacidades nos permitió delimitar las acciones que son propias del tema y los conocimientos previos que el estudiante debe poseer. Al establecer las capacidades, pudimos reflexionar sobre las posibles limitaciones que pueden impedir o entorpecer la consecución de los objetivos de aprendizaje. También, identificar las capacidades nos permitió organizar secuencias de capacidades que el estudiante ejecuta al resolver una tarea. Presentamos el listado de secuencias de capacidades en el anexo 2.

---

1 Los anexos se pueden consultar en http://funes.uniandes.edu.co/9564/.

Las secuencias de capacidades nos permitieron determinar las posibles estrategias que un estudiante puede llevar a cabo para resolver una tarea. Llamamos caminos de aprendizaje a estas estrategias de solución. Organizamos, para cada objetivo, un esquema con las secuencias de capacidades y los caminos de aprendizaje. Denominamos grafo de secuencias de capacidades del objetivo a estos esquemas.

Conocimientos previos

Establecimos un listado de conocimientos previos que los estudiantes deben poseer antes de implementar la unidad didáctica. Establecer esos conocimientos es importante en la medida en que permiten determinar hasta qué punto un procedimiento es rutinario para un estudiante. Por ejemplo, utilizar el criterio de la primera derivada para determinar el tipo de función requiere que los estudiantes conozcan y apliquen con anterioridad las reglas de derivación. El uso del discriminante de la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ requiere que los estudiantes comprendan que esta fórmula relaciona los coeficientes de la función cúbica con los puntos críticos. El listado de conocimientos previos se encuentra en el anexo 3.

2.4. Expectativas afectivas

Las expectativas afectivas tienen que ver con la motivación del estudiante hacia el aprendizaje del tema. En nuestro caso, establecimos cuatro expectativas afectivas. Una de ellas es incrementar el interés por razonar sobre los puntos críticos de una función cúbica y su relación con el contexto. Estas expectativas se fundamentan en la aplicación que tiene la interpretación de los puntos críticos en la solución de tareas relacionadas con fenómenos de optimización. Presentamos las expectativas de tipo afectivo en la tabla 1.

Tabla 1
Expectativas afectivas para el tema de puntos críticos de la función cúbica

EA	Descripción
EA1	Desarrollar interés por matematizar fenómenos de optimización modelados por una función cúbica para determinar los puntos críticos
EA2	Incrementar el interés por razonar sobre los puntos críticos de una función cúbica y su relación con el contexto de fenómenos de optimización

EA	Descripción
EA3	Valorar la utilidad del concepto de punto crítico para razonar y justificar la solución adecuada de situaciones problema en diferentes contextos
EA4	Ser cuidadoso y estricto al justificar el uso de los puntos críticos en fenómenos de optimización

Nota: EA: expectativa de tipo afectivo.

Establecer las expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo, junto con las limitaciones de aprendizaje que presentamos en el siguiente apartado, nos permitió diseñar y organizar secuencialmente un conjunto de tareas.

2.5. Limitaciones de aprendizaje

Las limitaciones de aprendizaje que establecemos en la unidad didáctica tienen que ver con las dificultades y los errores en que pueden incurrir los estudiantes al enfrentarse a una tarea relacionada con fenómenos de optimización. Las dificultades son circunstancias que impiden o entorpecen la consecución de los objetivos de aprendizaje y los errores son manifestaciones visibles de las dificultades (González y Gómez, 2018).

Organizamos las dificultades y los errores según las dos primeras categorías propuestas por Socas (1997): las dificultades que corresponden a la complejidad de los objetos matemáticos y las dificultades de los procesos propios del pensamiento matemático. Entre las dificultades que corresponden a la complejidad del objeto matemático, identificamos la dificultad para evaluar la viabilidad de los puntos críticos de acuerdo con el contexto de una situación de optimización. Por otra parte, para las dificultades de los procesos propios del pensamiento matemático, identificamos la dificultad de la aplicación del criterio de la primera derivada para determinar los puntos críticos. En la tabla 2, presentamos el listado de dificultades y errores más frecuentes. Registramos el listado completo en el anexo 4.

Tabla 2
Dificultades y errores representativos del tema de puntos críticos de la función cúbica

E	Descripción
	D1. Ausencia de nociones relacionadas con el concepto de función
E2	Relaciona el dominio con rango y viceversa

E	Descripción
	D3. Dificultad para definir de manera formal el concepto de punto crítico
E6	Verifica y analiza puntos diferentes a los puntos críticos en representaciones gráfica o ejecutable de situaciones de optimización
E98	Realiza procedimientos y obtiene resultados que dificultan la identificación del dominio admisible
E10	Considera que el criterio de la primera derivada siempre permite hallar extremos relativos
	D7. Dificultad para identificar los extremos relativos en las diferentes representaciones
E22	Asocia el punto mínimo o máximo local de una función cúbica al punto más alto o bajo que observa en la representación gráfica, geométrica o ejecutable
E23	Expresa la abscisa y la ordenada de un punto crítico sin tener en cuenta que se relacionan como pareja ordenada, lo cual impide su análisis como extremo relativo
	D10. Obligatoriedad de encontrar una única respuesta a una situación problema
E40	Considera el punto de inflexión como máximo o mínimo relativo
E41	Afirma que la solución a un problema de optimización tiene un máximo y un mínimo
E42	Afirma que una función cúbica sin extremos relativos puede ser optimizada
E43	Fija una interpretación incoherente a partir de las soluciones obtenidas
	D19. Dificultad para asociar la cantidad de puntos críticos a fenómenos de optimización o de crecimiento o decrecimiento en sentido estricto
E70	Asocia una función cúbica sin puntos o con un punto crítico a fenómenos de optimización
E90	Considera que una función cúbica siempre tiene dos puntos críticos
E71	Asocia una función cúbica con dos puntos críticos a fenómenos de crecimiento o decrecimiento en sentido estricto

Nota. E: error, D: dificultad.

2.6. Criterios de logro

Los criterios de logro surgen de las secuencias de capacidades establecidas para cada objetivo. Estos son procedimientos concretos dentro del proceso de solución de una tarea que se describen en términos que los estudiantes pueden entender. Organizamos los criterios de logro de acuerdo con las acciones concretas que deben realizar los estudiantes para alcanzar cada objetivo de aprendizaje. Por tal motivo, los criterios de logro son útiles para determinar el nivel de logro de cada objetivo. En la tabla 3, presentamos algunos criterios de logro asociados al primer objetivo. Presentamos el listado completo de los criterios de logro en el anexo 11.

Tabla 3
Ejemplo de criterios de logro para el primero objetivo

CdL	Descripción
	Objetivo 1
11	Reconoce la información dada y solicitada, también, las variables en un problema relacionado con una función cúbica
12	Elige el procedimiento que brinde más elementos para abordar un problema de optimización, al tener en cuenta la información inicial y los requerimientos de dicho problema
13	Verifica que la información dada en el problema es insuficiente para abordar otras representaciones
125	Describe la variación del crecimiento y decrecimiento de las funciones cúbicas haciendo uso del concepto de punto crítico
126	Usa el concepto de punto crítico en las funciones cúbicas para diferenciar las que modelan fenómenos de optimización o fenómenos de crecimiento y decrecimiento en sentido estricto

Nota: CdL: Criterio de logro.

2.7. Grafos de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje

Los grafos de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje son esquemas que permiten identificar y organizar los criterios de logro que se deben activar para alcanzar un objetivo de aprendizaje. Estos esquemas permiten evidenciar las posibles estrategias de solución y los errores en que puede incurrir un estudiante al resolver una tarea. Algunos criterios de logro no tienen asociados errores, debido a que son criterios de logro relacionados con la toma de decisiones. Los grafos de criterios de logro permiten identificar los criterios más relevantes de cada objetivo de aprendizaje.

En la figura 4, presentamos el grafo de criterios de logro del primer objetivo. Los primeros criterios de logro están asociados al reconocimiento de la información. Posteriormente, el grafo da cuenta de las acciones para hallar la cantidad de puntos críticos y describir la variación de la función cúbica en diferentes representaciones. Por último, el esquema muestra los criterios de logro relacionados con el uso del concepto de punto crítico para diferenciar los tipos de funciones cúbicas.

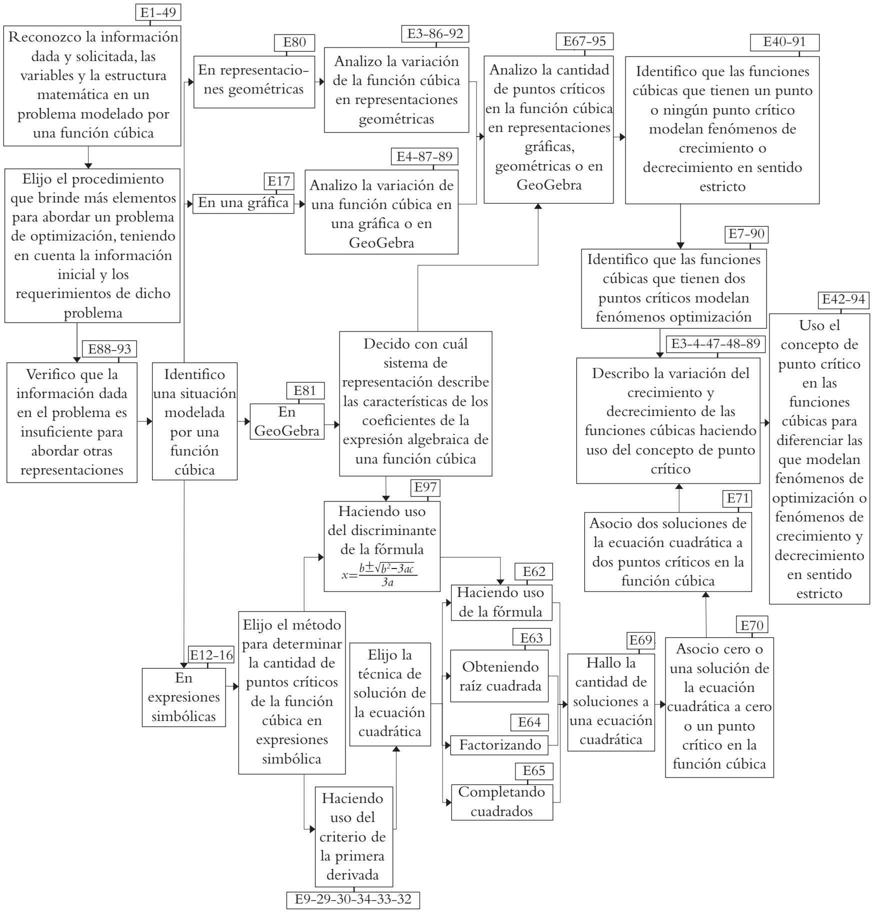


Figura 4. Grafo de criterios de logro del primer objetivo

En la figura 5, presentamos el grafo de criterios de logro del segundo objetivo. Los primeros criterios de logro están asociados a la interpretación de la información. Posteriormente, el grafo da cuenta de las acciones para determinar los puntos críticos en situaciones de optimización, a partir de algunas representaciones de la función cúbica. Finalmente, el grafo da cuenta de los criterios relacionados con establecer relaciones entre diferentes representaciones de los puntos críticos.

En la figura 6, presentamos el grafo de criterios de logro del tercer objetivo. Los primeros criterios de logro están asociados al reconocimiento de la información. Luego, el esquema da cuenta de las acciones para hallar los

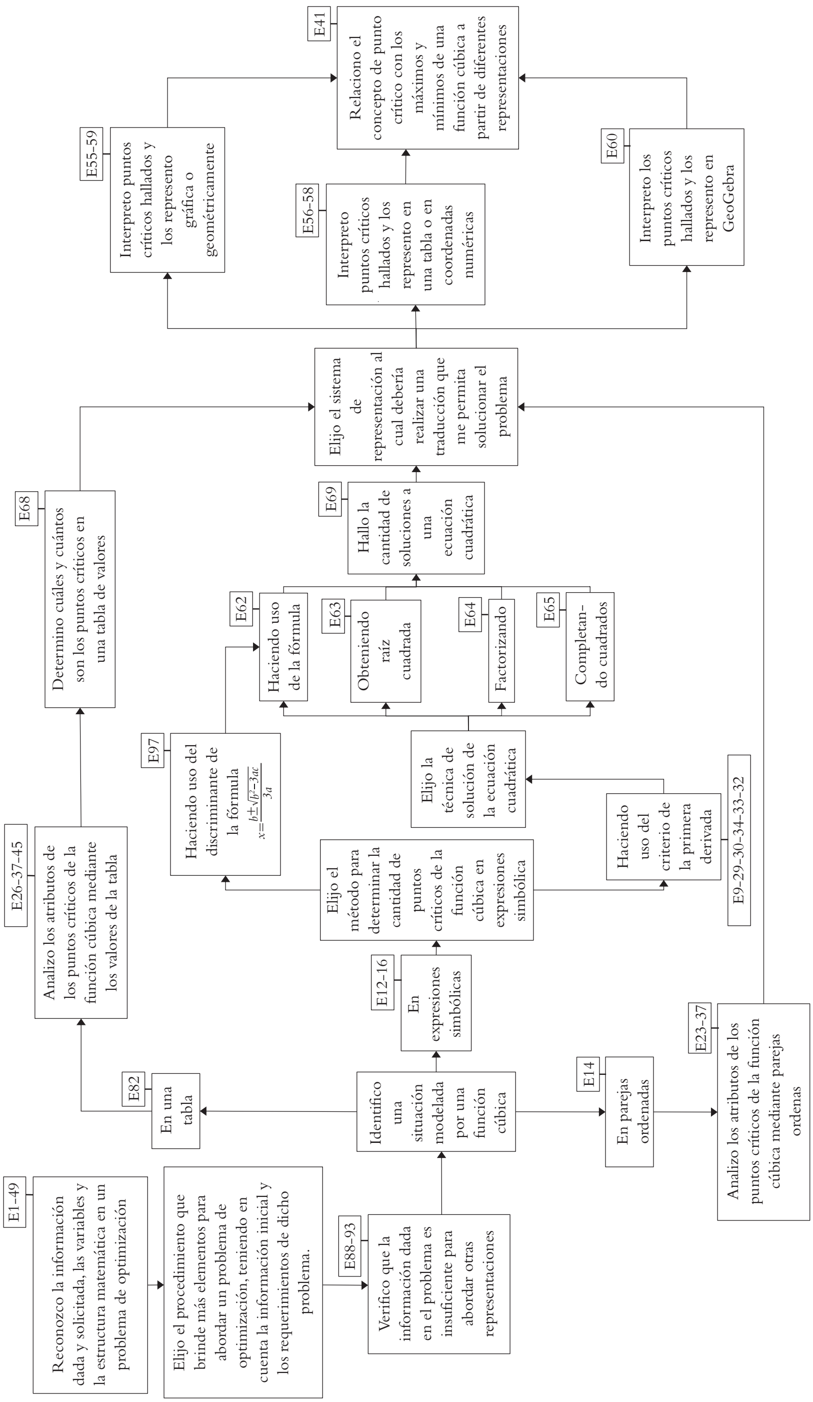


Figura 5. Grafo de criterios de logro del segundo objetivo

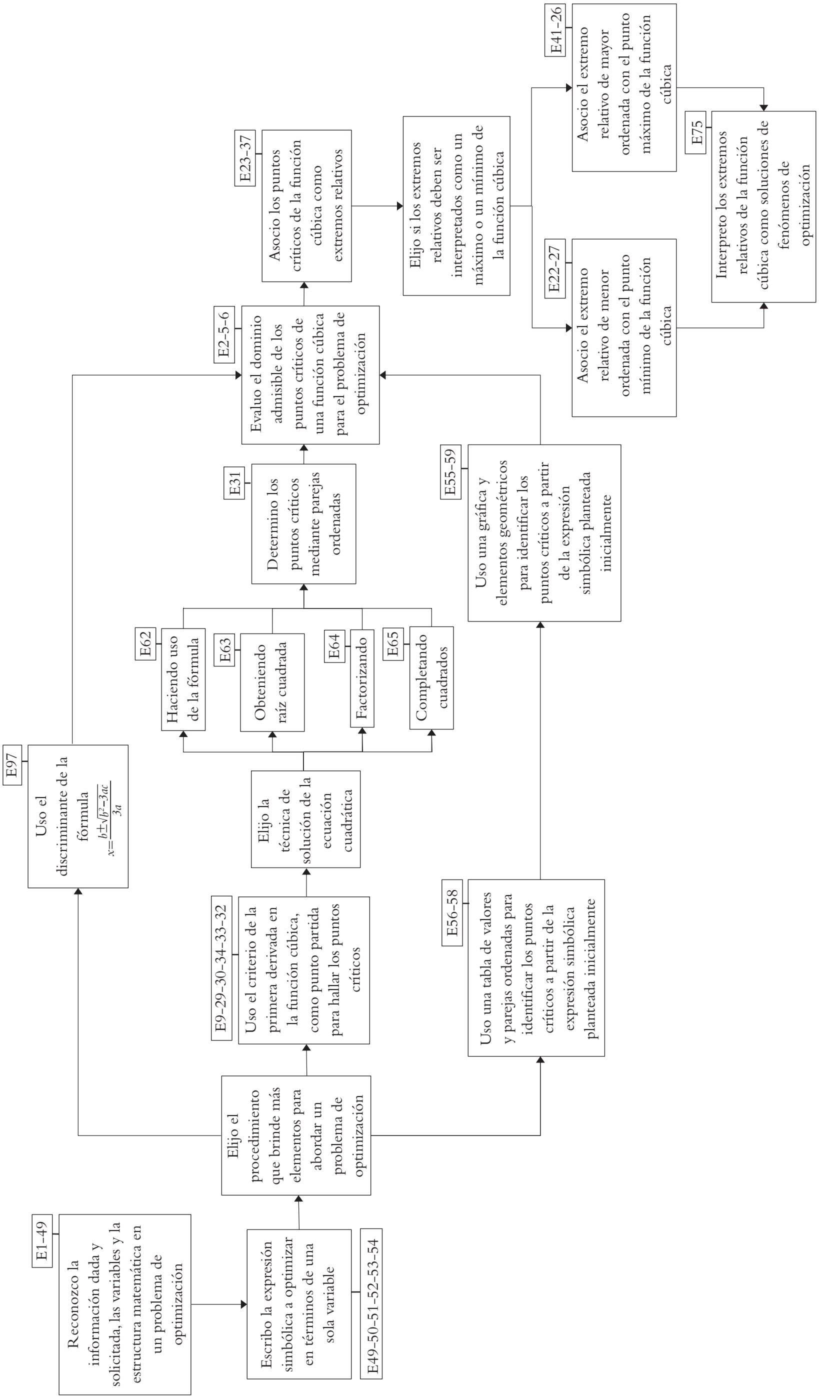


Figura 6. Grafo de criterios de logro del tercer objetivo

puntos críticos en situaciones de optimización. Finalmente, el grafo muestra los criterios relacionados con definir los puntos críticos como máximos o mínimos y evaluar la viabilidad de estos puntos dentro del contexto de la tarea.

2.8. Esquema general de la unidad didáctica

La unidad didáctica está diseñada para 17 sesiones de aproximadamente 60 minutos. Organizamos las sesiones en tres fases. En la primera, presentamos la unidad didáctica, implementamos la tarea diagnóstica y preparamos a los estudiantes que no poseían los conocimientos previos. En la segunda, implementamos las tareas de aprendizaje del tema. En la tercera, realizamos la evaluación final de la unidad didáctica y la sesión de cierre. En la tabla 4, presentamos la cantidad de tareas para cada objetivo de aprendizaje y la cantidad de sesiones de clase con los respectivos tiempos sugeridos.

Tabla 4
Descripción general de la unidad didáctica

Sesión	Aspecto	Tiempo (min)	Actividad
1	Inicio	30	Presentación de los objetivos y la metodología general de la unidad
2	Tarea	60	Implementación de la tarea diagnóstica
3	Realimentación	60	Resolución de la tarea diagnóstica en gran grupo para superar las dificultades relacionadas con los conocimientos previos
4, 5, 6	Primer objetivo	180	Implementación de las tareas Wazcartón, Pedido de Kellog's y Programa para modelar (60 min c/u)
7	Cierre del primer objetivo	60	Comunicación general de dudas, dificultades (a partir del diario del estudiante y del profesor) y calificaciones obtenidas en las tareas del objetivo 1
8, 9	Segundo objetivo	120	Implementación de las tareas Utilidades y Tanque de agua (60 min c/u)
10	Cierre del segundo objetivo	60	Comunicación general de dudas y dificultades (a partir del diario del estudiante y del profesor, haciendo uso del *software* GeoGebra) y calificaciones obtenidas en las tareas del objetivo 2
11, 12	Tercer objetivo	120	Implementación de las tareas Cajas de cartón y Caminata (60 min c/u)

Sesión	Aspecto	Tiempo (min)	Actividad
13	Cierre del tercer objetivo	60	Comunicación general de dudas y dificultades (a partir del diario del estudiante y del profesor) y calificaciones obtenidas en las tareas del objetivo 3. Entrega de formato del sistema de calificación de la unidad didáctica.
14	Realimentación	60	Institucionalización sobre lo aprendido y preparación del examen final
15	Examen final	60	Evaluación final
17	Cierre	60	Realimentación sobre los resultados del examen final, la evaluación de nuestra unidad didáctica y realización de la auto y co evaluación

La información recogida en los análisis anteriores es el fundamento de la selección, el diseño y la secuenciación de las tareas que configuran la unidad didáctica. Con estas tareas pretendemos (a) determinar si los estudiantes tienen los conocimientos previos requeridos para abordar la unidad didáctica; (b) contribuir al alcance de las expectativas de aprendizaje y afectivas y a la superación de las limitaciones de aprendizaje; y (c) evaluar el nivel de logro de dichas expectativas. En lo que sigue, describiremos los elementos que componen las tareas de aprendizaje y de evaluación.

3. Tareas

En este apartado, presentamos la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje y el examen final de la unidad didáctica. Para cada tarea, describimos sus características y algunas previsiones que el profesor debe tener en cuenta antes de implementarla. En el anexo 5, presentamos el material fotocopiable que corresponde a cada una de las tareas.

3.1. Tarea diagnóstica

La tarea diagnóstica permite constatar los conocimientos previos con los que cuenta el estudiante para abordar el tema de los puntos críticos de la función cúbica. Esta tarea está compuesta por seis ejercicios en los que se abordan los conceptos y los procedimientos de grado de una función, la cantidad de puntos críticos de la gráfica de las funciones, la expresión algebraica, la solución de ecuaciones cuadráticas y el volumen. Esta tarea permite evidenciar las capacidades de los estudiantes en relación con el reconocimiento de las características de las funciones, el desarrollo de las ecuaciones cuadráticas y la determinación del volumen de figuras. Los estudiantes deben resolverla de manera individual. Para su desarrollo, se entrega a los estudiantes una guía con los puntos que se deben desarrollar, una hoja en blanco, lápiz, borrador, regla y calculadora. Se estiman 10 minutos de lectura conjunta de los puntos y 50 minutos para su desarrollo.

La tarea diagnóstica activa el uso de la representación simbólica en la descripción de la expresión general de las funciones y en el desarrollo de las ecuaciones cuadráticas. La representación gráfica se utiliza para evaluar las funciones y graficarlas. Finalmente, la representación numérica se activa cuando los estudiantes evalúan las funciones y hallan la pendiente que pasa por unas coordenadas.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

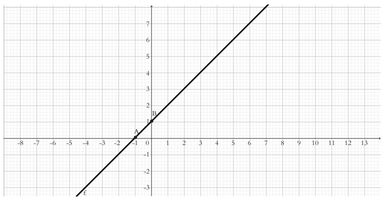
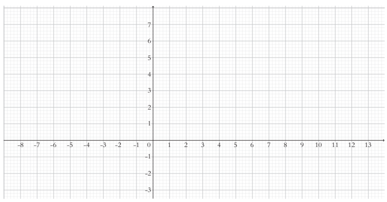
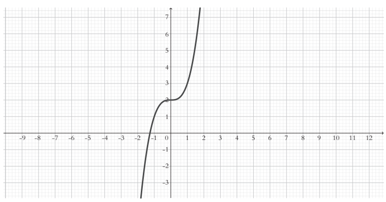
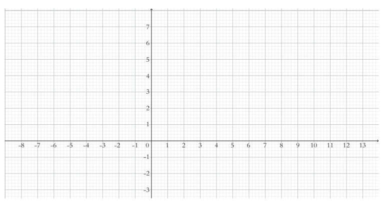
Antes de implementar la tarea diagnóstica, el profesor debe asegurarse de que los estudiantes usen procedimientos algebraicos asociados con las nociones básicas de derivación, la resolución de ecuaciones cuadráticas y las características de las funciones hasta grado 3. Algunos ítems de la tarea están diseñados para que el profesor evidencie la capacidad de los estudiantes para realizar procedimientos algebraicos. Sugerimos realizar una sesión de realimentación a partir de una acción colaborativa entre los estudiantes que demuestren habilidad en el desarrollo de la tarea diagnóstica y aquellos que presenten más dificultades. El profesor puede institucionalizar los conocimientos previos haciendo uso de las preguntas formuladas en la tarea diagnóstica.

Errores en los que pueden incurrir los estudiantes. Los errores en los que el estudiante puede incurrir están asociados a la formulación de representaciones simbólicas que no guardan la información ni las relaciones establecidas con el ejercicio. También, puede realizar gráficas en las que no se identifican variables o unidades; elaborar tablas sin tener precisión en los valores; asociar cantidades de puntos críticos que no corresponden al tipo de función; asociar arbitrariamente los coeficientes de la ecuación cuadrática a la fórmula; y llevar a cabo procedimientos y obtener resultados que dificultan la identificación del dominio admisible. Sugerimos que, en la realimentación de la tarea diagnóstica, se aborden estos errores para que no se presenten en las tareas de aprendizaje.

Evaluación. El profesor debe observar qué criterios de logro activan los estudiantes. Los criterios de logro para resolver la tarea están asociados a realizar traducciones de la representación simbólica de una función cúbica a su representación gráfica, elaborar una tabla a partir de una representación simbólica y hallar la cantidad de soluciones a una ecuación cuadrática.

Formulación

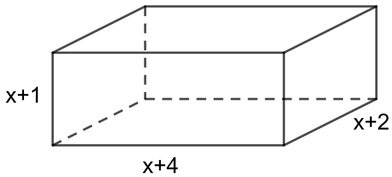
1. Completar la siguiente tabla.

Tipo de función	Grado de la función	Cantidad de puntos críticos	Gráfica	Expresión algebraica
Lineal o afín				
	2			$f(x) = x^2 + 4$
		1		
Cúbica		2		

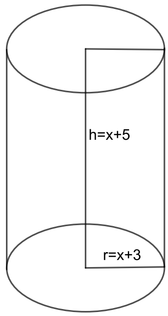
2. Graficar y hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos P (–2, –1) y Q (3,6). Señalar si la pendiente es positiva, negativa, no existe o es cero. ¿Por qué?

3. Determinar los puntos críticos y los intervalos de concavidad, crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.
   a) $f(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$
   b) $h(x) = \frac{5x^3}{6}$
4. Solucionar las siguientes ecuaciones cuadráticas.
   a) $x^2 + 6x = -9$
   b) $5x^2 + 9x + 2 = 0$
5. Determinar el área superficial y el volumen de las siguientes figuras.

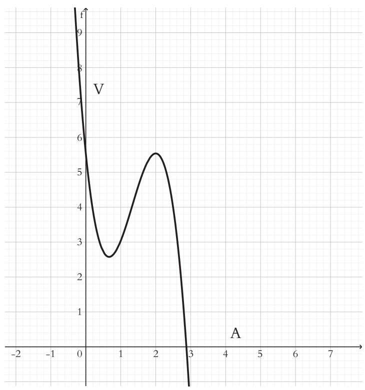
(a)



(b)



6. Un camión se compró en el 2015. La relación entre el costo (en cientos de millones) del camión y la depreciación dada por su uso en el tiempo (en décadas), se presenta en la siguiente gráfica.



a. Determinar qué variables representan A y V en la gráfica.
b. Determinar aproximadamente el mínimo y el máximo valor que alcanzó el camión durante los tres primeros años.
c. Establecer el intervalo de tiempo en el que el camión tuvo algún valor.

3.2. Tarea Wazcartón

En la primera tarea del primer objetivo, presentamos una situación en la que los estudiantes deben diferenciar las funciones cúbicas de acuerdo con el fenómeno que modelan. Para ello, deben describir y analizar la variación del volumen de las cajas. La tarea tiene como meta reconocer aquellas funciones que modelan fenómenos de optimización y aquellas que modelan fenómenos de crecimiento y decrecimiento en sentido estricto. A continuación, describimos los requisitos de la tarea.

Requisitos. Para esta tarea, se requiere que el estudiante conozca el concepto de punto crítico, reconozca el concepto de pendiente de una recta, diferencie la variable dependiente de la independiente de una función, reconozca las características de las funciones cúbicas y reconozca que los máximos y los mínimos locales de una función pueden ocurrir únicamente en sus puntos críticos.

Aportes de la tarea. La tarea pretende que los estudiantes diferencien tipos de funciones cúbicas en el sistema de representación gráfico y geométrico y que determinen si esas funciones modelan un fenómeno de optimización o un fenómeno de crecimiento o de decrecimiento estricto. Mediante el análisis de los sistemas de representación propuestos, se busca que los estudiantes valoren la utilidad del concepto de punto crítico para diferenciar funciones. A través de la idea del volumen de cajas, la tarea busca motivar a los estudiantes a que identifiquen la función cúbica como la estructura matemática de la situación. Por tal razón, el estudiante deberá formular supuestos que permitan solucionar la tarea.

Agrupamiento e interacción. En un primer momento, el profesor presenta al grupo de estudiantes la meta de la tarea. A continuación, el estudiante soluciona la tarea de manera individual. Luego, el profesor organiza a los estudiantes en parejas con el fin de revisar las descripciones de las variaciones del volumen y las diferencias entre los tipos de cajas. Se espera, si es posible, que discutan cómo se puede utilizar el concepto de pendiente de una recta para hacer tal descripción. Por último, en gran grupo se comparten las reflexiones obtenidas en el trabajo por parejas, con el fin de realizar la puesta en común. La interacción que se promueve en esta tarea es entre profesor-estudiante, estudiante-estudiante, estudiante-gran grupo y profesor-gran grupo.

Conceptos y procedimientos. En la tarea Wazcartón se abordan los conceptos y los procedimientos asociados a pendiente de una recta, puntos críticos, punto de inflexión y volumen.

Sistemas de representación. Los sistemas de representación que se activan son el gráfico y geométrico.

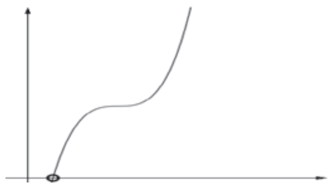
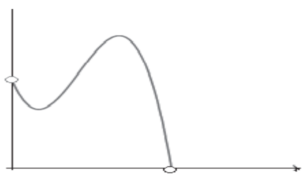
Contextos de la tarea. La tarea se sitúa en un contexto profesional.

Materiales y recursos. La tarea requiere de volantes con la información de la descripción de la empresa de cajas.

Formulación

Wazcartón es una empresa encargada del diseño, la elaboración y la venta de cajas de metal y de cartón de acuerdo con las especificaciones de sus clientes. A continuación, se describen sus productos.

Wazcartón

ESPECIFICACIONES DE LOS TIPOS CAJA				
Material	Usos	Tipo de base	Volumen	
Metal 	Ideal para productos altos	Circular o cuadrada	Depende de la longitud del diámetro o de la arista de la base	
Cartón 	Ideal para productos planos	Cuadrada	Depende del ancho de la base	

1. Si fuera un vendedor de Wazcartón ¿cómo describiría la variación del volumen de las cajas de metal y las cajas de cartón a uno de sus clientes?
2. ¿Cómo se relaciona el concepto de punto crítico con estas descripciones?
3. ¿Qué diferencias encuentra en la variación del volumen entre los dos tipos de cajas?

Temporalidad. El profesor inicia la sesión con la presentación de la tarea y explica la forma de trabajo (5 minutos). Se estima que la duración de la tarea sea de 35 minutos. El profesor debe apoyar el trabajo individual y por parejas que desarrollarán los estudiantes. Antes de finalizar la sesión, el profesor resuelve las inquietudes y realiza la institucionalización de la tarea, a partir de las respuestas que expusieron los estudiantes en cada requerimiento (20 minutos). Se busca que cada estudiante participe en el proceso de evaluación de su propio aprendizaje.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Para iniciar esta tarea, es necesario que el profesor verifique que se solucionaron las inquietudes de la tarea diagnóstica. Es conveniente que el profesor mencione el primer objetivo y la meta de la tarea. De esta manera, los estudiantes reconocerán la finalidad y los aprendizajes que se desarrollarán o afianzarán al abordarla. Se recomienda hacer una descripción de la imagen que se presenta de manera detallada y hacer una lectura de las preguntas. El profesor debe motivar y promover el trabajo en grupo y la participación crítica para desarrollar la tarea de manera adecuada.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

En este apartado, trataremos los aspectos relacionados con el grafo de criterios de logro de la tarea. El grafo muestra los posibles caminos de aprendizaje en torno al sistema de representación gráfico o geométrico. También, presentamos los errores en los cuales puede incurrir el estudiante al momento de realizar algún procedimiento.

Grafo de criterios de logro. En la figura 7, presentamos el grafo de criterios de logro del primer objetivo. Hemos resaltado los criterios de logro que se activan en esta tarea mediante una línea gruesa punteada. Observamos que los primeros criterios de logro están asociados al reconocimiento de la información, la elección del procedimiento y la verificación de la información. Posteriormente, encontramos los criterios de logro asociados a las representaciones geométrica y gráfica que se utilizan para el desarrollo de la tarea. Luego, surgen los criterios de logro relacionados con representaciones y un procedimiento específico que permite hallar los puntos críticos. Por último, encontramos los criterios de logro asociados a la descripción de la variación y la utilización del concepto de punto crítico.

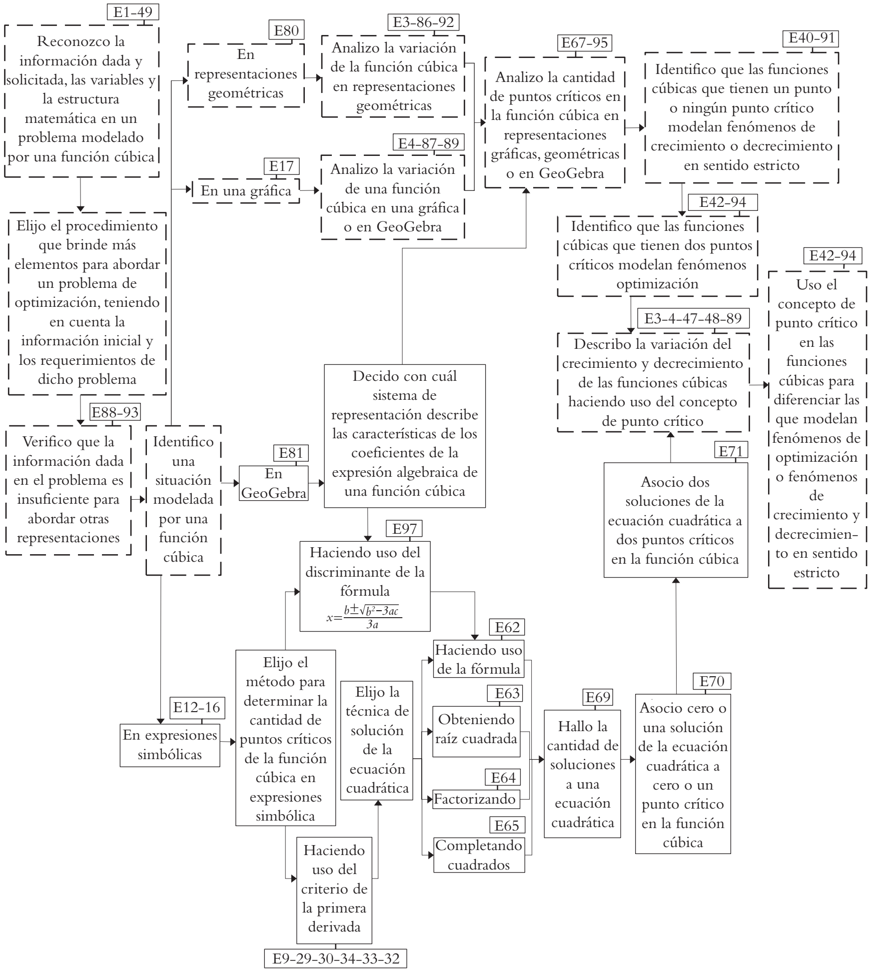


Figura 7. Grafo de criterios de logro de la tarea Wazcartón

Errores en los que pueden incurrir los estudiantes. Los estudiantes podrían incurrir en algunos errores al desarrollar la tarea. Por ejemplo, utilizar una representación gráfica o geométrica que no permite modelar la situación; realizar gráficas en las que no se identifican variables o unidades; asociar dos puntos críticos a fenómenos que no son de optimización o asociar un punto crítico a fenómenos de optimización; y analizar de manera incorrecta la información identificada en las representaciones gráficas y geométricas. El listado de errores se encuentra en el anexo 4.

Actuación del profesor. El profesor debe motivar a los estudiantes a solucionar la tarea y participar a la hora de realizar sus inquietudes. También, debe estar pendiente de si quedaron errores que no se lograron superar en la tarea diagnóstica, revisar de manera constante el trabajo individual y los grupos de trabajo para constatar que todos realicen la actividad. Las preguntas orientadoras pueden ser ¿cuáles son las variaciones que se presentan en las gráficas? y ¿cuál es la abscisa y la ordenada en un punto crítico a partir de la gráfica? Por otro lado, sugerimos al profesor aclarar que la gráfica relaciona la altura con el volumen. En el anexo 14, presentamos el listado de ayudas sugeridas al profesor para contribuir a la superación de errores en los que pueden incurrir los estudiantes al solucionar esta tarea.

Evaluación. En esta tarea, se evalúa que el estudiante identifique una situación modelada por una función cúbica en representaciones gráficas o geométricas. Asimismo, debe realizar un análisis de la variación de este tipo de funciones al hacer uso de la cantidad de puntos críticos. Específicamente, debe evidenciar su comprensión para identificar que las funciones cúbicas que tienen un punto o ningún punto crítico modelan fenómenos de crecimiento o de decrecimiento en sentido estricto. También, debe identificar que las funciones cúbicas que tienen dos puntos críticos modelan fenómenos optimización.

3.3. Tarea Pedido de Kellog's

En la segunda tarea del primer objetivo, pretendemos que, a partir de las representaciones simbólicas, los estudiantes diferencien las funciones cúbicas con respecto al fenómeno que modelan. Los estudiantes deben generar un modelo matemático que les permita analizar la variación del volumen en los recipientes y determinar si es posible obtener un volumen máximo y mínimo. La tarea tiene como meta que los estudiantes reconozcan, a partir de un modelo matemático, aquellas funciones que modelan fenómenos de optimización y aquellas que modelan fenómenos de crecimiento y decrecimiento en sentido estricto. A continuación, describimos los elementos de la tarea.

Requisitos. La tarea requiere que el estudiante conozca el concepto de punto crítico, emplee el criterio de la primera derivada, aplique y reconozca las reglas de derivación y halle el volumen de los cilindros y de los prismas con base rectangular.

Aportes de la tarea. La tarea busca que los estudiantes establezcan diferencias entre tipos de funciones cúbicas en el sistema de representación simbólico y determinen si esas funciones modelan un fenómeno de optimización o uno de crecimiento o de decrecimiento estricto. Se pretende que los estudiantes desarrollen interés por matematizar fenómenos modelados por una función cúbica para determinar los puntos críticos. También, se busca que elaboren un modelo matemático que les permita llegar a la solución y, posteriormente, que reflexionen sobre los resultados matemáticos para elaborar explicaciones y argumentos que apoyen o refuten la solución a la tarea.

Agrupamiento e interacción. Al iniciar la sesión, el profesor presenta al grupo de estudiantes la meta de la tarea. Los estudiantes forman parejas para solucionar la tarea y discutir los resultados. Durante este proceso, el profesor identifica formas similares de solución a la tarea y, a partir de esa información, sugiere a algunas parejas presentar su solución al gran grupo. Al finalizar, el profesor dirige los acuerdos sobre cada requerimiento de la tarea. La interacción que se promueve es profesor-estudiante, estudiante-estudiante y profesor-gran grupo.

Conceptos y procedimientos. En la tarea Pedido de Kellog's, se abordan los conceptos y los procedimientos asociados a la forma general de las funciones cúbicas, a la representación de funciones, a la variación del volumen y a los puntos críticos.

Sistemas de representación. El sistema de representación que se activa es el simbólico.

Contextos de la tarea. Asociamos esta tarea a un contexto profesional.

Materiales y recursos. En esta tarea se usan volantes con la información que se presenta en la formulación.

Formulación

Kellog's hace una solicitud a Wazcartón para que construya sus nuevas envolturas para el cereal de Frootloops y Zucaritas con su respectivo premio sorpresa. Las especificaciones de estas cajas se presentan en la siguiente tabla. Kellog's necesita saber la viabilidad de este tipo de requerimiento.

Referencia	Caja	Especificaciones	Restricciones
Frootloops	Cereal	Base cuadrada cuyo lado sea la diferencia entre 5 cm y el alto de la caja	Altura no mayor a 5 cm
	Premio	Base cuadrada con alto que sea igual a la diferencia entre 5 y 2 veces el lado de la base de la caja	Longitud del lado de la base no mayor a 5 cm

Referencia	Caja	Especificaciones	Restricciones
Zucaritas	Cereal	Caja en forma de cubo (todos sus lados iguales)	Longitud del lado de la base no mayor a 5 cm
	Premio	Caja de forma cilíndrica cuya altura sea 2 veces su radio	Longitud del radio de la base no mayor a 5 cm

1. Generar un modelo matemático que permita establecer las diferencias entre el tipo de variación del volumen de las cajas (cereal y premio) de la referencia Frootloops y las cajas (cereal y premio) de la referencia Zucaritas.
2. ¿Es posible determinar un volumen máximo y uno mínimo en cada una de las cajas? Justificar la respuesta.

Temporalidad. Inicialmente, el profesor presenta la tarea y explica la forma de trabajo (8 minutos). Se estima que la tarea se realice en una sesión de 60 minutos. El profesor debe contar con 20 minutos para realizar la institucionalización. Asimismo, debe estimar un tiempo adicional para que los estudiantes puedan registrar el alcance en cada criterio de logro de la tarea.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

El profesor debe iniciar con el propósito de la tarea y hacer una lectura de la imagen que se les entrega de manera detallada. Debe pedir a los estudiantes que realicen una representación de cómo se imaginan cada tipo de caja, con el fin de tener una idea sobre el razonamiento que los estudiantes presentaron en torno a la situación e implementar ayudas asociadas a la construcción de las cajas a partir de las medidas. Posteriormente, debe realizar la lectura de los requerimientos para garantizar que no existan diferentes interpretaciones de lo que se pretende. En el desarrollo de la tarea, el profesor debe estar muy pendiente del modelo matemático porque este es el aspecto principal que permite desarrollar la tarea. Por último, debe motivar al estudiante de manera constante hasta que logre obtener el modelo.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

En este apartado, presentamos las posibles estrategias que el estudiante puede seguir para desarrollar la tarea, a partir de su grafo de criterios de logro. También presentamos los errores en los que incurre el estudiante al desarrollar la tarea y la actuación del profesor.

Grafo de criterios de logro. En la figura 8, presentamos el grafo de criterios de logro de la segunda tarea. Los primeros criterios de logro están asociados al reconocimiento de la información, la elección del procedimiento y la verificación de la información. Luego, se encuentran aquellos asociados a la representación simbólica y a la utilización de la fórmula para determinar los puntos críticos o aplicar el criterio de la primera derivada. Por último, se establecen los criterios de logro asociados a la descripción de la variación y a la utilización del concepto de punto crítico desde la representación simbólica.

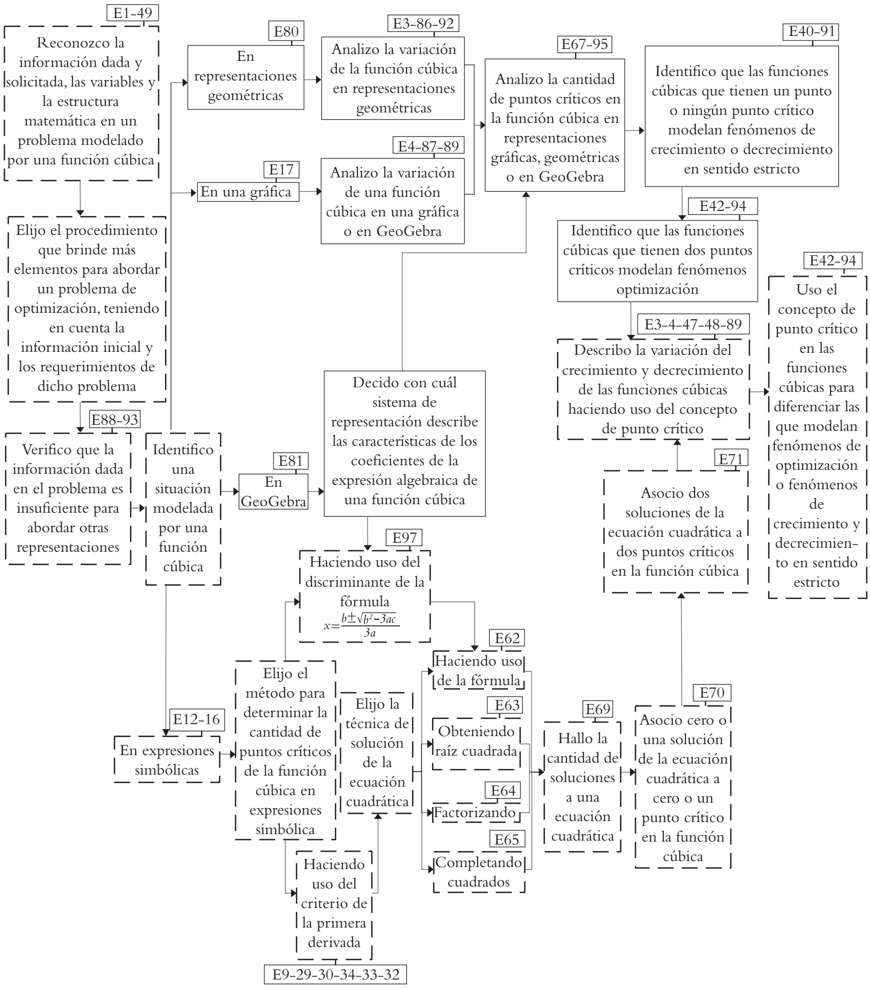


Figura 8. Grafo de criterios de logro de la tarea Pedido de *Kellog's*

Errores en los que pueden incurrir los estudiantes. Los estudiantes podrían incurrir en algunos errores al desarrollar esta tarea. Por ejemplo, utilizar una representación simbólica que no modela matemáticamente la situación, confundir los coeficientes de la función al aplicarlos en el discriminante o confundir las reglas de derivación. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 4.

Actuación del profesor. El profesor debe apoyar a los estudiantes para que logren solucionar toda la tarea; estar pendiente de si quedaron errores que no se lograron superar en la tarea Wazcartón o en la tarea diagnóstica; y revisar de manera constante los grupos de trabajo para constatar que todos realicen la actividad. Los estudiantes deben tener clara la situación del problema para que no surjan soluciones que no correspondan y no se bloqueen en algún requerimiento de la tarea o procedimiento. Las preguntas orientadoras que el profesor debe generar, para que los estudiantes puedan continuar con el desarrollo de los procedimientos, están relacionadas con el reconocimiento de la información para realizar una representación, las reglas de derivación y la solución de ecuaciones cuadráticas. Las preguntas orientadoras pueden ser ¿qué información del problema le permite realizar algún tipo de representación?, ¿el resultado de la derivada cumple con el desarrollo del exponente? y ¿cuál es la fórmula para solucionar una ecuación cuadrática? Por otro lado, sugerimos al profesor, al iniciar la sesión, realizar un repaso del uso del criterio de la primera derivada. En el anexo 15, presentamos el listado de ayudas sugeridas al profesor para contribuir a la superación de errores en los que pueden incurrir los estudiantes al solucionar esta tarea.

Evaluación. En esta tarea, se evalúa que el estudiante asocie la situación planteada con una función cúbica y establezca la expresión simbólica que modela dicha situación. Asimismo, debe realizar un análisis de la variación de este tipo de funciones al hacer uso de la cantidad de puntos críticos. Específicamente, el estudiante debe evidenciar su comprensión para identificar que las funciones cúbicas que tienen un punto o ningún punto crítico modelan fenómenos de crecimiento o de decrecimiento en sentido estricto. También, debe identificar que las funciones cúbicas que tienen dos puntos críticos modelan fenómenos optimización.

3.4. Tarea Programa para modelar

Con la tercera tarea del primer objetivo, pretendemos que los estudiantes diferencien las funciones cúbicas con respecto al fenómeno que modelan.

Deben analizar las funciones cúbicas mediante un simulador que les permite cambiar los coeficientes de la función. La meta de la tarea es reconocer, a partir del modelo matemático y de la relación entre los coeficientes de la función, aquellas funciones que modelan fenómenos de optimización y aquellas que modelan fenómenos de crecimiento y decrecimiento en sentido estricto. A continuación, describimos los elementos de la tarea.

Requisitos. La tarea requiere que el estudiante conozca el concepto de punto crítico, diferencie la variable dependiente de la independiente de una función, reconozca las características de las funciones cúbicas y reconozca que los máximos y los mínimos locales de una función pueden ocurrir únicamente en sus puntos críticos.

Aportes de la tarea. Por medio de la representación ejecutable, la tarea busca que los estudiantes establezcan relaciones entre los sistemas de representación gráfico, geométrico y simbólico para determinar si dichas funciones modelan un fenómeno de optimización o uno de crecimiento o de decrecimiento estricto. El uso del simulador en GeoGebra permite que los estudiantes incrementen el interés por razonar sobre los puntos críticos de una función cúbica y su relación con el contexto de fenómenos de optimización. Los requerimientos de la tarea llevan al estudiante a elaborar y presentar explicaciones y argumentos sobre las relaciones encontradas.

Agrupamiento e interacción. Esta tarea se desarrolla en tres momentos. El profesor entrega a los estudiantes el simulador en GeoGebra sin dar mayor explicación. Luego, cada uno de los estudiantes interactúa de manera individual con el programa, con el fin de que vaya construyendo conjeturas para los diferentes requerimientos de la tarea. En seguida, trabajan en parejas para socializar las conjeturas y llegar a acuerdos sobre las soluciones a los requerimientos. El profesor pregunta a los estudiantes sobre lo que ellos consideran que fue la meta de la tarea, al tener en cuenta sus soluciones. Esta pregunta se realizará para fomentar el razonamiento y la argumentación de los estudiantes. Por último, el profesor realiza la institucionalización con todo el grupo. La interacción que se promueve es estudiante-estudiante y profesor-gran grupo.

Conceptos y procedimientos. En la tarea Programa para modelar se abordan los conceptos y los procedimientos asociados a la forma general de las funciones cúbicas, coeficientes de funciones, manejo de GeoGebra, pendiente de la recta y puntos críticos.

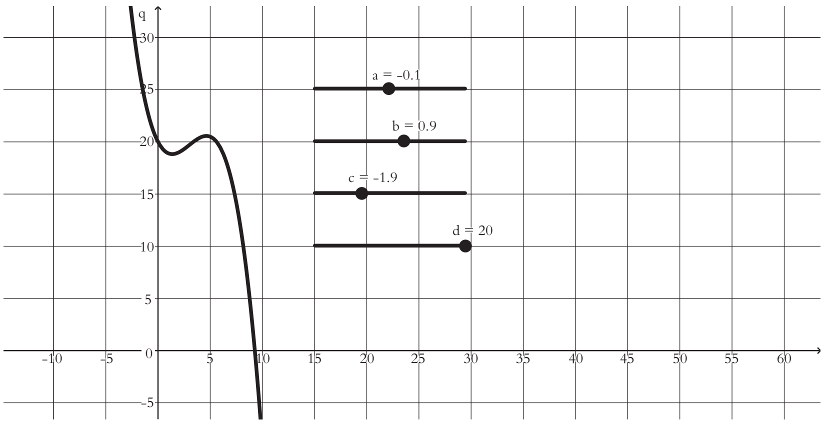
Sistemas de representación. Los sistemas de representación que se activan son el gráfico, el geométrico y el simbólico, por medio del simulador en GeoGebra.

Contextos de la tarea. La tarea se sitúa en un contexto científico relacionado con la tecnología.

Materiales y recursos. La tarea requiere una simulación en GeoGebra. La simulación está disponible en el anexo 12. Adicionalmente, el desarrollo de la tarea requiere el uso de computadores o tabletas.

Formulación

Esta es la simulación en GeoGebra que utiliza Wazcartón para determinar el tipo de material (metal o cartón) en que se fabrican sus cajas.



1. Realizar modificaciones en los valores de *a, b, c* y *d* (que corresponden a los coeficientes de una función cúbica) y determinar los cambios que se producen.
2. A partir de los cambios anteriormente descritos y el concepto de punto crítico, establecer qué características debe tener una función que modela un fenómeno de optimización y una que modela un fenómeno de crecimiento o decrecimiento en sentido estricto.

Temporalidad. La tarea se desarrolla en una sesión de 60 minutos. El profesor debe estimar un tiempo para que los estudiantes puedan registrar el alcance en cada criterio de logro de la tarea.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Para dar inicio a la tarea, es importante que el profesor retome el objetivo y la meta. De esta manera, se espera que los estudiantes reconozcan la finalidad y los aprendizajes que se desarrollarán o afianzarán al abordarla. Se recomienda hacer una lectura inicial y aclarar las dudas. El profesor debe motivar y promover en los estudiantes la participación crítica y generar espacios para compartir las dificultades que presentaron durante el desarrollo de la tarea. Se recomienda al profesor, al finalizar las tres primeras tareas asociadas al primer objetivo, destinar una sesión para realizar una socialización y realimentación de 60 minutos. En esta sesión, el profesor debe institucionalizar las diferentes funciones cúbicas que obedecen a fenómenos de optimización y fenómenos de crecimiento y decrecimiento en sentido estricto.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

En este apartado, presentamos algunos aspectos relacionados con el grafo de criterios de logro de la tarea. El grafo muestra los dos posibles caminos de aprendizaje que el estudiante podría tomar para resolver la tarea. El primer camino se relaciona con el uso del sistema de representación simbólico y el segundo camino se relaciona con la identificación de la cantidad de puntos críticos a partir del sistema de representación gráfico o geométrico. También, presentamos los errores en los que puede incurrir el estudiante al realizar algún procedimiento en torno al uso de la fórmula para determinar los puntos críticos o el criterio de la primera derivada. Por último, establecemos la actuación del profesor.

Grafo de criterios de logro. En la figura 9, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea Programa para modelar. En este caso, los criterios más relevantes tienen que ver con la acción de usar los coeficientes de la representación simbólica de la función cúbica, para describir sus características gráficas y establecer la cantidad de puntos críticos.

Errores en los que pueden incurrir los estudiantes. Los estudiantes podrían incurrir en errores como confundir los coeficientes de la función; establecer una cantidad de puntos críticos que no corresponden a la gráfica; asociar una función cúbica con dos puntos críticos a fenómenos de crecimiento o decrecimiento en sentido estricto; considerar que una función cúbica siempre tiene dos puntos críticos; y asociar una cantidad de puntos críticos que no corresponde al tipo de función cúbica. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 4.

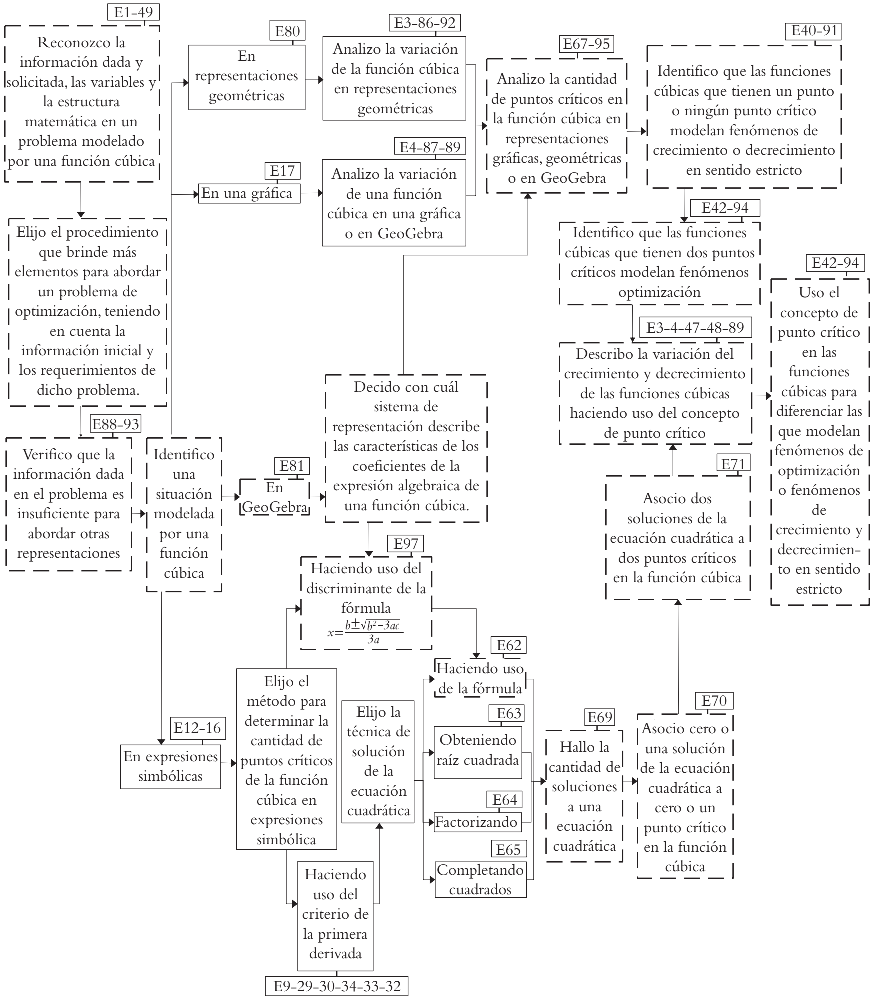


Figura 9. Grafo de criterios de logro de la tarea Programa para modelar

Actuación del profesor. El profesor debe apoyar a los estudiantes para que logren solucionar toda la tarea; estar pendiente de si quedaron errores que no se lograron superar en las tareas anteriores; y revisar de manera constante el trabajo individual y de los grupos para constatar que todos realicen la actividad. Los estudiantes deben tener clara la situación del problema para que no surjan soluciones que no correspondan y no se bloqueen en algún requerimiento de la tarea o procedimiento. Las preguntas orientadoras que el profesor debe generar, para que los estudiantes puedan continuar con el desarrollo de los procedimientos, están relacionadas con las características de las funciones cúbicas, la cantidad de puntos críticos a partir del discriminante y el crecimiento de funciones con dos puntos críticos. Las preguntas orientadoras pueden ser ¿cuáles son las características de las funciones cúbicas, cuando $b^2 > 3ac$?, ¿cuántos puntos críticos tiene la función cuando $b^2 \leq 3ac$?, ¿cuántos puntos críticos tiene la función? y ¿una función con dos puntos críticos crece o decrece constantemente? Por otro lado, sugerimos al profesor explicar la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ y su discriminante, cuando se involucre en el desarrollo de la tarea o al inicio de la sesión. En el anexo 16, presentamos el listado de ayudas sugeridas al profesor para contribuir a la superación de errores en los que pueden incurrir los estudiantes al llevar a cabo esta tarea.

Evaluación. En esta tarea se evalúa la capacidad del estudiante para determinar las características (en los sistemas de representación gráfico, geométrico y simbólico) que permiten diferenciar entre funciones cúbicas que modelan fenómenos de optimización y fenómenos de crecimiento o de decrecimiento en sentido estricto. Esto implica que el estudiante debe presentar evidencia de su habilidad para hallar la cantidad de puntos críticos en diferentes representaciones y hacer uso de este conocimiento para describir la variación de la función.

3.5. Tarea Utilidades

Con la meta de la primera tarea del segundo objetivo, pretendemos que los estudiantes reconozcan los puntos críticos de las funciones cúbicas en diferentes sistemas de representación y los asocien a otras representaciones. Para ello, tienen que describir el comportamiento de las utilidades a partir de los diferentes sistemas de representación que sean convenientes para analizar la situación. A continuación, describimos los elementos de la tarea.

Requisitos. La tarea requiere que el estudiante reconozca los intervalos a partir de sus símbolos, identifique los fenómenos de optimización y crecimiento y decrecimiento en sentido estricto, conozca los sistemas de representación del concepto de punto crítico, conozca el propio concepto y manipule GeoGebra, en caso de utilizarlo.

Aportes de la tarea. La tarea lleva al estudiante a que identifique los puntos críticos de funciones cúbicas en fenómenos de optimización en el sistema de representación numérico o tabular y, posteriormente, represente esos puntos de diferentes maneras. La formulación de la tarea busca incrementar el interés por razonar sobre los puntos críticos de una función cúbica y su relación con el contexto de fenómenos de optimización. Los requerimientos de la tarea conducen al estudiante a que interprete, relacione y utilice distintas representaciones cuando se interactúa con la tarea.

Agrupamiento e interacción. El profesor inicia con la presentación de la meta de la tarea. Los estudiantes forman parejas para solucionar la tarea y discutir los resultados. Al finalizar, el profesor realiza la institucionalización. La interacción que se promueve es profesor-estudiante, estudiante-estudiante y profesor-gran grupo.

Conceptos y procedimientos. La tarea Utilidades aborda los siguientes conceptos y procedimientos: sistemas de representación gráfico y tabular de la función cúbica, traducciones entre los sistemas de representación, intervalos, puntos críticos, crecimiento y decrecimiento de funciones.

Sistemas de representación. Los sistemas de representación que se activan son el gráfico, el tabular y el ejecutable.

Contextos de la tarea. Situamos esta tarea en un contexto profesional.

Materiales y recursos. Para resolver la tarea se debe entregar a los estudiantes un archivo en Excel con el listado de los valores que analizará (ver anexo 13). Es necesario tener disponible el programa GeoGebra en caso de que algún estudiante lo requiera.

Formulación

En la Bolsa de Valores de Colombia se compran y venden acciones durante 6 horas al día. En el mercado de renta variable se negocian las acciones de compañías inscritas en el mercado público de valores. Esto hace que el valor de una acción de una compañía cambie a lo largo del tiempo de operaciones. Para estudiar las utilidades de una empresa, un analista financiero registra en un documento Excel el valor de la acción a lo largo de la jornada.

Mes	Valor de la acción
0,0	1,444
0,4	2,592
0,6	3,468
0,8	4,096

Mes	Valor de la acción
1	4,5
1,2	4,704
1,4	4,732
1,6	4,608
1,8	4,356
2	4
2,2	3,564
2,4	3,072
2,6	2,548
2,8	2,016
3	1,5
3,2	1,024
3,4	0,612
3,6	0,288
3,8	0,076
4	0
4,2	0,084
4,4	0,352
4,6	3,828
4,8	1,536
5	2,5
5,2	3,744
5,4	5,292
5,6	7,168
5,8	9,396
6	12

1. Determinar los puntos críticos y utilizarlos para describir la variación del valor de la acción a lo largo del tiempo de operaciones de la Bolsa.
2. Presentar un informe general que permita evidenciar el momento en que se alcanza el mayor y menor valor de la acción. Se pueden incluir gráficos, tablas o hacer uso de Excel o GeoGebra.

Temporalidad. El profesor presenta la tarea y explica la forma de trabajo (5 minutos). Se estima que los estudiantes resuelvan la tarea en 35 minutos. Por último, el profesor realiza la institucionalización en 25 minutos y debe estimar un tiempo adicional para que los estudiantes puedan registrar el alcance en cada criterio de logro de la tarea.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Para dar inicio a esta tarea del segundo objetivo, es necesario que el profesor solucione todas las inquietudes de los estudiantes que se presentan en las tareas del primer objetivo. Posteriormente, debe mencionar cuál es el segundo objetivo y el propósito de la tarea. Se recomienda hacer una lectura inicial, entregar el archivo de Excel correspondiente a la situación y aclarar las dudas. El profesor debe motivar la participación crítica en los estudiantes para generar mejores descripciones de la tarea. También, debe tener en cuenta las posibles gráficas que realicen los estudiantes y enfatizar en la importancia de tener en cuenta las cifras decimales. En esta sesión, el profesor debe institucionalizar las diferentes representaciones de las funciones cúbicas asociadas a la situación.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

En este apartado, presentamos algunos aspectos relacionados con el grafo de criterios de logro de la tarea. El grafo muestra los posibles caminos de aprendizaje en torno a los sistemas de representación tabular y numérico. También, presentamos los errores en los que el estudiante puede incurrir al realizar traducciones entre los sistemas de representación. Por último, establecemos la actuación del profesor.

Grafo de criterios de logro. En la figura 10, presentamos el grafo de criterios de logro de la cuarta tarea. De igual manera que en las tareas anteriores, los primeros criterios de logro están asociados al reconocimiento de la información, a la elección del procedimiento y a la verificación de la información. Posteriormente, se establecen los criterios de logro asociados a la representación tabular y las parejas ordenadas. Los últimos criterios de logro están asociados a la caracterización de los puntos críticos mediante el sistema de representación y a la traducción entre los sistemas para relacionar el concepto de punto crítico.

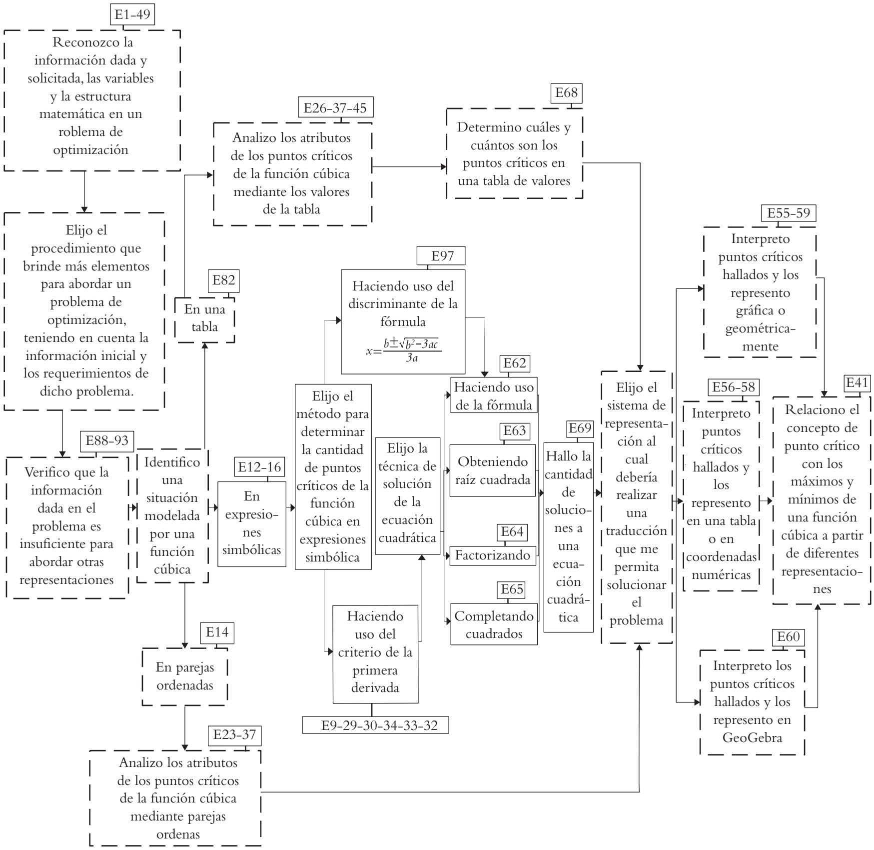


Figura 10. Grafo de criterios de logro de la tarea Utilidades

Errores en los que pueden incurrir los estudiantes. Los estudiantes podrían incurrir en algunos errores al desarrollar la tarea. Por ejemplo, confundir los puntos críticos en los sistemas de representación tabular y numérico; realizar traducciones de representaciones de la función cúbica a una tabla que no guarda la información ni las relaciones establecidas de la situación; establecer relaciones entre las diferentes representaciones de la función cúbica que no guardan información con la representación de parejas ordenadas; y confundir el concepto de punto crítico en la situación.

Actuación del profesor. El profesor debe motivar a los estudiantes para que logren solucionar toda la tarea. También, debe estar pendiente de si quedaron errores que no se lograron superar en las tareas anteriores, revisar de manera constante el trabajo individual y los grupos de trabajo para constatar que todos realicen la actividad. Los estudiantes deben tener clara la situación del problema para que no surjan soluciones que no correspondan y no se bloqueen en algún requerimiento de la tarea o procedimiento. Las preguntas orientadoras que el profesor puede aplicar para que los estudiantes puedan continuar con el desarrollo de los procedimientos están relacionadas con el reconocimiento de parejas ordenadas o los valores numéricos en una tabla. Las preguntas orientadoras pueden ser ¿los valores obtenidos en la tabla y las parejas ordenadas están asociados a una función cúbica? y ¿cuál es la abscisa y la ordenada en un punto crítico? Por otro lado, sugerimos al profesor aclarar que la gráfica que los estudiantes deben realizar no se debe asociar a un diagrama de barras. En el anexo 17, presentamos el listado de ayudas sugeridas al profesor para contribuir a la superación de errores en los que pueden incurrir los estudiantes al solucionar esta tarea.

Evaluación. En esta tarea, se evalúa que el estudiante elija el procedimiento que le proporcione más elementos para abordar el problema, analice los atributos de los puntos críticos de la función cúbica (mediante el uso de la representación tabular y numérica) y logre interpretar los puntos críticos como máximos o mínimos de la función cúbica mediante traducciones a otras representaciones.

3.6. Tarea Tanque de agua

Con la segunda tarea del segundo objetivo, pretendemos que los estudiantes reconozcan los puntos críticos de las funciones cúbicas en diferentes sistemas de representación y los asocien a otras representaciones. Para ello, se espera que aborden el sistema de representación simbólico para determinar el mayor y el menor volumen del tanque y que interpreten el resultado en el sistema de representación gráfico, geométrico, tabular o ejecutable. A continuación, describimos los elementos de la tarea.

Requisitos. Esta tarea requiere de los siguientes conceptos y procedimientos: identificar fenómenos de optimización y crecimiento y decrecimiento en sentido estricto, sistemas de representación, concepto de punto crítico y función cúbica, traducciones entre los sistemas de representación y volumen (en caso de utilizarlo).

Aportes de la tarea. La tarea lleva al estudiante a que identifique los puntos críticos de funciones cúbicas en fenómenos de optimización en representaciones simbólicas y, posteriormente, a que represente esos puntos de diferentes maneras. Los requisitos de la tarea conducen a los estudiantes a ser cuidadosos y estrictos al justificar el uso de los puntos críticos en fenómenos de optimización. También, los requisitos permiten que los estudiantes deban interpretar los resultados matemáticos en distintos formatos con relación a la situación.

Agrupamiento e interacción. Los estudiantes desarrollan la tarea organizados en ternas. Al finalizar la clase, el profesor realiza la formalización y las conclusiones de la tarea. La interacción que se promueve es entre estudiante-grupo pequeño y profesor-gran grupo.

Conceptos y procedimientos. La tarea aborda los siguientes conceptos y procedimientos: sistemas de representación simbólico, tabular y gráfico de la función cúbica, traducciones entre los sistemas de representación, intervalos, puntos críticos y volumen.

Sistemas de representación. La tarea activa los sistemas de representación simbólico, tabular y gráfico.

Contextos de la tarea. Situamos esta tarea en un contexto científico.

Materiales y recursos. Los materiales y los recursos para desarrollar esta tarea son hojas de papel, lápiz y tablas. De manera opcional, los estudiantes pueden utilizar GeoGebra para verificar las gráficas.

Formulación

> Durante 12 horas, una llave deposita agua en un tanque mediante la función $f(t) = 0{,}5t^3 + 2t^2 + 8t$, donde t representa el tiempo (medido en horas) y $f(t)$ el volumen de agua que deposita la llave en el tanque —medido en metros cúbicos (m^3)—. Al mismo tiempo, un orificio en la parte inferior del tanque deja salir agua mediante la función $g(t) = 0{,}4t^3 + 4t^2 - 2t$, donde t representa el tiempo (medido en horas) y $g(t)$ el volumen de agua que sale por el orificio —medido en metros cúbicos (m^3)—. Tenga en cuenta que el volumen de agua en el tanque es la diferencia entre el volumen de agua que le entra y el volumen de agua que sale del tanque.
>
> 1. Determinar los puntos críticos del volumen del agua en el tanque a lo largo del tiempo y utilizarlos para describir su variación.
> 2. Presentar un informe general que permita evidenciar el momento en que se alcanza el mayor y el menor volumen del agua en el tanque. Se pueden incluir gráficos, tablas o hacer uso de GeoGebra.

Temporalidad. El profesor presenta la tarea y explica la forma de trabajo (8 minutos). Se estima que la duración de la tarea sea de 35 minutos. Es importante realizar, junto con los estudiantes, la formalización de la tarea, a partir de la solución de cada requerimiento.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

El profesor debe iniciar con el propósito de la tarea y hacer una lectura detallada de la situación y de los requerimientos para que no se realicen interpretaciones de la situación que no corresponden. El profesor debe estar atento a las variables que toman los estudiantes para modelar la situación. Por otro lado, debe tener cuidado con los máximos y los mínimos de la situación que van a hallar porque no son de las fórmulas que se mencionan. Se recomienda al profesor, al finalizar las dos tareas asociadas al segundo objetivo, destinar una sesión para realizar una puesta en común y una realimentación de 60 minutos. En esta sesión, el profesor debe institucionalizar las diferentes funciones cúbicas que obedecen a fenómenos de optimización y a fenómenos de crecimiento y decrecimiento en sentido estricto, a partir de los diferentes sistemas de representación.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

En este apartado, presentamos algunos aspectos relacionados con el grafo de criterios de logro de la tarea. El grafo muestra los posibles caminos de aprendizaje en torno al sistema de representación simbólico. También, presentamos los errores en los cuales puede incurrir el estudiante al realizar traducciones entre los sistemas de representación. Por último, establecemos la actuación del profesor.

Grafo de criterios de logro. En la figura 11, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea. De igual manera que en las tareas anteriores, los primeros criterios de logro están asociados al reconocimiento de la información, la elección del procedimiento y la verificación de la información. Luego, establecemos los criterios de logro asociados a la representación simbólica y al desarrollo de la fórmula para encontrar los puntos críticos y el criterio de la primera derivada. Posteriormente, se realiza una traducción entre los sistemas para relacionar el concepto de punto crítico.

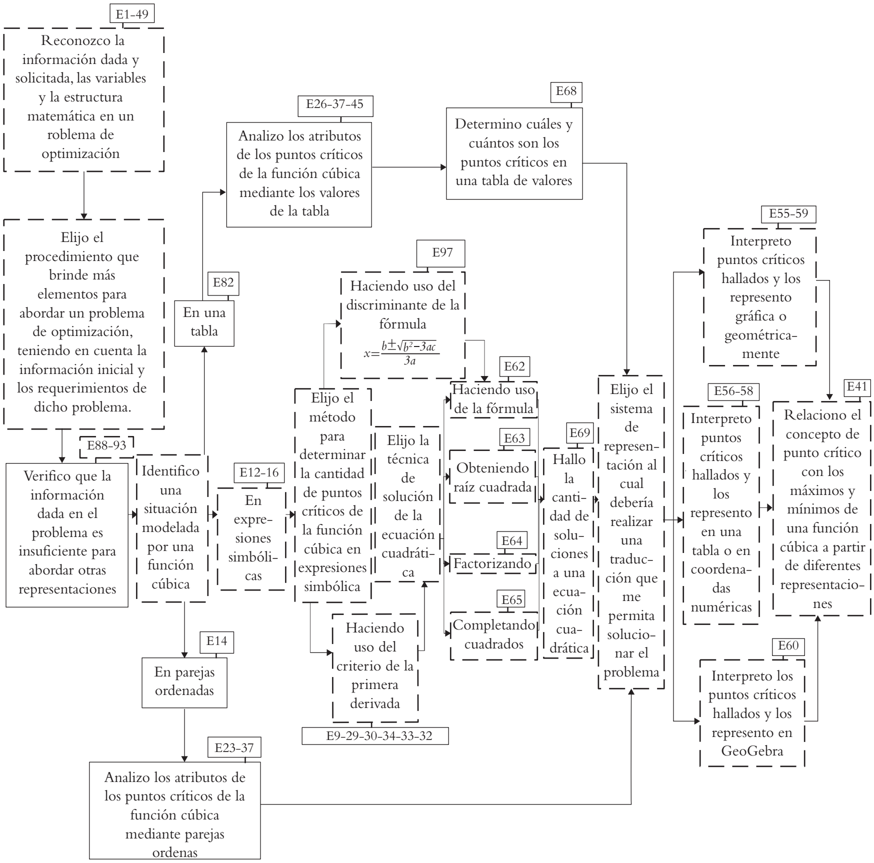


Figura 11. Grafo de criterios de logro de la tarea Tanque de agua

Errores en los que pueden incurrir los estudiantes. Los estudiantes podrían incurrir en errores como confundir la cantidad de puntos críticos a partir del sistema de representación simbólico; confundir los coeficientes de la función al aplicarlos en el discriminante o confundir las reglas de derivación; realizar traducciones de representaciones de la función cúbica a una gráfica que no guarda la información ni las relaciones establecidas de la situación; realizar traducciones de representaciones de la función cúbica a una tabla que no guarda la información ni las relaciones establecidas de la situación; y realizar traducciones de representaciones de la función cúbica a una representación ejecutable que no guarda la información ni las relaciones establecidas de la situación. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 4.

Actuación del profesor. El profesor debe motivar a los estudiantes para que logren solucionar toda la tarea. Asimismo, debe estar pendiente de si quedaron errores que no se lograron superar en las tareas anteriores, y revisar de manera constante el trabajo individual y de los grupos para constatar que todos realicen la actividad. Los estudiantes deben tener clara la situación del problema para que no surjan soluciones que no correspondan y no se bloqueen en algún requerimiento de la tarea o procedimiento. Las preguntas orientadoras que el profesor debe aplicar para que los estudiantes puedan continuar con el desarrollo de los procedimientos están relacionadas con la información inicial del problema, sus representaciones y la solución de una ecuación cuadrática. Las preguntas orientadoras pueden ser ¿cuál información presenta el problema para desarrollar la tarea?, ¿cuáles son las representaciones simbólicas que modelan el problema? y ¿cómo se soluciona una ecuación cuadrática? Por otro lado, sugerimos al profesor explicar la relación de los sistemas de representación con la gráfica al inicio de la sesión o cuando se empiece a representar la situación. En el anexo 18, presentamos el listado de ayudas sugeridas al profesor para contribuir a la superación de errores en los que pueden incurrir los estudiantes al solucionar esta tarea.

Evaluación. En esta tarea se evalúa que el estudiante matematice de manera correcta el problema, elija el método que le permita determinar la cantidad de puntos críticos de la función cúbica en la representación simbólica, y logre interpretar los puntos críticos como máximos o mínimos de la función cúbica mediante traducciones a otras representaciones.

3.7. Tarea Cajas de cartón

Con esta tarea, pretendemos que los estudiantes caractericen los puntos críticos en situaciones de optimización y vean la viabilidad de la construcción de las cajas. Se espera que los estudiantes generen un modelo matemático que les permita relacionar un lado de las cajas con el volumen y analizar si es posible realizar la construcción de las cajas con un volumen máximo y uno mínimo. A continuación, describimos los elementos de la tarea.

Requisitos. El estudiante debe ser capaz de reconocer las características de un problema modelado por una función cúbica que se refiera a un fenómeno de optimización. Debe conocer los conceptos de punto crítico, representación simbólica de los extremos relativos, volumen y construcción de sólidos.

Aportes de la tarea. La tarea promueve que el estudiante caracterice uno de los puntos críticos de la función cúbica como máximo en un fenómeno de optimización. Se busca incrementar el interés por razonar sobre los puntos críticos y su relación con el contexto del problema, mediante el uso del material manipulativo. Los conceptos y procedimientos que se deben usar para solucionar la tarea permiten reflexionar y elaborar argumentos que apoyen o refuten la solución matemática en el problema contextualizado.

Agrupamiento e interacción. Los estudiantes se agrupan en parejas para solucionar la tarea. El profesor asigna a cada pareja de estudiantes el requerimiento que debe socializar con sus compañeros. Para finalizar, el profesor formaliza la información obtenida por los estudiantes. La interacción que se promueve es entre estudiante-estudiante, estudiante-gran grupo y profesor-gran grupo.

Conceptos y procedimientos. La tarea Cajas de cartón aborda los conceptos y los procedimientos asociados al volumen, la operación de polinomios, los intervalos, los puntos críticos y las traducciones entre los sistemas de representación.

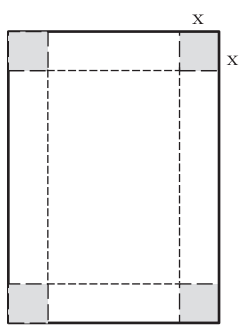
Sistemas de representación. Los sistemas de representación que se activan son el simbólico y el numérico.

Contextos de la tarea. Situamos esta tarea en un contexto profesional.

Materiales y recursos. Los materiales y los recursos para el desarrollo de esta tarea son hojas de papel, tablas, lápiz y cajas de cartón.

Formulación

> Se quiere construir una caja sin tapa que tenga el mayor volumen posible, usando una hoja tamaño carta (22 x 28 cm). Para la construcción, se realizan cortes de *x* cm en forma cuadrada a las esquinas de la hoja, como se muestra en la siguiente imagen.



1. Asignar tres valores distintos a x para el corte y construir una caja para cada corte asignado; agregar tantos fríjoles como sea posible hasta llenar cada una de las cajas construidas; y llenar los registros en los espacios indicados de la siguiente tabla.

x es la longitud del corte en centímetros	Dimensiones de la caja	Cantidad de fríjoles	Cantidad de cartón utilizado (cm^2)
(a) Valor asignado 1			
(b) Valor asignado 2			
(c) Valor asignado 3			
(d) Extremo relativo encontrado			
(e) Extremo relativo encontrado			

2. Determinar la expresión matemática del volumen que se quiere optimizar.
3. Describir la variación del volumen de la caja con respecto al valor asignado para el corte.
4. Determinar los extremos relativos del volumen de la caja.
5. Con cada extremo relativo encontrado, construir una caja, llenar su interior con tantos fríjoles como sea posible y completar la tabla con los nuevos registros.
6. Según los datos, ¿es posible construir una caja con la información que brinda cada extremo relativo sobre el valor del corte? ¿Qué dimensiones de la caja maximizan su volumen? ¿Qué se puede concluir del proceso de optimización? Justificar las respuestas.

Temporalidad. El profesor presenta la tarea y explica la forma de trabajo (10 minutos). Se estima que la duración de la tarea sea de una sesión de 60 minutos. Por último, el profesor realiza la institucionalización (15 minutos). El profesor debe estimar un tiempo adicional para que los estudiantes puedan registrar el alcance en cada criterio de logro de la tarea.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

El profesor debe realizar la presentación de la tarea y pedir a los estudiantes que construyan tres cajas y viertan fríjoles para verificar su volumen. Se debe indicar, con detalle, la forma de registrar los datos en la tabla propuesta.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

En este apartado, presentamos algunos aspectos relacionados con el grafo de criterios de logro de la tarea. El grafo muestra los posibles caminos de aprendizaje en torno al sistema de representación simbólico. También, presentamos los errores en los cuales puede incurrir el estudiante al momento de determinar el dominio admisible para que la situación tenga sentido. Por último, establecemos la actuación del profesor.

Grafo de criterios de logro. En la figura 12, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea. Inicialmente, los primeros criterios de logro están asociados al reconocimiento de la información y la elección del procedimiento.

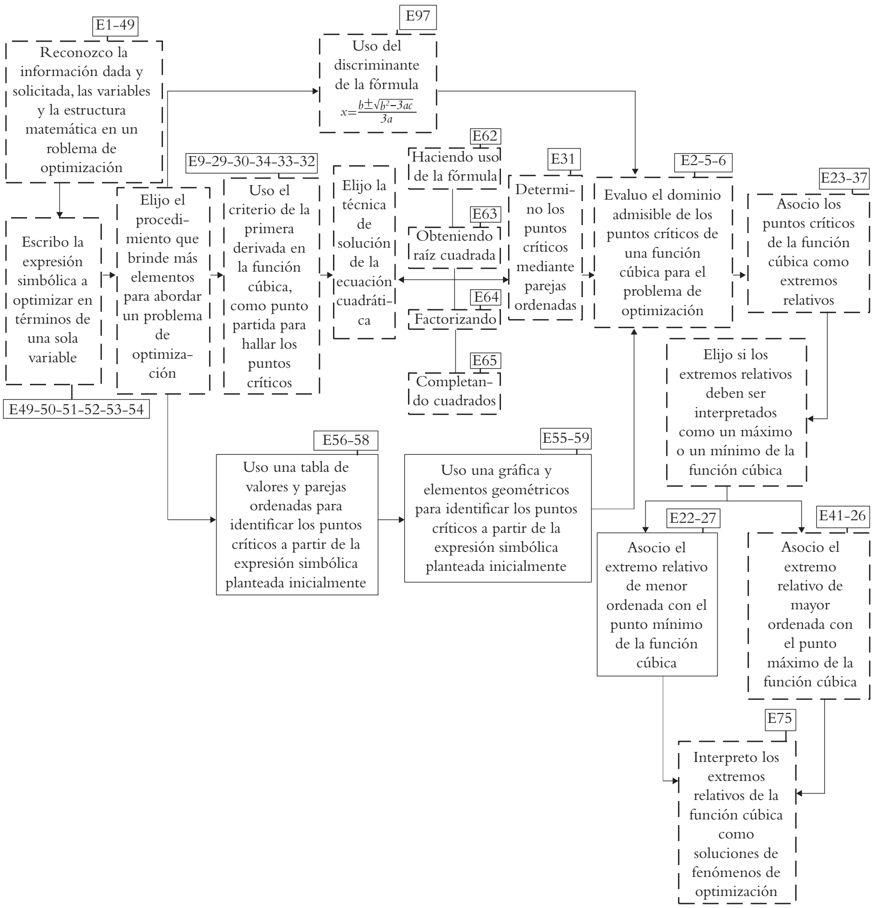


Figura 12. Grafo de criterios de logro de la tarea Cajas de cartón

Encontramos posteriormente los criterios de logro asociados a la representación simbólica para aplicar el criterio de la primera derivada o el uso de la fórmula para hallar los puntos críticos. Por último, establecemos los criterios de logro asociados a la interpretación de los puntos críticos que tengan sentido en el contexto del problema, si existe un volumen máximo o mínimo.

Errores en los que pueden incurrir los estudiantes. Al desarrollar la tarea, los estudiantes pueden incurrir en algunos errores. Por ejemplo, confundir los coeficientes de la función al aplicarlos en el discriminante; confundir las reglas de derivación; argumentar la solución obtenida sin tener en cuenta el contexto del problema; fijar una interpretación incoherente a partir de las soluciones obtenidas; y realizar procedimientos y obtener resultados que dificultan la identificación del dominio admisible. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 4.

Actuación del profesor. El profesor debe apoyar a los estudiantes para que logren solucionar toda la tarea. Debe estar pendiente de los errores que no se lograron superar en las tareas anteriores y revisar de manera constante los grupos de trabajo para constatar que todos realicen la actividad. Los estudiantes deben tener clara la situación del problema para que no surjan soluciones que no correspondan y no se bloqueen en algún requerimiento de la tarea o procedimiento. Las preguntas orientadoras que el profesor debe aplicar para que los estudiantes puedan continuar con el desarrollo de los procedimientos están relacionadas con las incógnitas del problema, los datos para construir la caja, generar la expresión simbólica del problema y utilizar el criterio de la primera derivada. Las preguntas orientadoras pueden ser las siguientes: ¿cuáles son las incógnitas que se encuentran en el problema?, ¿cuáles datos del problema te permiten construir la caja?, ¿cuáles son las variables y constantes en el problema? y ¿a qué valor está igualando la derivada? Por otro lado, sugerimos al profesor explicar la solución de ecuaciones cuadráticas, la correcta construcción de la caja y el dominio admisible de una función para que la situación tenga sentido. En el anexo 19, presentamos el listado de ayudas sugeridas al profesor para contribuir a la superación de errores en los que pueden incurrir los estudiantes al solucionar esta tarea.

Evaluación. En esta tarea, se evalúa que el estudiante determine la expresión simbólica de la función cúbica que modela la relación entre la altura de la caja y su volumen, utilice los diferentes procedimientos para resolver la ecuación cuadrática y analice el dominio admisible del punto crítico de la función cúbica en el problema.

3.8. Tarea Caminata

Con la última tarea, buscamos que los estudiantes caractericen los puntos críticos en situaciones de optimización a partir de la variación de la velocidad. Ellos deben analizar los datos mediante una representación tabular, para determinar los puntos críticos y analizar los casos en que existe una velocidad máxima y una velocidad mínima. A continuación, describimos los elementos de la tarea.

Requisitos. El estudiante debe ser capaz de reconocer las características de un problema modelado por una función cúbica que se refiera a un fenómeno de optimización y conocer los conceptos de punto crítico y representación tabular, gráfica y numérica de extremos relativos.

Aportes de la tarea. La tarea promueve que el estudiante caracterice uno de los puntos críticos de la función cúbica como mínimo en un fenómeno de optimización. La formulación de la tarea caminata permite que el estudiante valore la utilidad del concepto de punto crítico para razonar y justificar la solución adecuada de acuerdo con el contexto del problema. La tarea permite la comprensión de la relación entre el contexto del problema y la representación de la solución matemática. Lograr esta comprensión lleva al estudiante a valorar la viabilidad y establecer las posibles limitaciones de la situación.

Agrupamiento e interacción. En un primer momento, el profesor presenta al grupo de estudiantes la meta de la tarea. En seguida, los estudiantes abordan la tarea de manera individual. Por último, se comparten las soluciones de algunos de los estudiantes en gran grupo. Se concluye la sesión con la institucionalización y resolución de la tarea. La interacción que se promueve es entre profesor-estudiante, estudiante-estudiante, estudiante-gran grupo y profesor-gran grupo.

Conceptos y procedimientos. La tarea aborda los siguientes conceptos y procedimientos: representación tabular de una función, intervalos, puntos críticos y relación tiempo-velocidad.

Sistemas de representación. Los sistemas de representación que se activan son el tabular y el gráfico.

Contextos de la tarea. La tarea se sitúa en un contexto científico.

Materiales y recursos. La tarea utiliza los siguientes materiales y recursos: tablas, hojas de papel, lápiz y cajas de cartón.

Formulación

Los siguientes valores son el registro de la velocidad de una persona en función del tiempo.

Tiempo (min)	Velocidad (m/s)
0	0
0,1	0,058
0,2	0,224
0,3	0,486
0,4	0,832
0,5	1,25
0,6	1,728
0,7	2,254
0,8	2,816
0,9	3,402
1	4
1,1	4,598
1,2	5,184
1,3	5,746
1,4	6,272
1,5	6,75
1,6	7,168
1,7	7,514
1,8	7,776
1,9	7,942
2	8
2,1	7,938
2,2	7,744
2,3	7,406
2,4	6,912
2,5	6,25
2,6	5,40799999999999
2,7	4,374

Tiempo (min)	Velocidad (m/s)
2,8	3,136
2,9	1,682
3	0

1. Determinar los extremos relativos de la situación.
2. Describir lo que ocurre con la variación de la velocidad en la caminata.
3. En esta situación, ¿sería posible optimizar la velocidad con respecto al tiempo? ¿Por qué?
4. Relacionar los extremos relativos con el tiempo transcurrido en el que la persona alcanzó su mínima y su máxima velocidad.
5. Según lo observado en los puntos anteriores, ¿a partir de cuánto tiempo transcurrido la persona alcanza una mínima velocidad al caminar? Justificar la respuesta.

Temporalidad. El profesor inicia la sesión con la presentación de la tarea y explica la forma de trabajo (10 minutos). Se estima que los estudiantes resuelvan los requerimientos en 30 minutos. Por último, el profesor realiza la institucionalización en 20 minutos y estima un tiempo adicional para que los estudiantes puedan registrar el alcance en cada criterio de logro de la tarea.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

El profesor debe estar pendiente de las representaciones que realicen los estudiantes porque los valores que se presentan tienen varios decimales y puede generar errores asociados a la traducción entre representaciones. Al finalizar la tarea Caminata, se destina una sesión para realizar una puesta en común y realimentación de 60 minutos. En esta sesión, se pretende formalizar los diferentes sistemas de representación de la función cúbica para determinar los puntos críticos en situaciones de optimización.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

En este apartado, presentamos algunos aspectos relacionados con el grafo de criterios de logro de la tarea. El grafo muestra los posibles caminos de aprendizaje en torno a los sistemas de representación tabular y numérico. También, establecemos los errores en los que el estudiante puede incurrir al determinar el dominio admisible para que la situación tenga sentido. Por último, presentamos la actuación del profesor.

Grafo de criterios de logro. En la figura 13, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea. Observamos que los primeros criterios de logro están asociados al reconocimiento de la información y la elección del procedimiento. Los siguientes criterios de logro se refieren al uso de la representación tabular y de parejas ordenadas para realizar traducciones a las representaciones gráfica y geométrica. Lo anterior permite realizar la interpretación de los puntos críticos que tengan sentido en el contexto del problema.

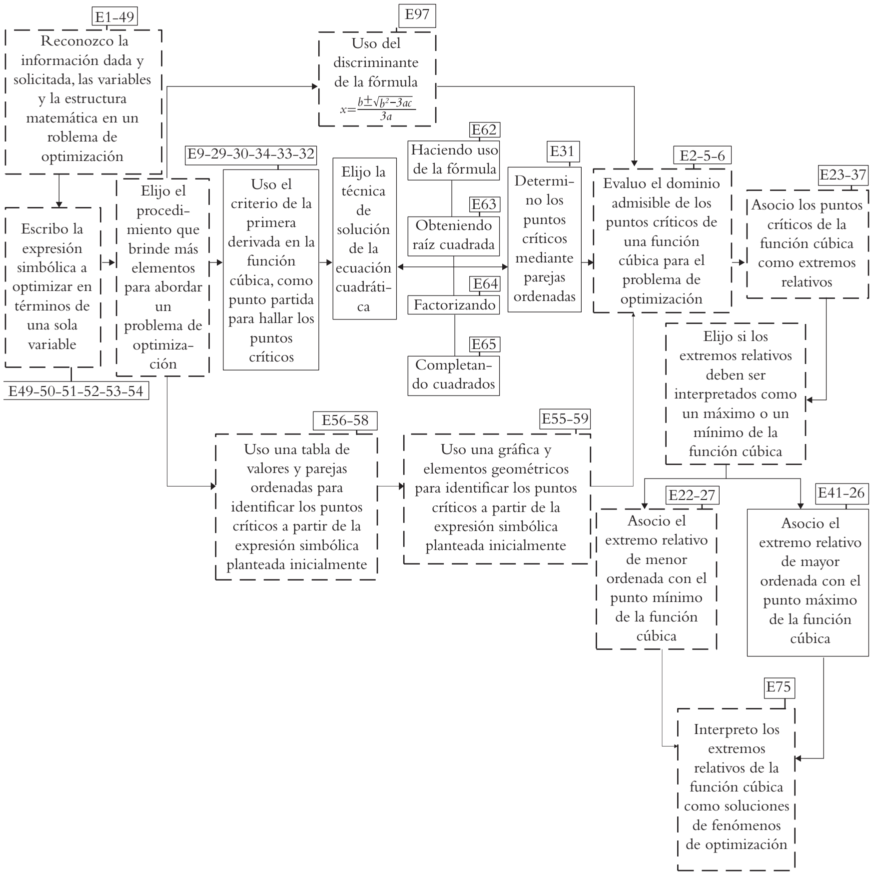


Figura 13. Grafo de criterios de logro de la tarea Caminata

Errores en los que pueden incurrir los estudiantes. Los estudiantes pueden incurrir en errores como confundir los puntos críticos en los sistemas de representación tabular y numérico; realizar traducciones de representaciones de la función cúbica a una tabla que no guarda la información ni las relaciones establecidas de la situación; establecer relaciones entre las diferentes representaciones de la función cúbica que no guardan relación con la representación de parejas ordenadas; confundir el concepto de punto crítico en la situación; argumentar la solución obtenida sin tener en cuenta el contexto del problema; fijar una interpretación incoherente a partir de las soluciones obtenidas; y realizar procedimientos y obtener resultados que dificultan la identificación del dominio admisible. El listado completo de errores se encuentra en el anexo 4.

Actuación del profesor. El profesor debe apoyar a los estudiantes para que logren solucionar toda la tarea. Adicionalmente, debe estar pendiente de si quedaron errores que no se lograron superar en las tareas anteriores y revisar de manera constante el trabajo individual y de los grupos para constatar que todos realicen la actividad. Los estudiantes deben tener clara la situación del problema para que no surjan soluciones que no correspondan y no se bloqueen en algún requerimiento de la tarea o procedimiento. Las preguntas orientadoras que el profesor debe aplicar para que los estudiantes puedan continuar con el desarrollo de los procedimientos están relacionadas con las incógnitas del problema, la generación de una gráfica a partir de parejas ordenadas y la optimización de la situación. Las preguntas orientadoras pueden ser las siguientes: ¿cuáles son las incógnitas que se encuentran en el problema?, ¿cuál escala puede trabajar en los ejes para analizar mejor la situación? y ¿se puede optimizar el problema con dos o más variables? Por otro lado, sugerimos al profesor explicar las escalas en el plano cartesiano para observar mejor la variación en las gráficas. En el anexo 20, presentamos el listado de ayudas sugeridas al profesor para contribuir a la superación de errores en los que pueden incurrir los estudiantes al solucionar esta tarea.

Evaluación. En esta tarea se evalúa que el estudiante describa la variación de la velocidad, determine si es una situación de optimización y concluya el proceso de optimización a partir de determinar el dominio admisible de la situación.

3.9. Evaluación final

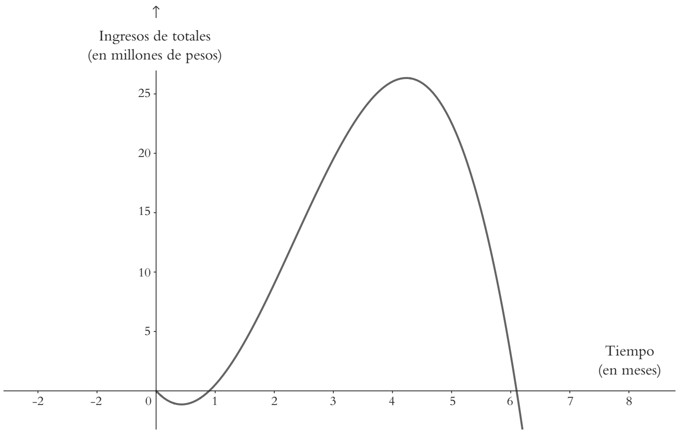
El examen final se realiza en una sesión de 60 minutos. En este examen, se evalúa el desarrollo de los estudiantes sobre el tema puntos críticos de la función cúbica. El examen consta de tres tareas asociadas a cada uno de los objetivos de aprendizaje para observar su nivel de desarrollo. Presentamos las rúbricas en términos de los criterios de logro que permiten determinar el desempeño de los estudiantes. En las rúbricas se encuentran los errores asociados a cada punto.

Formulación

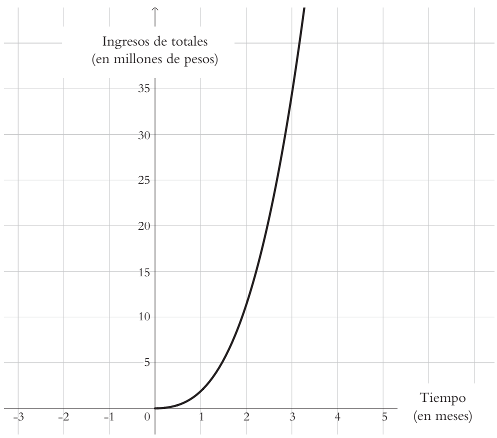
Tarea 1. Apertura de sucursales

Una compañía financiera planea abrir dos nuevas sucursales A y B. Como resultado de esta inversión, se espera que en x meses los ingresos totales de la sucursal A se representen de acuerdo con la expresión $I_A(x) = -x^3 + 7x^2 - 5{,}4x$ y lo de la sucursal de acuerdo con la expresión $I_B(x) = x^3 + 2x$.

a) Relacionar la función de ingresos de cada compañía con las gráficas 1 y 2 que se presentan a continuación.



Gráfica 1



Gráfica 2

b) Con base en lo anterior, determinar la sucursal en la que sus ingresos no dejarían de crecer con respecto al tiempo.

En la tabla 5, presentamos la rúbrica del primer punto.

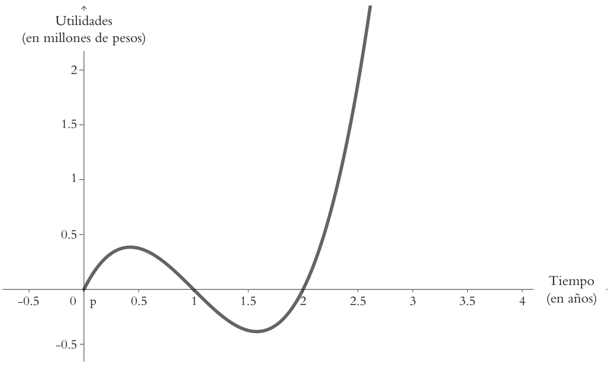
Tabla 5
Niveles de logro e indicadores del primer punto

Nivel de logro	Intervalo numérico	Indicadores
Superior	95-100	El estudiante identifica y analiza los puntos críticos en la función cúbica por medio de su representación gráfica (CdLl.18) y simbólica (CdL1.22), para determinar cuándo una función es creciente o decreciente y cuándo es optimizable. También puede utilizar el criterio de la primera derivada para hallar los puntos críticos (CdL1.16).
Alto	85-94	El estudiante utiliza el criterio de la primera derivada para hallar los puntos críticos (CdL1.16), e identifica y analiza los puntos críticos en la función cúbica por medio de su representación gráfica (CdL1.8) y simbólica (CdL1.22), para determinar cuándo una función es creciente o decreciente y cuándo es optimizable. Asocia cuándo una pendiente es nula al crecimiento o decrecimiento (E86).
Básico	75-84	El estudiante utiliza el criterio de la primera derivada para hallar los puntos críticos (CdL1.16), pero, para solucionar la ecuación cuadrática resultante, aplica la fórmula cuadrática y confunde los coeficientes (E33) o confunde los casos de factorización que se requieren para solucionar la ecuación cuadrática (E32).
Bajo	20-75	El estudiante reconoce que debe utilizar el criterio de la primera derivada para hallar los puntos críticos (CdL1.16), pero aplica la segunda derivada para determinar el punto de inflexión y lo considera como punto crítico (E9). Además, deriva una potencia sin operar el exponente (E29), deriva una potencia sin operar el coeficiente (E30) o iguala la derivada a un valor diferente de cero. El estudiante no reconoce el criterio de la primera derivada de la función cúbica para hallar los puntos críticos.

Tarea 2. Rendimiento empresarial

La propietaria de una compañía de textiles desea recibir información acerca del comportamiento de las utilidades durante los primeros dos años y medio de funcionamiento de su compañía, con el fin de determinar en qué momentos se generaron la mayor y la menor utilidad en este periodo de tiempo. Por lo anterior, pide a sus mejores empleados realizar un reporte que cumpla con su solicitud. A continuación, se muestra la presentación que cada empleado presentó.

Empleado 1



Empleado 2

Tiempo (años)	Utilidades (millones de pesos)
0	0
0,16	0,24
0,25	0,33
0,42	0,38
0,75	0,23
1	0
1,58	-0,8
1,75	-0,32
2	0
2,5	1,89

Empleado 3

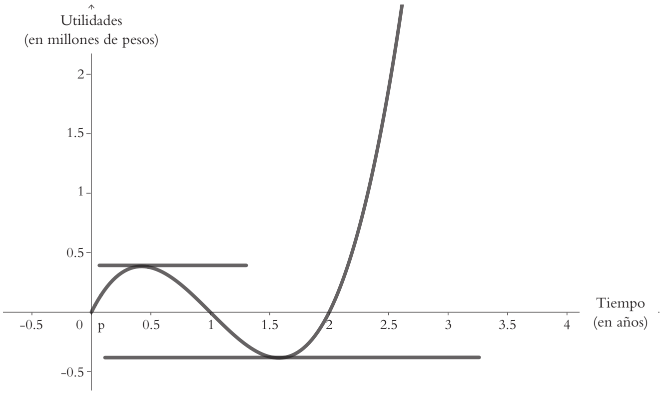
$$f(x) = x^2 - 3x^2 + 2x$$

Empleado 4

(0,0)
(0,16, 0,24)
(0,25, 0,33)
(0,42, 0,38)
(0,75, 0,233)

(1, 0)
(1,58, -0,38)
(0,75, -0,32)
(2, 0)
(2,5, 1,89)

Empleado 5



1. Determinar en qué momentos se generaron la mayor y la menor utilidad de la compañía según el reporte de cada empleado.
2. Mencionar una conclusión general haciendo uso de todos los reportes de los empleados.

En la tabla 6, presentamos la rúbrica del segundo punto.

Tabla 6
Niveles de logro e indicadores del segundo punto

Nivel de logro	Intervalo numérico	Indicadores
Superior	95-100	El estudiante analiza la situación mediante los sistemas de representación numérico (CdL2.18), tabular (CdL2.5) y gráfico (CdL2.20) para determinar los puntos críticos, y establece relaciones entre los diferentes sistemas de representación.
Alto	85-94	El estudiante analiza la situación mediante los sistemas de representación numérico (CdL2.18), tabular (CdL2.5) y gráfico (CdL2.20) para determinar los puntos críticos. Incurre en el error (E55) al establecer relaciones entre los diferentes sistemas de representación.

Nivel de logro	Intervalo numérico	Indicadores
Básico	75-84	El estudiante analiza la situación mediante los sistemas de representación numérico (CdL2.18), tabular (CdL2.5) y gráfico (CdL2.20), pero expresa la coordenada "x" como si fuera la "y" al hallar los puntos críticos (E23) y relaciona la pendiente positiva o negativa de una recta con el decrecimiento o crecimiento de una función, respectivamente (E3).
Bajo	20-75	El estudiante determina algunas características de los sistemas de representación pero no logra establecer relaciones que den solución al problema. Establece relaciones de la expresión simbólica de la función cúbica a una gráfica que no guarda la información ni las relaciones establecidas (E55). Incurre en el mismo error con una tabla (E56), con parejas ordenadas (E58) y con la representación geométrica (E59) El estudiante no determina características de los sistemas de representación al establecer traducciones para establecer los puntos críticos (E16, E17, E80, E81 y E82).

Tarea 3. Ingeniero industrial

Se pide a un ingeniero industrial que diseñe un recipiente cilíndrico de aluminio con una tapa de 80 dm^2.

a) Determinar las dimensiones del recipiente para que el volumen sea máximo.
b) Determinar las dimensiones del recipiente para que el volumen sea mínimo.
c) Según el contexto del problema, ¿es posible afirmar que el cilindro alcanza un volumen máximo y un volumen mínimo?

En la tabla 7, presentamos la rúbrica del tercer punto.

Tabla 7
Niveles de logro e indicadores del tercer punto

Nivel de logro	Intervalo numérico	Indicadores
Superior	95-100	El estudiante interpreta los extremos relativos de la función cúbica como soluciones de fenómenos de optimización (CdL3.19) dependiendo de si es un proceso de maximización (CdL3.17) o es un proceso de minimización (CdL3.18) y valora si los puntos críticos encontrados se interpretan como un máximo o un mínimo en el contexto del problema (CdL3.16).

Nivel de logro	Intervalo numérico	Indicadores
Alto	85-94	El estudiante interpreta los extremos relativos de la función cúbica como soluciones de fenómenos de optimización (CdL3.19) dependiendo de si es un proceso de maximización (CdL3.17) o es un proceso de minimización (CdL3.18) y valora si los puntos críticos encontrados se interpretan como un máximo o un mínimo en el contexto del problema (CdL3.16). Argumenta la solución al problema sin tener en cuenta el contexto (E75).
Básico	75-84	El estudiante interpreta los extremos relativos de la función cúbica como soluciones de fenómenos de optimización (CdL3.19), pero relaciona el valor mayor en la variable independiente como máximo local (E26) o relaciona el menor valor de la variable independiente como mínimo relativo (E27).
Bajo	20-75	El estudiante evalúa el dominio admisible de los puntos críticos (CdL3.12) y los asocia a los extremos relativos (CdL3.13). Asocia el punto mínimo o máximo local al punto más alto o bajo que observa en la representación gráfica (E22). Además, establece dos posibles soluciones a situaciones de optimización cuando se requiere un máximo o un mínimo (E41). Por último, cuando argumenta la solución, no tiene en cuenta el contexto (E75). El estudiante no interpreta los extremos relativos de la función cúbica como las soluciones de fenómenos de optimización y no establece los puntos críticos.

Criterios del examen final

En la tabla 8, presentamos la valoración general del examen con su respectiva descripción.

Tabla 8
Valoración general del examen

Nivel de logro	Intervalo numérico	Descripción
Superior	95-100	El estudiante diferencia funciones cúbicas, determina puntos críticos y los relaciona en diferentes representaciones. Adicionalmente, interpreta dichos puntos como mínimo o máximo de acuerdo con el contexto del problema.
Alto	85-94	El estudiante diferencia funciones cúbicas, determina puntos críticos y los relaciona en diferentes representaciones. Adicionalmente, interpreta dichos puntos como mínimo o máximo de acuerdo con el contexto del problema, pero incurre en los errores E55, E86 y E75.

Nivel de logro	Intervalo numérico	Descripción
Básico	75-84	El estudiante diferencia funciones cúbicas, determina puntos críticos y los relaciona en diferentes representaciones. Sin embargo, incurre en los errores E33, E32, E23, E3, E26 y E27.
Bajo	20-75	El estudiante diferencia funciones cúbicas, pero incurre en los errores E9, E29, E30, E55, E56, E58, E59, E16, E17, E80, E81, E82, E22, E41 y E75.

4. Conclusiones

El diseño, implementación y evaluación de la unidad didáctica relacionada con los puntos críticos de la función cúbica, basada en el modelo del análisis didáctico (Gómez, 2018), nos permitió reflexionar sobre la importancia de conocer los conceptos y procedimientos que giran en torno al contenido matemático que se pretende desarrollar con los estudiantes. Además, nos permitió concretar qué de ese contenido matemático se va a enseñar con una unidad didáctica; identificar y establecer relaciones entre las diferentes formas de representar el contenido matemático; reconocer los fenómenos que dan sentido al contenido matemático; establecer expectativas de aprendizaje y afectivas que estén alineadas con la normatividad y las orientaciones curriculares; prever las limitaciones de aprendizaje que podrían surgir en el proceso de aprendizaje y generar ayudas que brinden oportunidades para superarlas; diseñar, organizar y evaluar tareas de aprendizaje que contribuyan al logro de las expectativas de nivel superior y la superación de dificultades; y establecer criterios e instrumentos de evaluación para determinar el nivel de logro de las expectativas.

Establecimos la optimización de la función cúbica como enfoque en el diseño inicial de nuestra unidad didáctica, debido al interés por el reconocimiento y la utilidad de la optimización de funciones aplicado a situaciones de la vida real (Bulla, Guasca, Medina, Muñoz y Cifuentes, 2016). No obstante, la reflexión sobre la información que obtuvimos en el análisis didáctico nos permitió constatar que el concepto matemático que estructura los fenómenos de optimización está relacionado con los puntos críticos. En este sentido, identificamos que los puntos críticos son el concepto matemático que privilegiamos en el diseño implementado.

Nuestra unidad didáctica contribuye a los procesos y a las capacidades matemáticas fundamentales propuestas en el marco PISA 2012. En su orden, la unidad didáctica aporta al desarrollo del proceso matemático de formular, interpretar y emplear. También, contribuye al desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales, como comunicación, matematización, sistemas de representación y razonamiento y argumentación.

5. Anexos

A continuación, presentamos el listado de anexos que apoyan el diseño de la unidad didáctica sobre los puntos críticos de la función cúbica.

Anexo 1. Listado de las capacidades.
Anexo 2. Listado de la secuencia de capacidades.
Anexo 3. Listado de los conocimientos previos.
Anexo 4. Listado de las dificultades y los errores.
Anexo 5. Material fotocopiable de las tareas de evaluación y de aprendizaje.
Anexo 6. Evaluación diagnóstica.
Anexo 7. Tareas de aprendizaje.
Anexo 8. Evaluación final.
Anexo 9. Diario del profesor.
Anexo 10. Diario del estudiante.
Anexo 11. Listado de criterios de logro.
Anexo 12. Simulador en GeoGebra para la tarea Programa para modelar.
Anexo 13. Registro acciones para la tarea Utilidades.
Anexo 14. Listado de ayudas para los errores en los que incurren los estudiantes en la tarea 1.
Anexo 15. Listado de ayudas para los errores en los que incurren los estudiantes en la tarea 2.
Anexo 16. Listado de ayudas para los errores en los que incurren los estudiantes en la tarea 3.
Anexo 17. Listado de ayudas para los errores en los que incurren los estudiantes en la tarea 4.
Anexo 18. Listado de ayudas para los errores en los que incurren los estudiantes en la tarea 5.

Anexo 19. Listado de ayudas para los errores en los que incurren los estudiantes en la tarea 6.

Anexo 20. Listado de ayudas para los errores en los que incurren los estudiantes en la tarea 7.

6. Referencias

Bulla, A., Guasca, G., Medina, D., Muñoz, R. y Cifuentes, P. (2016). *Documento final de la actividad 2.4 de MAD 4.* Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.

Gómez, P. (2018). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares*. Bogotá: Universidad de los Andes.

González, M. J. y Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Bogotá: Universidad de los Andes.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*. Recuperado el 30 de enero del 2014, de http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor. Recuperado de http://is.gd/lRHR7t

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Instituto de Ciencias de la Educación (ICE) - Horsori.