

CAPÍTULO 3

INTERVALOS

MÓNICA RAMÍREZ, SLENY MORENO, VIVIANA CABALLERO
Y CARLOS VELASCO

Presentamos una unidad didáctica que busca contribuir al aprendizaje del tema de los intervalos. Para ello, diseñamos una unidad didáctica basándonos en el modelo de análisis didáctico (Gómez, 2018), como un recurso para que un profesor de matemáticas pueda implementarla en cualquier institución, con estudiantes que inicien grado undécimo. El diseño surge de la necesidad de contribuir al logro de estándares curriculares y derechos básicos de aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Después de realizar una revisión bibliográfica, encontramos que son escasos los trabajos sobre la enseñanza del tema de los intervalos.

Para producir la unidad didáctica realizamos un análisis de los temas que intervienen en el aprendizaje de los intervalos; definimos los aprendizajes que esperamos que los estudiantes adquieran al desarrollar la unidad didáctica; planteamos una tarea diagnóstica, unas tareas de aprendizaje y una tarea de evaluación; e implementamos y evaluamos el diseño de la unidad didáctica, con un grupo de estudiantes, para llegar al resultado que presentamos en este documento.

En las tareas de aprendizaje de esta unidad didáctica, abordamos el concepto de intervalo a partir de la definición como subconjunto de números reales que cumplen con sus propiedades y operaciones. Utilizamos las representaciones verbal, gráfica, numérica y simbólica de los intervalos y establecemos sus características. Seleccionamos algunos fenómenos que pueden ser modelados por medio de intervalos, para que fueran atractivos, interesantes y motivantes para los estudiantes.

La unidad didáctica se compone de tres partes. En la primera, presentamos los aspectos que el profesor debe considerar antes de implementar

las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica; en la segunda, presentamos una tarea diagnóstica y las tareas de aprendizaje; y, en la tercera, describimos lo referente a la evaluación de la unidad didáctica. En el anexo 5¹, presentamos el material fotocopiable de cada una de las tareas de la unidad didáctica. Comenzamos este capítulo con los fundamentos conceptuales y cognitivos de la unidad didáctica.

1. Expectativas de aprendizaje

Asumimos una visión funcional de las matemáticas, como se presenta en el marco conceptual PISA 2012 (Ministerio de Educación Cultura y Deporte de España, 2013). Planteamos unos objetivos de aprendizaje para el tema y definimos unas expectativas sobre las actitudes de los estudiantes. A partir de las expectativas de aprendizaje que proponemos, planteamos tareas de aprendizaje con el fin de que los estudiantes las alcancen. Organizamos este trabajo de acuerdo con los tres niveles de expectativas superior, medio e inferior, y en dos ámbitos: el cognitivo y el afectivo. Estos conjuntos de expectativas nos permiten concretar lo que esperamos que los estudiantes aprendan sobre el tema y de qué manera suponemos que lo harán.

Nivel superior: procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales

Tomamos las expectativas de este nivel del marco conceptual PISA 2012 pues en este encontramos una explicación de los procesos matemáticos que debe seguir un estudiante para resolver problemas contextualizados y la descripción de las capacidades que debemos desarrollar para lograr este propósito. Las capacidades matemáticas fundamentales son las siguientes: diseño de estrategias para resolver problemas; matematización, comunicación, razonamiento y argumentación; utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; representación; y utilización de herramientas matemáticas. Cada capacidad matemática fundamental se relaciona con los tres procesos de formular, emplear e interpretar y evaluar. Nuestro propósito, con la unidad didáctica, es contribuir a estas expectativas, al presentar las tareas de aprendizaje por medio de situaciones en diferentes contextos para que los estudiantes las

1 Los anexos se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/9565/>

resuelvan y sean capaces de argumentar a partir de sus conocimientos sobre los intervalos.

Un ejemplo de la contribución a las capacidades matemáticas fundamentales es la matematización. En nuestra propuesta promovemos que los estudiantes, a partir de situaciones contextualizadas, extraigan la información necesaria para representar y operar intervalos. Contribuimos también al proceso de formular, al promover que los estudiantes reconozcan el momento para utilizar los intervalos en la solución de situaciones que les presentamos de manera contextualizada.

Nivel medio: objetivos de aprendizaje

En este nivel, concretamos tres objetivos de aprendizaje. Para cada objetivo de aprendizaje, describimos lo que esperamos que los estudiantes sean capaces de hacer después de resolver las tareas de aprendizaje de dicho objetivo.

Con el objetivo 1, “usar las propiedades de orden y densidad de los números reales, para caracterizar intervalos representados de diferentes formas”, pretendemos que los estudiantes comprendan y utilicen las propiedades de los números reales en la solución de situaciones, y sean capaces de leer un intervalo y reconocer sus características a partir de una de sus representaciones.

Con el objetivo 2, “determinar el conjunto solución en la recta real al realizar la comparación de dos o más intervalos”, pretendemos que los estudiantes hagan uso de las representaciones gráficas de intervalos para compararlos, e identifiquen y realicen las operaciones de unión, intersección o diferencia para resolver problemas.

Con el objetivo 3, “justificar la validez de la solución de una situación usando intervalos”, pretendemos que los estudiantes, a partir de diferentes situaciones, planteen ecuaciones e inecuaciones relacionadas con intervalos o con sus elementos, representen de diferentes formas los intervalos y que los utilicen para analizar y dar solución a una situación.

Caracterización de los objetivos de aprendizaje: grafos de criterios de logro

Caracterizamos los objetivos de aprendizaje y los presentamos en un grafo de criterios de logro. Este grafo incluye frases que expresan los procedimientos observables en los estudiantes al resolver una tarea de aprendizaje. Estos procedimientos se organizan en estrategias de resolución. En la figura 1,

presentamos, como ejemplo, el grafo de criterios de logro del objetivo 3. Los grafos de criterios de logro de todos los objetivos se pueden consultar en el anexo 1.

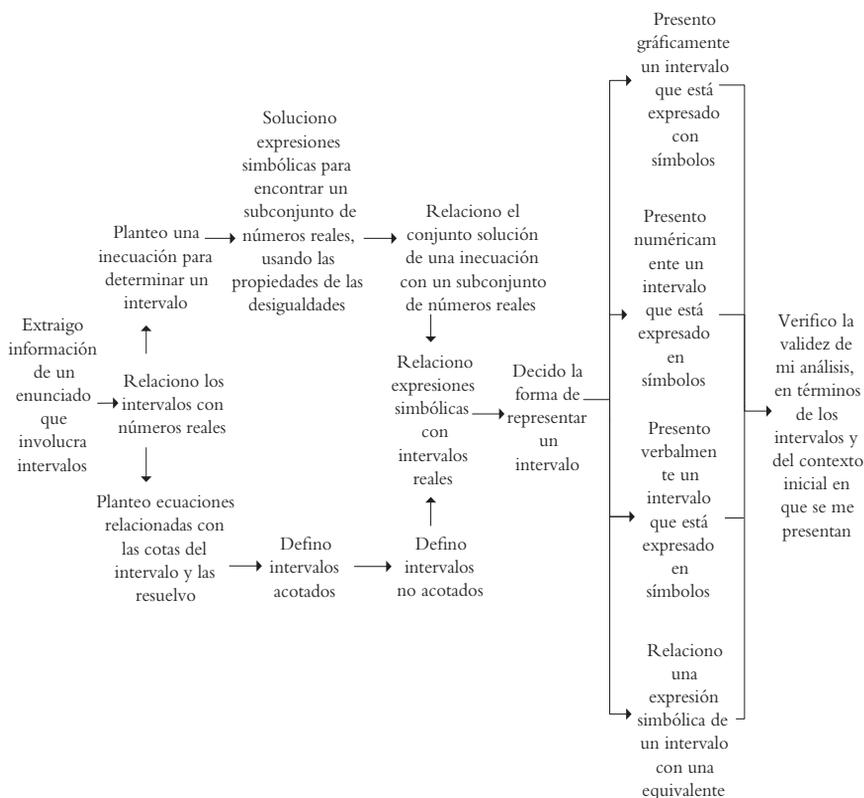


Figura 1. Grafo de criterios de logro del objetivo 3

En este grafo, podemos observar las estrategias de resolución de las tareas del objetivo 3, con las que buscamos que los estudiantes planteen ecuaciones o inecuaciones que les permitan dar solución a las situaciones planteadas.

Nivel inferior: capacidades

En este nivel, identificamos las capacidades: los procedimientos rutinarios básicos que debe realizar un estudiante para lograr los objetivos que planteamos para el tema intervalos. Elaboramos un listado con estas capacidades

que puede ser consultado en el anexo 2. Analizamos cada uno de estos procedimientos rutinarios relacionados con el tema e identificamos los posibles errores que se pueden presentar al realizarlos. Organizamos estos errores en grupos que nos permitieran identificar una dificultad de aprendizaje. Estos errores y dificultades pueden ser consultados en el anexo 3. Un ejemplo de capacidad es el procedimiento que el estudiante debe realizar al inicio de la solución de una tarea en la que “extrae información del enunciado de una situación que involucra intervalos”. Al intentar realizar este procedimiento, el estudiante puede incurrir en el error “omite información importante del enunciado de una situación que involucra intervalos”.

Expectativas afectivas

Una vez planteadas las expectativas de aprendizaje, pensamos en la forma en que la actitud de los estudiantes frente a la solución de las tareas, la forma de presentar resultados y la manera de interactuar con sus compañeros pueden influir en el aprendizaje de conceptos y procedimientos concretos del tema. A partir de esta reflexión, planteamos cuatro expectativas afectivas para la unidad didáctica que presentamos a continuación.

1. Es perseverante al usar intervalos para solucionar situaciones matemáticas.
2. Se interesa por modelar situaciones a través de los intervalos.
3. Es respetuoso con sus compañeros al discutir argumentos sobre las características de los intervalos.
4. Presenta de forma organizada la información obtenida en el desarrollo de las tareas relacionadas con representaciones de intervalos.

2. Análisis de contenido

Para orientar la implementación de esta unidad didáctica, presentamos la ubicación curricular del tema en los documentos curriculares de interés en Colombia; identificamos los temas relacionados con los intervalos que pueden ser de utilidad al abordar su aprendizaje; y, de acuerdo con las expectativas que planteamos, identificamos la forma en que los estudiantes podrían llegar a una comprensión del tema a partir de conceptos y procedimientos, formas de representar los intervalos y la fenomenología.

Ubicación curricular del tema

Ubicamos el tema en dos documentos curriculares de la legislación colombiana: los *Estándares básicos de competencias en matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006) y los *Derechos básicos de aprendizaje* (MEN, 2015). También consideramos un documento internacional: el marco conceptual PISA 2012 (Ministerio de Educación Cultura y Deporte de España, 2013). Estos documentos curriculares nos proporcionaron elementos teóricos sobre las capacidades y los procesos que deben desarrollar los estudiantes en matemáticas. En los *Estándares básicos de competencias en matemáticas*, ubicamos el tema en el pensamiento numérico y en los sistemas numéricos, asociado al estándar “Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada” (MEN, 2006, p. 88), propuesto para los grados décimo y undécimo. En los *Derechos básicos de aprendizaje*, el tema aparece en el primer derecho básico de grado undécimo: “Comprende que entre cualesquiera dos números reales hay infinitos números reales” (MEN, 2015, p. 1, grado 11). En el marco conceptual PISA 2012, el tema está asociado a la categoría de contenido de cantidad (Ministerio de Educación Cultura y Deporte de España, 2013, p. 10).

Conceptos y procedimientos

Realizamos una revisión bibliográfica sobre el tema y un estudio sobre la evolución histórica de su tratamiento, lo que nos permitió establecer la forma de introducirlo en el aula. En las tareas de aprendizaje, trabajamos el concepto de intervalo a partir de la definición como subconjuntos de los números reales que cumple con sus propiedades y sobre el que es posible efectuar operaciones como unión, intersección y diferencia. En la figura 2, presentamos un grafo que resume los conceptos relacionados con el tema.

Relacionamos los intervalos reales con las propiedades de los números reales: los intervalos son subconjuntos de números reales que cumplen con las propiedades de tricotomía, transitividad y densidad. Las dos primeras propiedades están definidas en los axiomas de orden y, la tercera, densidad o completitud, está definida en los axiomas del extremo superior.

Las propiedades de orden generan una relación matemática entre números reales que se denomina desigualdad. Una inecuación es una desigualdad que involucra una o más variables y solo se verifica para algunos valores.

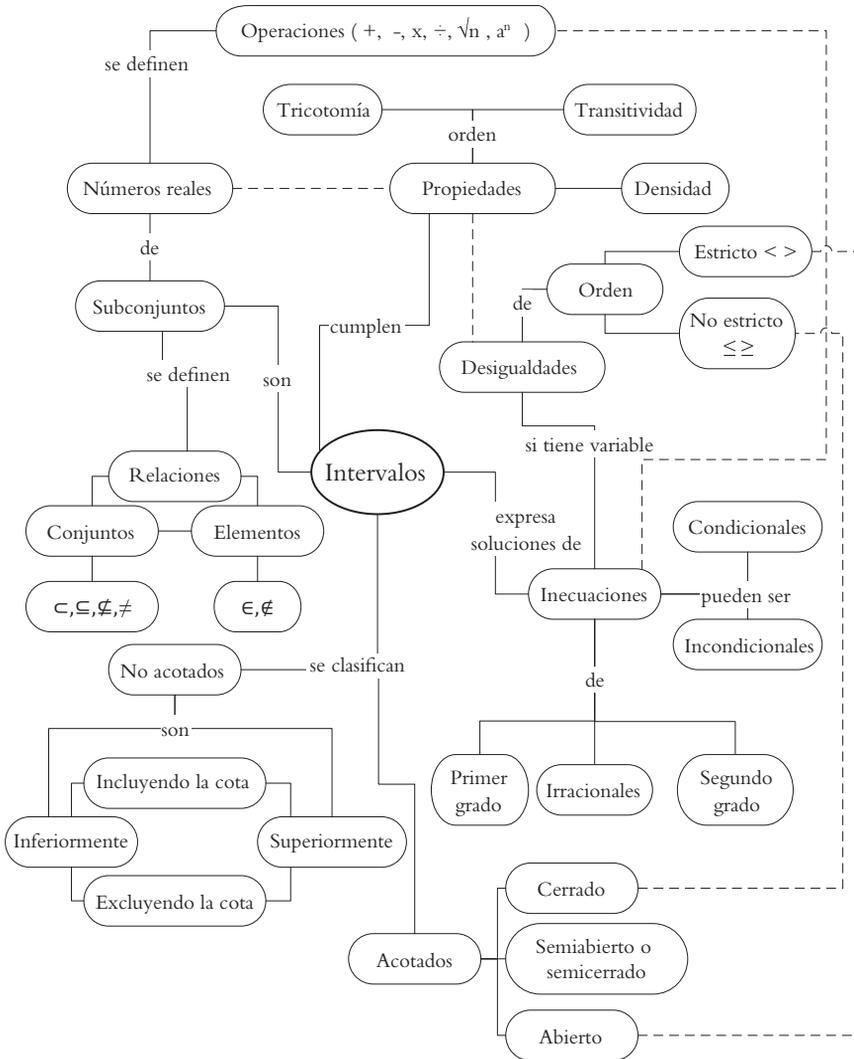


Figura 2. Conceptos relacionados con los intervalos y sus características

Se clasifica como de primer grado, si está asociada a expresiones lineales o de grado uno; de segundo grado, si está asociada a expresiones que contienen una variable elevada al cuadrado o dos variables; e irracional, si está asociada a expresiones con radicales en las que la variable está contenida. Una inecuación que es válida para todas las variables se llama inecuación incondicional;

las que son válidas solo para algunos valores de las variables se conocen como inequaciones condicionales. La solución de una inequación se expresa por medio de intervalos.

Los intervalos se clasifican en acotados y no acotados. Los intervalos acotados se relacionan con las inequaciones ya que, dependiendo del símbolo que se utilice, pueden ser abiertos, para un orden no estricto (menor que $<$, mayor que $>$); cerrados, para un orden estricto (menor igual que \leq , mayor igual que \geq); o semiabierto y semicerrado, si existe una combinación de signos estrictos y no estrictos.

Representaciones del tema intervalos

Consideramos importante identificar las representaciones de los intervalos y cómo pueden ser útiles en la comprensión de características como, por ejemplo, sus cotas. Identificamos cinco formas de representar los intervalos (verbal, numérica, gráfica, simbólica y ejecutable) y establecimos las relaciones que se pueden presentar entre ellas (por ejemplo, las equivalencias de símbolos entre representaciones). Aprovechamos estas relaciones entre símbolos para plantear diferentes tareas de aprendizaje que nos permitirán contribuir a los objetivos que proponemos. En la figura 3, indicamos las representaciones que se pueden presentar para los intervalos según sus características. Esta información se puede consultar con detalle en el anexo 4.

En la figura 3, presentamos algunos ejemplos de los sistemas de representación del tema intervalos. Relacionamos las posibles equivalencias que se pueden establecer entre ellas con las líneas punteadas. En el sistema de representación verbal encontramos intervalos abiertos que están representados con expresiones como entre, mayor-menor y después-antes. En este caso, relacionamos este tipo de intervalo representado verbalmente con representaciones numéricas como $(4,5)$. Aquí, los paréntesis representan la existencia de la cota, pero su no inclusión en el intervalo.

Por otra parte, encontramos que existen diferentes convenciones para presentar un intervalo de forma gráfica. Por ejemplo, para los extremos de un segmento o una semirrecta, la circunferencia y el círculo no son los únicos que se pueden encontrar para asociar las características de las cotas. También, encontramos que la representación gráfica se hace al relacionar los segmentos y las semirrectas a los paréntesis y los corchetes. De la misma manera, el paréntesis es sustituido por un corchete invertido. En la figura, solo mostramos una de las convenciones para representar gráficamente un intervalo.

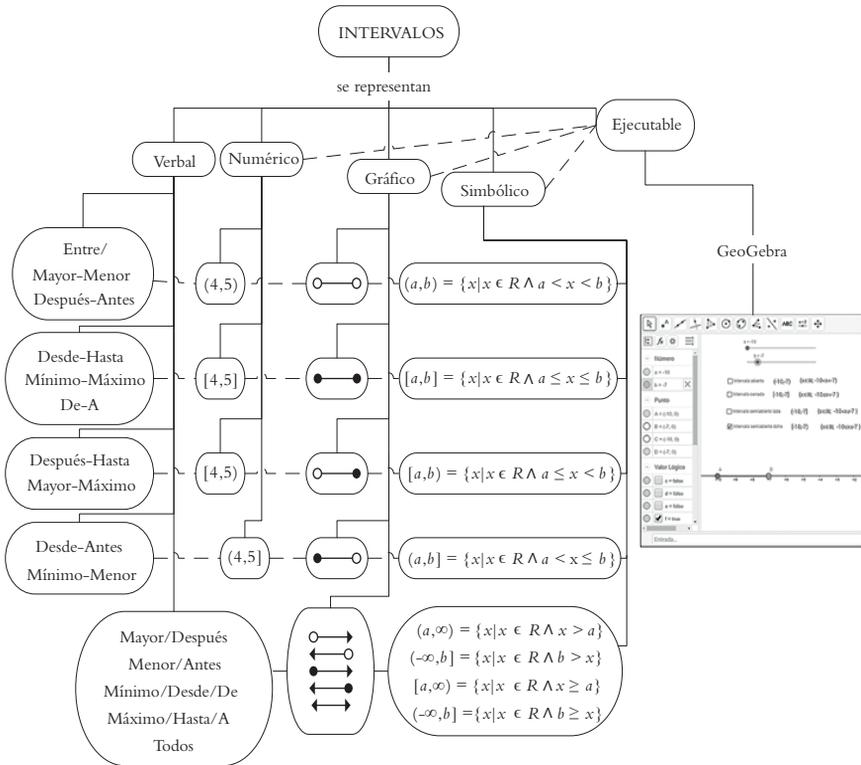


Figura 3. Sistemas de representación para el tema intervalos

Por otro lado, en el sistema de representación simbólico, presentamos la notación particular de intervalos. En este sistema de representación, empleamos dos letras separadas por una coma. El primer valor corresponde a la cota inferior, ubicada a la izquierda, y el segundo a la cota superior, ubicada a la derecha. Los signos de agrupación describen si esta cota se incluye ([]) o no (()) en el intervalo. En esta misma notación, incluimos la equivalencia de estos intervalos en la notación de conjuntos por comprensión.

Finalmente, en el sistema de representación ejecutable, presentamos una animación en la aplicación GeoGebra en la que utilizamos elementos propios del programa: deslizador, casilla de control, texto, punto, segmento y eje x , entre otros. Estos elementos permiten diferenciar esta representación de la representación gráfica, por características como la interfaz y el *zoom* de acercamiento o de alejamiento. Además, los parámetros de cada elemento mostrados en esta animación nos permiten construir reglas para operarlos entre sí.

Fenómenos que dan sentido al tema

La clasificación y organización de datos ha sido siempre una necesidad humana. Desde la aparición del hombre, se conocen formas de registro y organización de datos asociados a eventos naturales: por ejemplo, marcas en árboles y en cuevas con información sobre el tiempo y cambios climáticos.

El uso de intervalos ha sido fundamental en diferentes disciplinas académicas en las que se utilizan las matemáticas para categorizar, modelar y analizar los fenómenos. Por ejemplo, en política, se usan los intervalos para definir parámetros de legalidad al momento de legislar; en ciencias de la salud, para clasificar resultados de mediciones biométricas y llegar a un diagnóstico; en ciencias sociales, para establecer líneas de tiempo en las que ocurrieron sucesos históricos, políticos o culturales importantes; y, en ciencias naturales, para registrar la regularidad de estaciones, ciclos biológicos y tratar de predecir fenómenos naturales.

Con base en lo anterior, presentamos algunas situaciones en las que tienen uso los intervalos: índice de masa corporal (IMC), escala de Richter, tarifas para el cobro de parqueaderos, gasto de gasolina, etapas de la vida, épocas de la historia, índices de aprobación o reprobación de una asignatura, calendarios, presión sanguínea, profundidad del mar, índices de alcoholemia, presupuestos, especificaciones de estatura para ingresar a una atracción mecánica y velocidad de los vientos para determinar huracanes.

En la figura 4, presentamos un esquema que contiene los fenómenos, los contextos fenomenológicos, las subestructuras matemáticas, las relaciones entre estos y los contextos PISA 2012.

En este esquema, mostramos la organización que realizamos de los fenómenos asociados al tema intervalos, mediante tres análisis: subestructuras matemáticas, contextos fenomenológicos y contextos PISA 2012, que representamos con rectángulos sombreados. En la subestructura matemática, establecemos dos categorías (acotados y no acotados) que se dividen a su vez en cuatro categorías cada una. Paralelamente, presentamos los contextos fenomenológicos. Estos últimos se relacionan de manera biunívoca con las subestructuras matemáticas pues se fundamentan en ellas. Los fenómenos, ubicados en la columna central del esquema, se relacionan con los contextos PISA 2012 de la siguiente manera: personal en línea punteada, social en línea continua delgada, profesional en línea doble y científico en línea continua gruesa.

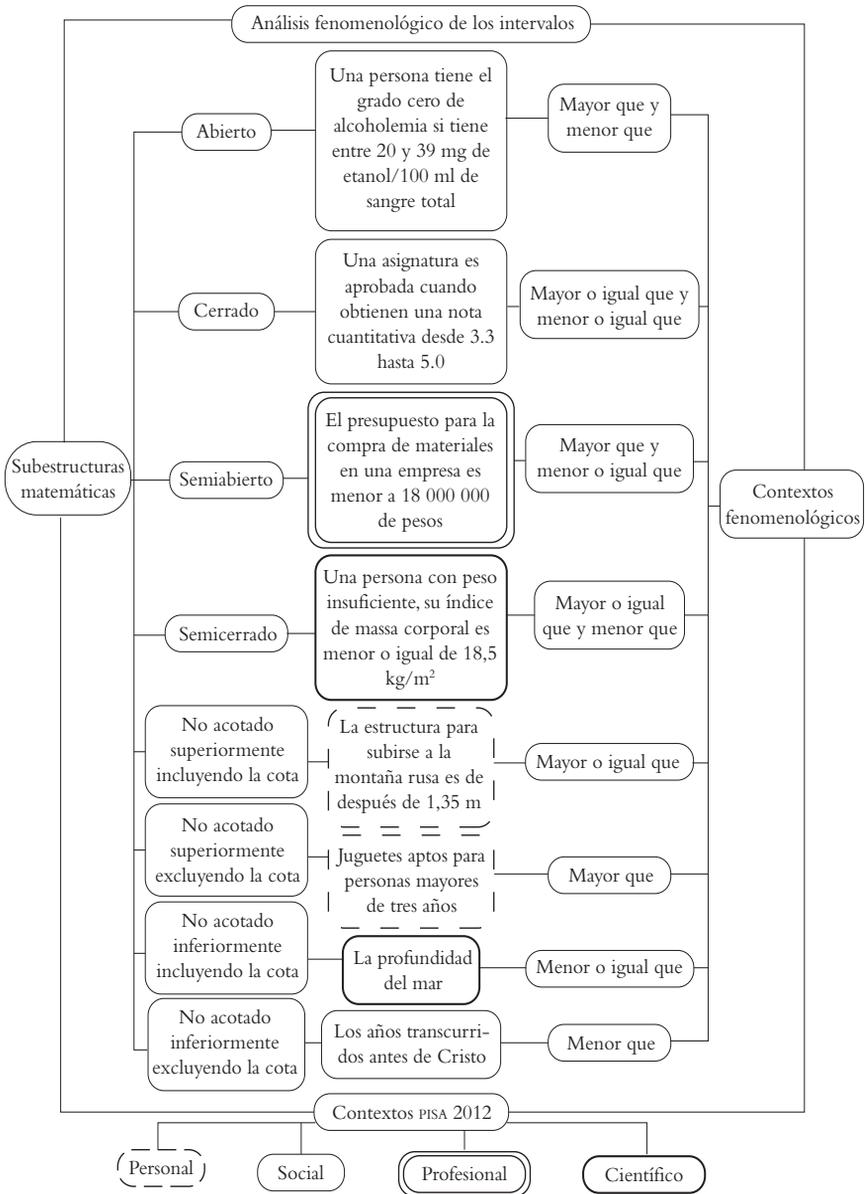


Figura 4. Fenomenología del tema intervalos

3. Antes de implementar

Esta unidad didáctica se puede implementar con estudiantes de grado undécimo y en cualquier aula de clase. Enmarcamos la unidad didáctica en la normatividad curricular colombiana para contribuir al estándar “Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada” (MEN, 2006, p. 88), propuesto para los grados décimo y undécimo y al derecho básico de aprendizaje en grado undécimo “comprende que entre cualesquiera dos números reales hay infinitos números reales” (MEN, 2015, p. 11).

3.1. Articulación de los contenidos

Nuestra intención con la unidad didáctica es que los estudiantes utilicen diferentes formas de representar intervalos, realicen operaciones básicas entre ellos y que los utilicen para resolver diferentes situaciones. Relacionamos los intervalos reales con las propiedades de los números reales. Según Apóstol, “el conjunto de todos los puntos comprendidos entre a y b se denomina intervalo”. Los intervalos cumplen con las propiedades de los números reales: tricotomía, transitividad y densidad. Las dos primeras propiedades están definidas en los axiomas de orden, en tanto que la tercera, densidad o completitud, está definida en los axiomas del extremo superior (Apóstol, 1984).

Las inecuaciones son utilizadas en la notación de conjuntos para expresar los extremos superiores o inferiores de un intervalo. Esta es una de las representaciones de tales subconjuntos. Otras representaciones son a través de la recta numérica y como notación de intervalos. Los números reales se pueden representar utilizando puntos sobre la recta real, de modo que a cada número real le corresponde exactamente un punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde un número real. A esto se le llama correspondencia biunívoca. Los intervalos se pueden representar con un segmento de recta, una semirrecta o la recta real, dependiendo de si son acotados o no y si existen unas convenciones para representar las cotas. Además, existe una notación propia de los intervalos en la que se utiliza una combinación de símbolos de agrupación y números; los símbolos paréntesis o corchetes para diferenciar entre abierto y cerrado, los números para indicar el inicio o el final del intervalo y el símbolo de infinito que representa que el intervalo se extiende indefinidamente.

3.2. Expectativas de aprendizaje

Con la unidad didáctica, buscamos contribuir a los procesos matemáticos y a las capacidades matemáticas fundamentales que propone el marco conceptual PISA 2012 (Ministerio de Educación Cultura y Deporte de España, 2013). Proponemos tres objetivos de aprendizaje y cuatro expectativas de tipo afectivo. Presentamos esas expectativas en el apartado de expectativas afectivas. Los objetivos de aprendizaje son los siguientes.

Objetivo 1. Usar las propiedades de orden y densidad de los números reales para definir un intervalo representado de diferentes formas.

Objetivo 2. Determinar el conjunto solución, en la recta real, al realizar la comparación de dos o más intervalos.

Objetivo 3. Justificar la validez de la solución de una situación usando intervalos.

3.3. Posibles errores en los que pueden incurrir los estudiantes

Abordamos las limitaciones de aprendizaje (dificultades y errores) como elementos útiles a la hora de planificar la enseñanza de los intervalos. Las limitaciones de aprendizaje son circunstancias que pueden distorsionar y lentificar el aprendizaje de los estudiantes. Elaboramos un listado de errores relacionados con las circunstancias que entorpecen la consecución de los objetivos de aprendizaje (dificultades). Estas circunstancias están asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos propios del pensamiento matemático (Socas, 1997).

El listado se compone de ocho dificultades con un grupo de errores asociados que, de presentarse, permiten reconocer si un estudiante tiene la dificultad. Las dificultades para la unidad didáctica del tema son las siguientes.

D1. Dificultad para asociar intervalos con subconjuntos de números reales que cumplen las propiedades de orden y densidad.

D2. Dificultad al expresar intervalos en cada sistema de representación.

D3. Dificultad para realizar traducciones entre representaciones de intervalos.

D4. Dificultad para interpretar el concepto de infinito en un intervalo.

D5. Dificultad al clasificar un intervalo.

D6. Dificultad para interpretar y justificar la solución a diferentes situaciones empleando intervalos.

D7. Dificultad al aplicar procedimientos y algoritmos para resolver operaciones entre intervalos.

D8. Dificultad al interpretar qué operación se debe aplicar a una situación específica con intervalos.

Como ejemplo, en la tabla 1, presentamos una dificultad con sus errores asociados. La lista completa de dificultades y errores puede consultarse en el anexo 3.

Tabla 1
Ejemplo de dificultades y errores

Error	D4. Dificultad para interpretar el concepto de infinito en un intervalo
39	Relaciona el símbolo con un número real
40	Representa con el símbolo ∞ decrecimientos infinitos
41	Representa con el símbolo $-\infty$ crecimientos infinitos
42	Emplea el símbolo ∞ para expresar un intervalo no acotado inferiormente
43	Emplea el símbolo $-\infty$ para expresar un intervalo no acotado superiormente

Presentamos algunos ejemplos de los errores que consideramos más representativos.

E1. Relaciona un intervalo con los números enteros comprendidos entre dos enteros

Al preguntar a los estudiantes por los números comprendidos entre 2 y 5, la respuesta esperada es el intervalo. Sin embargo, algunos estudiantes responden que corresponde a los valores numéricos 3 y 4. Esta respuesta nos demuestra que los estudiantes no tienen clara la propiedad de densidad de los números reales.

E18. Confunde las convenciones para expresar un intervalo dentro del sistema de representación simbólico

Al pedirle al estudiante que exprese el intervalo que corresponde a la solución de la inecuación $-5 > x$, él propone la representación $(-5, \infty)$. Esta actuación nos permite observar que el estudiante confunde el símbolo $>$ con el símbolo $<$ y, por tanto, expresa de manera incorrecta el intervalo.

E34. Confunde la equivalencia entre signos en la traducción del sistema de representación numérico al verbal

Al solicitarle al estudiante que exprese con palabras el intervalo $(-2,5)$, el estudiante dice que el intervalo es el conjunto de números reales desde -2 y antes de 5 . Esta actuación nos permite observar que el estudiante usa de forma incorrecta los signos de la representación numérica a la representación verbal, ya que expresa verbalmente un intervalo semiabierto.

E56. No interpreta el resultado según el contexto

Al discutir con los estudiantes un cartel encontrado en la estación de Transmilenio de Banderas, “los niños menores a tres años no pagan el pasaje”, se les pide que representen el intervalo de los niños que no pagan pasaje. Uno de los estudiantes presenta el intervalo $(-\infty, 3]$ y sus compañeros aceptan esta respuesta. Esta actuación nos permite observar que los estudiantes no validaron la veracidad del intervalo en el contexto de la situación, dado que el mínimo de edad que puede tener una persona es de cero años.

3.4. Criterios de logro

Cada criterio de logro es una frase con la que describimos uno de los procedimientos que debe realizar el estudiante para llegar a resolver las tareas de aprendizaje. Identificamos los criterios de logro para cada uno de los objetivos de aprendizaje. El listado de criterios de logro puede consultarse en el anexo 6.

3.5. Grafo de los criterios de logro de los objetivos de aprendizaje

Para el objetivo 1, planteamos 28 criterios de logro. Los criterios de logro más importantes son los que se refieren a realizar la lectura de intervalos representados de diferentes formas y las relaciones entre sus representaciones. Un ejemplo es el criterio de logro “presento con símbolos un intervalo que está expresado en palabras”. En la figura 5, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1.

En la figura 5, observamos que, con este objetivo, los estudiantes deben ser capaces de (a) extraer información importante de enunciados que involucran representaciones de intervalos, (b) analizar intervalos relacionándolos

con subconjuntos de números reales a partir sus representaciones, (c) deducir características de un intervalo a partir de una inequación, (d) decidir cuál es la mejor forma de presentar el intervalo teniendo en cuenta la información inicial, (e) expresar intervalos en diferentes sistemas de representación al realizar traducciones o transformaciones sintácticas (es decir, relacionar una representación de un intervalo en un sistema determinado con uno equivalente en ese mismo sistema), (f) clasificar intervalos según sus características y (g) verificar la validez de su análisis en términos de los intervalos y del contexto inicial en que se presentan.

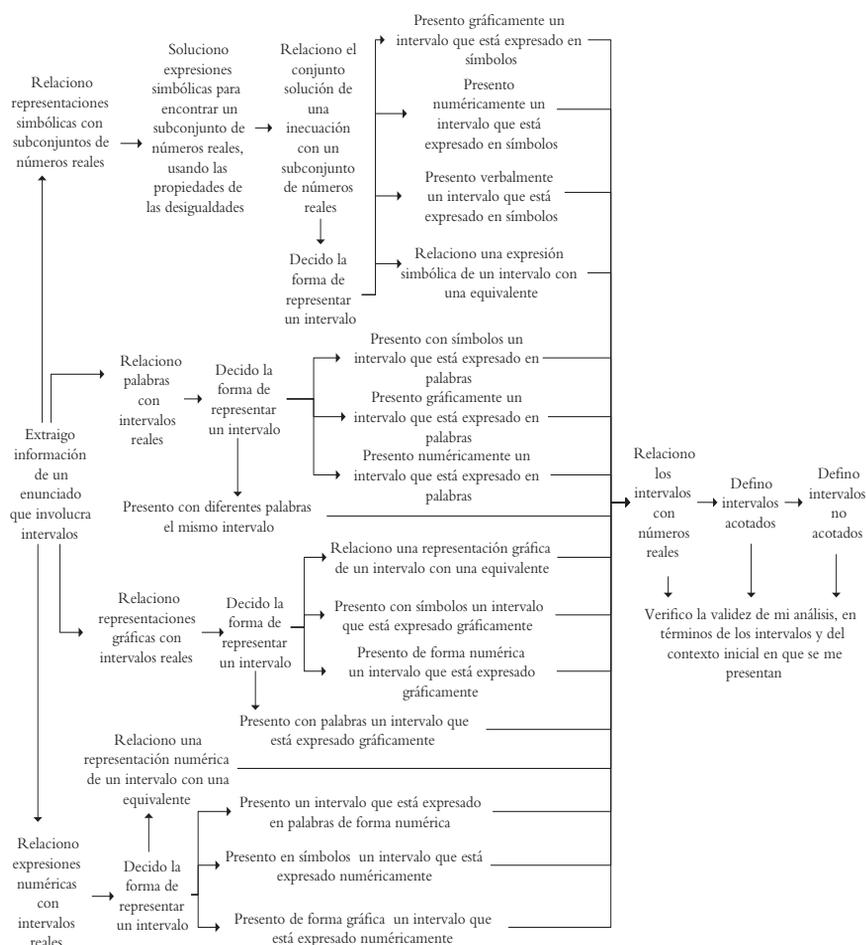


Figura 5. Grafo de criterios de logro objetivo 1

Para el objetivo 2, planteamos 17 criterios de logro. En este caso, los criterios de logro más relevantes son los referentes a identificar y realizar las operaciones entre intervalos y utilizar la representación gráfica para comparar intervalos. Un ejemplo de estos criterios es “realizo operaciones de intersección entre intervalos”. En la figura 6, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 2.

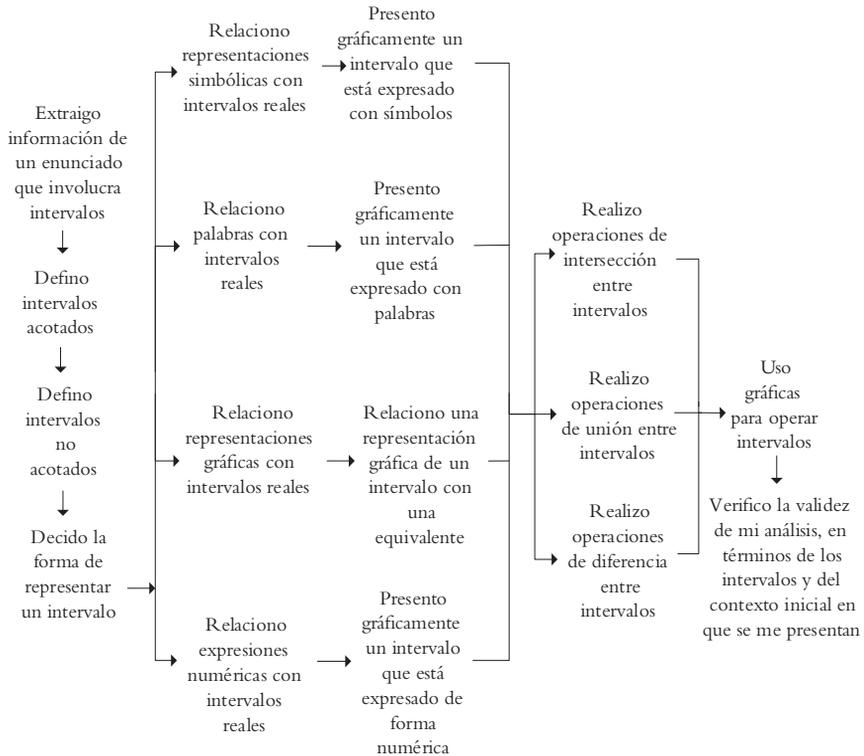


Figura 6. Grafo de criterios de logro objetivo 2

En la figura 6, observamos que, en este objetivo de aprendizaje, los estudiantes deben ser capaces de (a) extraer información importante de enunciados que involucran representaciones de intervalos, (b) clasificar intervalos según sus características, (c) decidir cuál es la mejor forma de presentar el intervalo teniendo en cuenta la información inicial y relacionar intervalos reales con sus representaciones, (d) expresar intervalos en diferentes sistemas de representación al realizar traducciones o transformaciones sintácticas,

(e) realizar operaciones entre intervalos y (g) verificar la validez de su análisis en términos de los intervalos y del contexto inicial en que se presentan.

Para el objetivo 3, planteamos 15 criterios de logro. Los criterios más significativos son los que se refieren a identificar las características de intervalos a partir de un enunciado, expresarlas al utilizar ecuaciones e inecuaciones, resolverlas, y dar un resultado en contexto. Un ejemplo de estos criterios de logro es “planteo ecuaciones relacionadas con las cotas del intervalo y las resuelvo”. En la figura 7, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 3.

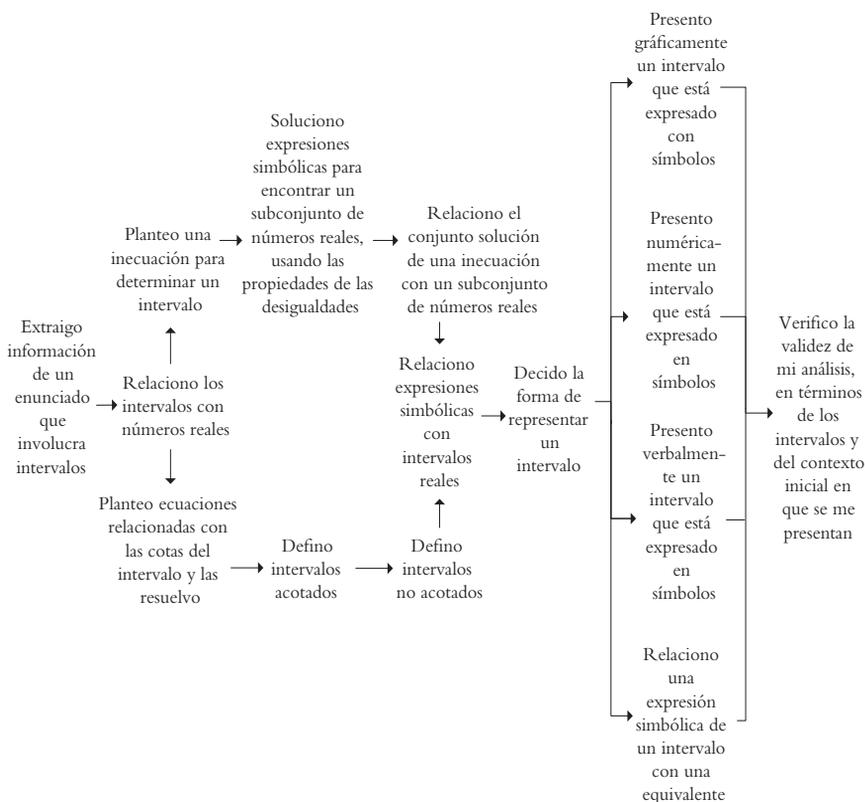


Figura 7. Grafo de criterios de logro objetivo 3

En la figura 7, observamos que, en este objetivo de aprendizaje, los estudiantes deben ser capaces de (a) extraer información importante de enunciados que involucran representaciones de intervalos, (b) establecer la relación entre los números reales, los intervalos y sus propiedades, (c) plantear una inecuación y resolverla aplicando las propiedades de las desigualdades,

(d) relacionar la solución de una inecuación con un intervalo, (e) plantear y resolver ecuaciones al relacionarlas con las cotas de un intervalo, (f) relacionar expresiones simbólicas con un intervalo, (g) decidir cuál es la mejor forma de presentar el intervalo al tener en cuenta la información inicial, (h) expresar intervalos en el sistema de representación gráfico al realizar traducciones o transformaciones sintácticas y (i) verificar la validez de su análisis en términos de los intervalos y del contexto inicial en que se presentan.

3.6. Esquema general de la unidad didáctica

En la tabla 2, presentamos la secuencia de tareas de aprendizaje, organizada por sesiones, el objetivo al que está asociada cada tarea, el tipo de tarea y el tiempo aproximado para el desarrollo de la sesión correspondiente. El tiempo en el que proponemos se desarrollen las tareas está adaptado a clases de 110 minutos, que corresponde a una sesión. Las tareas de aprendizaje se pueden desarrollar en cuatro sesiones de clase.

Tabla 2
Descripción de la secuencia de tareas

Sesión	Objetivo	Tarea	Tiempo
1	1	1.1 Biodegradación	55
		1.2 Inecuaciones	55
		1.3 Prueba Saber 11	55
2	1	1.4 Atracciones mecánicas	55
		2.1 Biciclase unión	50
3	2	2.2 Biciclase intersección	25
		2.3 Biciclase diferencia	35
4	3	3.1 Índice de masa corporal	55
		3.2 Zona cardíaca	55

Para el objetivo 1, planteamos cuatro tareas de aprendizaje. En la primera tarea, Biodegradación, los intervalos están planteados de forma numérica, para que los estudiantes reconozcan las características propias de esta representación como símbolos y signos que serán usados en tareas posteriores. Además, los estudiantes deben reconocer la clasificación de los intervalos de acuerdo con la inclusión de la cota. Proponemos esta como la primera tarea porque

genera una buena actitud de los estudiantes hacia la unidad didáctica. La segunda tarea de aprendizaje es Inecuaciones. Con esta tarea, los estudiantes reconocen las características de los intervalos presentados de manera simbólica y dan respuesta a la situación planteada. La tercera tarea es Prueba Saber 11. Con esta tarea, los estudiantes reconocen los intervalos presentados en gráficas. Finalmente, en la cuarta tarea, Atracciones mecánicas, los estudiantes reconocen las características del lenguaje verbal, al representar intervalos, y establecen relaciones entre las diferentes formas de representarlos.

Para el objetivo 2, presentamos tres tareas de aprendizaje para que sean trabajadas en una misma sesión de clase y compartan el contexto Biciclase. Con estas tareas de aprendizaje, los estudiantes representan gráficamente intervalos, mediante material concreto construido por ellos, para realizar las operaciones de unión, intersección y diferencia.

Para el objetivo 3, planteamos dos tareas de aprendizaje. En la primera tarea, Índice de masa corporal, los estudiantes plantean inecuaciones que les permiten llegar a intervalos a partir de una situación y justifican su respuesta en el contexto. En la segunda tarea, Zona cardíaca, los estudiantes plantean igualdades que relacionan con las cotas de los intervalos, clasifican los intervalos a partir de la información inicial, los representan, los usan en el análisis de la situación y presentan conjeturas desde su análisis. En los siguientes apartados, presentaremos las tareas que componen la unidad didáctica. Comenzamos por la tarea diagnóstica.

4. Tareas

A continuación, presentamos las tareas que configuran la unidad didáctica.

4.1. Tarea diagnóstica

La implementación de la unidad didáctica inicia con la tarea diagnóstica. Nuestro propósito con esta tarea es establecer si los estudiantes tienen los conocimientos necesarios para iniciar las tareas de aprendizaje. La tarea diagnóstica contiene 10 preguntas abiertas que permiten establecer si los estudiantes conocen los conjuntos numéricos; utilizan algoritmos para realizar operaciones entre números reales; conocen las propiedades de los números reales; representan gráficamente números en la recta numérica; plantean y solucionan ecuaciones e inecuaciones; utilizan las propiedades de las des-

igualdades para resolver inecuaciones de primer grado; utilizan diferentes notaciones para expresar conjuntos; realizan operaciones entre conjuntos; y reconocen las relaciones que se pueden presentar entre conjuntos.

Sugerimos que los conocimientos previos que proponemos se verifiquen antes de iniciar la implementación de las tareas de aprendizaje, porque estos conocimientos son necesarios para realizar algunos de los procedimientos requeridos en las tareas de aprendizaje.

Descripción de la tarea

Describimos la tarea diagnóstica a partir de los siguientes elementos: requisitos, conceptos y procedimientos implicados, formas de representación que se activan, contextos, materiales o recursos que se utilizarán, agrupamiento de los estudiantes, interacciones previstas entre profesor y estudiantes y entre estudiantes, formulación y temporalidad.

Aportes de la tarea a las expectativas. La meta de la tarea diagnóstica es verificar los conocimientos previos necesarios para implementar las tareas de aprendizaje.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea. En la tarea diagnóstica, se abordan los conceptos relacionados con operaciones entre conjuntos numéricos, representación de números en la recta numérica, pertenencia de un elemento en un conjunto, contención de un conjunto en otro, propiedades de las igualdades y desigualdades, propiedades de tricotomía y transitividad, unicidad de la solución a una ecuación, y notación de conjuntos y símbolos asociados a una relación de orden.

Sistemas de representación que se activan. La tarea diagnóstica motiva la activación de las siguientes representaciones: numérica, al solucionar polinomios aritméticos; simbólica, al incluir el trabajo de inecuaciones y notación de conjuntos; verbal, al utilizar enunciados con intervalos en palabras; y gráfica, al representar intervalos en la recta numérica.

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea diagnóstica se sitúa en contextos científicos, personales y sociales. Ubicamos los primeros cuatro ítems y el sexto al noveno en un contexto científico-matemático. En ellos, los estudiantes deben conocer el lenguaje matemático para referirse a conjuntos numéricos, las convenciones para representar diferentes tipos de números sobre la recta numérica, los símbolos para expresar relaciones entre un elemento y un conjunto, la notación de ecuaciones e inecuaciones, y las propiedades de las igualdades y las desigualdades. Ubicamos los numerales quinto y décimo en

los contextos personal y social. Para resolverlos, los estudiantes deben pensar en situaciones reales como el ahorro de dinero, la diferencia entre estaturas de personas y los gustos sobre un deporte.

Materiales o recursos. Los materiales de esta tarea son fotocopias con la formulación de la tarea, lápiz, borrador, colores y regla.

Agrupamiento e interacciones previstas. La tarea diagnóstica está diseñada para ser trabajada por los estudiantes individualmente, en una sesión de 70 minutos.

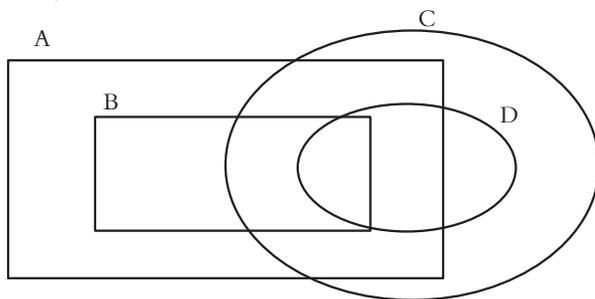
Formulación

- Realiza las siguientes operaciones.
 - $[-3+(2-5)-8]$
 - $\{4-[8/(3-5)]\} \cdot 6$
 - $(13+6)/(-7+4)$
 - $18-[-6 \cdot (-3/-1)]+(2)$
 - $[(14-6)+(7-11)]/2$
- Ubica en la recta numérica los resultados del ejercicio 1.
- Escribe los resultados del ejercicio 1 en la tabla y marca con \in o \notin en cada conjunto numérico.

Resultado	N	Z	Q	I	R
A					
B					
C					
D					
E					

- Resuelve las siguientes ecuaciones.
 - $x-3 = 2x + 9$
 - $\frac{1,5}{2x} = 15$
 - $-10 + x^2 = 6$
- Contesta cada pregunta y justifica tu respuesta.
 - Si tú eres más alto que yo y tu hermano es más alto que tú, ¿puedo decir que tu hermano es más alto que yo?
 - Si Cristian no ahorró más de 15.000 pesos y no tiene menos de 15.000 pesos, ¿cuánto tiene Cristian?

- c) Si una libra esterlina (£) es más que un euro (€) y un euro (€) es más que un dólar (\$), ¿es correcto afirmar que un dólar (\$) es más que una libra esterlina (£)?
6. Despeja las siguientes variables en cada inecuación.
- $2x + 6 > 13$
 - $-4x + 5 < 0$
 - $3x - 8 > 15$
7. Escribe todos los elementos de los siguientes conjuntos.
- $A = \{x \mid x \text{ es una vocal}\}$
 $B = \{x \mid x \text{ es un número par}\}$
 $C = \{x \mid x \text{ es un número menor que } 10\}$
 $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ y } -2 < x \leq 10\}$
8. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ y } 5 \leq x \leq 8\}$, $D = \{3, 4\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Escribe por extensión el resultado de cada operación y elabora el diagrama de Venn correspondiente².
- A. $A \cup B$ D. $D \cap B$
 B. $A - B$ E. $C \cup D$
 C. $A \cap C$ F. $D - C$
9. Observa los diagramas y escribe los símbolos \subset o $\not\subset$ en cada caso³ (ver la figura).



- A B
 A C
 D C
 B C
 D B
 B D
 B A
 C D

10. A la entrada de la escuela, se aplicó a 156 niños una encuesta respecto a sus juguetes favoritos. La encuesta arrojó los siguientes resultados.
- A 52 niños les gustaba el balón, a 63 les gustaban los carritos y a 87 les gustaban los videojuegos.
 - Además, algunos de ellos coinciden en que les gustaba más de un juguete: 26 juegan con el balón y carritos; 37 juegan con carritos y videojuegos;

2 Tomado y adaptado de <http://bit.ly/2Jcoi5w>.

3 Tomado y adaptado de <http://bit.ly/2JbwvXK>.

23 juegan con el balón y los videojuegos; por último, 7 expresaron su gusto por los tres⁴.

- a) ¿A cuántos niños les gusta otro juguete no mencionado en la encuesta?
- b) ¿A cuántos niños les gusta solamente jugar con los videojuegos?
- c) ¿A cuántos niños les gusta solamente jugar con el balón?

Temporalidad. La tarea diagnóstica se desarrolla en dos momentos: trabajo individual (70 minutos) y realimentación de la tarea (110 minutos). En el siguiente apartado, presentamos algunas sugerencias metodológicas para la implementación de la tarea diagnóstica.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Antes de implementar la tarea diagnóstica, el profesor debe concientizar a los estudiantes de que esta tarea permite reconocer cuáles son los conocimientos previos en los que pueden tener dificultades. Debe informarles que no tendrá una valoración cuantitativa. Sugerimos que los estudiantes contesten la tarea diagnóstica de manera individual. El profesor no debe contestar preguntas a los estudiantes durante la implementación. Después de la aplicación y el análisis de los resultados obtenidos por parte de cada estudiante, el profesor debe realizar la realimentación de la tarea diagnóstica. Para esto, divide el curso en grupos de cuatro estudiantes. Procura que los estudiantes que integran cada grupo no tengan las mismas dificultades y, de esa manera, promueve el trabajo colaborativo. Cada grupo de estudiantes revisa sus resultados individuales y llega a acuerdos sobre estos resultados. Finalmente, el profesor realiza la institucionalización de los conocimientos previos.

Errores en los que puede incurrir el estudiante

Al resolver la tarea diagnóstica, los estudiantes pueden incurrir en los siguientes errores: aplicar procedimientos equivocados para resolver operaciones básicas entre números reales; ubicar en la recta numérica números sin tener en cuenta la relación de orden; confundir las convenciones para el uso de la recta; confundir la clasificación de los números en los diferentes conjuntos numéricos; escribir que un elemento pertenece a un conjunto cuando no es así; decir que un conjunto está contenido en otro cuando no lo está; incurrir en errores al utilizar las propiedades de las igualdades; dar como parte de la solución

4 Tomado de <http://bit.ly/2H1grqW>.

de una ecuación números que no hacen parte de ella; proponer soluciones sin validar su veracidad; considerar que no existe un número entre otros dos números; aplicar erróneamente la propiedad de la transitividad; resolver las inecuaciones como una ecuación; aplicar el inverso aditivo y multiplicativo en solo uno de los miembros de la inecuación; resolver las inecuaciones sin tener en cuenta las propiedades de las desigualdades; omitir partes de la notación de conjuntos para representarlos; intercambiar los símbolos de las relaciones de orden; confundir la operación entre conjuntos que debe realizar; y determinar que dos o más conjuntos son iguales cuando no lo son.

Sugerimos que el profesor promueva la interacción entre pares; interactúe con los estudiantes; realice preguntas que orienten a los estudiantes a superar sus dificultades; presente ejemplos que clarifiquen los conceptos previos; y, en el caso de los estudiantes que persistan con las dificultades, proponga tareas extraclase para superar los errores en los que incurrir.

Actuación del profesor

Antes de implementar la tarea diagnóstica, el profesor explica a los estudiantes el propósito y la importancia de la tarea. El profesor debe recomendar a los estudiantes que, al realizar la tarea diagnóstica, pongan de manifiesto todos sus conocimientos y resaltar que esta tarea no tendrá una valoración cuantitativa. Para implementar la tarea diagnóstica, es necesario entregar a cada estudiante el material fotocopiado en el que se encuentran las 10 preguntas abiertas (ver anexo 5). El profesor debe estar atento al desarrollo de esta tarea, sin permitir que los estudiantes se ayuden entre sí, ni contestar preguntas relacionadas con el desarrollo de la tarea. El profesor debe dar a los estudiantes 70 minutos para solucionar la tarea diagnóstica. Este tiempo puede variar dependiendo del grupo de estudiantes.

Antes de la sesión de realimentación, el profesor debe revisar las respuestas de los estudiantes, organizar grupos de cuatro estudiantes y procurar que cada uno de los integrantes haya incurrido en errores diferentes a los de sus compañeros. En la sesión de realimentación, los estudiantes se organizan de acuerdo con las indicaciones del profesor. El profesor entrega a cada estudiante su prueba diagnóstica revisada, con el objetivo de que pueda evidenciar los errores en los que incurrió. El profesor debe promover, en cada uno de los grupos, la discusión a través de preguntas que encaminen a los estudiantes a llegar a soluciones válidas. Cuando cada grupo de estudiantes haya discutido y llegado a un acuerdo en las respuestas de la tarea diagnóstica, el profesor debe

proponer a cada grupo de estudiantes dar sus respuestas al grupo completo. Si la respuesta es la misma en todos los grupos, debe verificar su veracidad. Si la respuesta es diferente, el profesor debe realizar preguntas a los grupos que presentan distintas respuestas para establecer el proceso que realizó cada grupo al solucionar las preguntas correspondientes y encaminar a los estudiantes a llegar a resultados válidos.

Evaluación

Se espera que el profesor decida cuándo los estudiantes estarán listos para desarrollar las tareas de aprendizaje. Para ello, el profesor debe tener en cuenta las respuestas que constató en la realimentación de la tarea diagnóstica. La implementación de la tarea diagnóstica debe servir para identificar en qué conocimientos previos los estudiantes tienen dificultad para, así, en la sesión de realimentación, abordarlos con mayor detalle y procurar que los estudiantes logren aclararlos antes de iniciar las tareas de aprendizaje. Presentamos, en la tabla 3, el aporte de cada pregunta de la tarea diagnóstica a la identificación del conocimiento previo.

Tabla 3
Listado de conocimientos previos del tema intervalos

CP	Descripción	Preguntas que los verifican
1	Diferencia los conjuntos numéricos (naturales, racionales, irracionales, enteros y reales)	3
2	Realiza operaciones básicas entre números reales aplicando los algoritmos usuales de cada una de ellas	1
3	Ubica números reales en la recta numérica	2
4	Aplica las propiedades de las igualdades para despejar variables en ecuaciones	4
5	Utiliza una notación específica para representar conjuntos	7 y 8
6	Realiza operaciones entre conjuntos (unión, intersección y diferencia)	8
7	Aplica las relaciones de orden estricto y no estricto entre números reales y reconoce su simbología	7 y 8
8	Identifica la tricotomía como una propiedad de los números reales	5
9	Aplica la transitividad en el conjunto de los números reales	5 y 9

CP	Descripción	Preguntas que los verifican
10	Justifica la pertenencia o no de un elemento en un conjunto	3 y 7
11	Determina si un conjunto está contenido en otro	3 y 10
12	Establece la igualdad entre conjuntos	10
13	Relaciona la solución de una ecuación con una solución única	4
14	Despeja variables en inecuaciones y utiliza las propiedades de las desigualdades	6

Nota. CP: conocimientos previos.

4.2. Tarea 1.1. Biodegradación

En la formulación de la tarea Biodegradación, presentamos los intervalos representados de forma numérica para que los estudiantes reconozcan sus símbolos y signos y los asocien a una característica específica de los intervalos: por ejemplo, una cota incluida, si se presenta un corchete ($[]$). Además, con esta tarea, los estudiantes reconocerán la clasificación de los intervalos de acuerdo con la inclusión de la cota y tendrán la oportunidad de discutir sobre el significado de la no existencia de una cota.

La formulación de la tarea se presentará a los estudiantes de forma escrita en una fotocopia. Como producto final de esta tarea, se pretende que los estudiantes logren diseñar folletos, representados de diferentes formas, con la información inicial de la tarea sobre los intervalos.

Descripción de la tarea

Presentamos los elementos que se deben tener en cuenta para la implementación de esta tarea de aprendizaje.

Requisitos. Para esta tarea, se requiere que los estudiantes tengan los conocimientos relacionados con operaciones entre conjuntos numéricos, representación de números en la recta numérica, pertenencia de un elemento en un conjunto, contención de un conjunto en otro, propiedades de las igualdades, desigualdades, propiedades de tricotomía y transitividad, unicidad de la solución para una ecuación, y notación de conjuntos y símbolos asociados a una relación de orden.

Aportes de la tarea a las expectativas. Con el desarrollo de esta tarea, pretendemos que los estudiantes reconozcan las características de diferentes intervalos

presentados en forma numérica; establezcan la diferencia entre una cota conocida y una desconocida para un intervalo; y argumenten sobre la pertinencia de utilizar otras representaciones para presentar un intervalo. Con esta tarea, pretendemos que los estudiantes comprendan la metodología a seguir a lo largo de la unidad didáctica e interpreten los signos y símbolos propios de la representación numérica de los intervalos presentados en el contexto Biodegradación. Con la interacción que promovemos en esta tarea, buscamos que los estudiantes discutan de manera respetuosa sobre las características de los intervalos.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea. En esta tarea, los estudiantes utilizan la densidad de los números reales para establecer que un intervalo contiene infinitos números reales; relacionan los símbolos de la representación numérica con las características de los intervalos; establecen las equivalencias entre símbolos con las demás formas de representar intervalos; y representan intervalos en diferentes formas.

Sistemas de representación que se activan. En esta tarea, los estudiantes leen los intervalos representados de forma numérica, establecen la equivalencia de presentarlos de otra forma y escogen una forma de representarlos (numérico, verbal, gráfico o simbólico).

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea se encuentra en un contexto científico, relacionado con las ciencias naturales.

Materiales y recursos. Los materiales para esta tarea son papel blanco, marcadores, lápiz, colores, regla, borrador, tajalápiz, fotocopias y tablero.

Agrupamiento e interacciones previstas. El agrupamiento de los estudiantes depende del momento del desarrollo de la tarea. En la primera parte, los estudiantes trabajan individualmente. En la segunda parte, trabajan en el grupo completo de clase. En la tercera parte, trabajan en grupos de cuatro personas. En la cuarta parte, cada grupo de estudiantes se dirige al grupo completo de clase. Para finalizar, el profesor se dirige al grupo completo de clase. La interacción que se debe promover en esta tarea es la siguiente: (a) estudiante–estudiante (durante la tarea en grupos, porque los estudiantes realizan un trabajo colaborativo), (b) estudiante–profesor (los estudiantes tienen la posibilidad de preguntar al profesor acerca de sus inquietudes durante todo el desarrollo de la sesión), (c) estudiante–grupo de clase (en el momento de presentar sus resultados como grupo a los compañeros de clase), y (d) profesor–grupo de clase (cuando el profesor indaga acerca de los saberes de cada estudiante).

Formulación

La profesora de ciencias naturales del colegio San Bernardino ha programado un taller sobre manejo de residuos sólidos para el día de la ciencia, con el objetivo de fomentar en la comunidad educativa acciones de reutilización y clasificación que reduzcan la contaminación. El taller está diseñado para los estudiantes de grado sexto a décimo y será dirigido por los estudiantes de grado undécimo. La información que se requiere transmitir está enfocada en el tiempo de descomposición de los residuos. La profesora de ciencias naturales presenta a los estudiantes de grado undécimo la tabla en la que se relaciona el residuo sólido con su intervalo de tiempo de biodegradación.

Nos interesa estudiar el tiempo de biodegradación de algunos residuos.

Biodegradación de algunos residuos

Residuo	Intervalo de tiempo en años
Ropa de algodón y/o lino	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$
Zapatos de cuero	$[3, 5)$
Papel	$\left(0, \frac{1}{3}\right)$
Celofán	$[1, 2)$
Madera	$[2, 3]$
Latas	$[10, 100)$
Materiales de plástico	$[500, a)$
Chicle	$(0, 5]$
Pilas	$[1000, a)$
Botellas de vidrio	$[4000, a)$
Icopor	$[100, a)$

Los intervalos de tiempo están representados en forma numérica. Cada uno de estos intervalos consta de dos números, dentro de signos de agrupación separados por una coma, que representan los valores máximos o mínimos llamados cotas. Responde de manera individual las siguientes preguntas.

1. ¿Cuánto tiempo tarda la biodegradación de ropa de algodón y/o lino?
2. ¿Cuánto tiempo tarda la biodegradación de las pilas?

3. Si hoy desecho un chicle, ¿cuál es la fecha máxima en la que se habrá biodegradado?
4. ¿Es correcto afirmar que una nevera de icopor se degradará en 150 años, en 502 años o en 1000 años? Justifica tu respuesta.
5. ¿Qué indica la forma de los paréntesis en la columna de intervalo de tiempo de biodegradación en años?
6. ¿Qué puede representar la letra “a” en el intervalo de biodegradación de las botellas de vidrio?

En grupos de cuatro personas, preparen un folleto que incluya la explicación de la tabla. Para esto, deben representar la información de manera que sus compañeros de otros grados la puedan comprender.

Temporalidad. La tarea se desarrollará en cinco momentos: cuestionario (5 minutos), plenaria (5 minutos), trabajo en grupos (20 minutos), presentación de resultados (15 minutos) e institucionalización (10 minutos).

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

El profesor debe realizar la lectura de la formulación con el grupo completo de estudiantes y formular preguntas para verificar la comprensión del enunciado. Inicialmente, los estudiantes responden unas preguntas encaminadas a reconocer si comprendieron las características de los intervalos presentes en la formulación. Después, presentan sus resultados al grupo completo. Sugerimos que el profesor realice una institucionalización de conceptos. El profesor puede hacer énfasis en las cotas de los intervalos y en la no existencia de algunas de ellas. Por último, los estudiantes deben producir un folleto en el que presenten la información de la tabla con los intervalos. Aquí es importante que el profesor establezca, con los diferentes grupos, a qué tipo de estudiantes le van a presentar el folleto, con el fin de encontrar diversidad a la hora de escoger la forma de representar la información.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

Para que el profesor tenga una visión general de los procedimientos que pueden realizar los estudiantes al resolver la tarea, presentamos, en la figura 8, el grafo del objetivo 1 con los criterios de logro de la tarea resaltados. Observamos que tenemos previstas cuatro estrategias de resolución de la tarea, una por cada forma de representación. También, observamos que existen cinco criterios de logro que se deben activar necesariamente para resolver

la tarea. El primero corresponde a la extracción de la información relevante del enunciado. El segundo, a la relación de expresiones numéricas con los intervalos. El tercero, a decidir la forma en la que se quiere representar la información identificada. En este punto, surgen cuatro estrategias de resolución de la tarea, al establecer equivalencias entre la representación numérica de los intervalos y las representaciones verbal, gráfica o simbólica. El cuarto corresponde a relacionar los intervalos con subconjuntos de números reales. Y el quinto, a verificar la validez de las respuestas obtenidas en el contexto que se le presenta a los estudiantes.

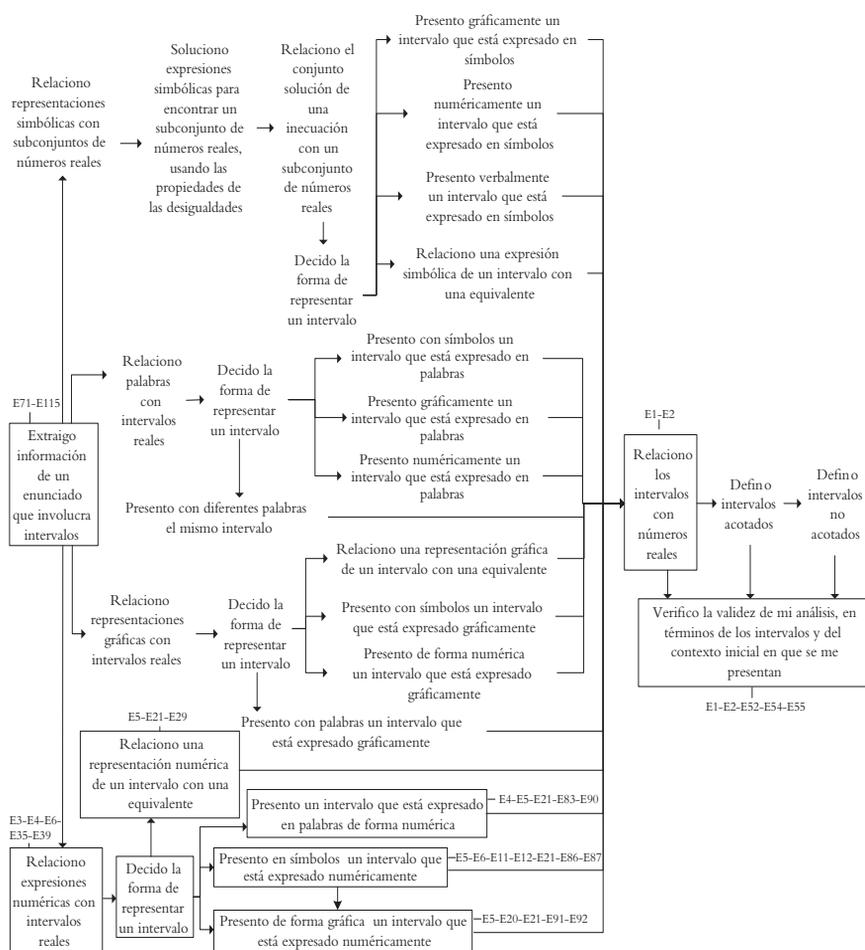


Figura 8. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.1 Biodegradación

Errores en los que puede incurrir el estudiante. Al abordar la solución de la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores que los lleven a no realizar uno de los procedimientos descritos en los criterios de logro. Los criterios de logro más relevantes en esta tarea son los relacionados con reconocer las características de los intervalos que están representados numéricamente, establecer equivalencias con otras formas de representación y reconocer formalmente la clasificación de intervalos según la existencia e inclusión de las cotas. Un ejemplo de error, para el criterio de logro correspondiente a extraer la información relevante en la formulación de la tarea de aprendizaje, es omitir información necesaria para llegar a una solución veraz de la tarea de aprendizaje. El listado completo de errores puede consultarse en el anexo 3.

Actuación del profesor. Además de las institucionalizaciones y las explicaciones generales, el profesor debe mantener una actitud motivadora durante toda la sesión; estar atento a animar a los estudiantes a continuar con el desarrollo de la tarea; mediar en las posibles diferencias de opinión que se puedan presentar entre integrantes de un grupo o entre grupos; y suministrar las ayudas a los estudiantes para superar los errores. Por ser la primera tarea de aprendizaje que se presenta para el tema y con el grupo que se va a trabajar la unidad didáctica, es importante que el profesor esté atento a los posibles errores que se presenten al hacer la lectura de la situación. En esta parte inicial, se pueden presentar errores como omitir información importante de la situación. Para evitar este error, sugerimos que el profesor realice la lectura de la tarea con el grupo completo de clase y promueva que los estudiantes enuncien la información importante para la solución de la tarea. También, puede realizar preguntas orientadoras para facilitar la comprensión de la situación en el contexto, como por ejemplo ¿cuál es el tiempo máximo o mínimo de biodegradación de una pila? o ¿qué representan los corchetes en un intervalo? El listado de ayudas para esta tarea puede consultarse en el anexo 7.

Evaluación

Esperamos que el profesor observe la actuación de los estudiantes durante la implementación de la tarea de aprendizaje y que esté atento a sus intervenciones en el momento de la plenaria. También, deberá revisar el material diligenciado por los estudiantes, para identificar los errores en los que incurrieron, y revisar el folleto solicitado en la tarea. Esto, con el fin de que

pueda analizar la comprensión que manifiesten los estudiantes acerca de las características de un intervalo (por ejemplo, la inclusión de las cotas, a partir de su representación numérica). Además, el profesor debe analizar, en la solución escrita de la tarea, los errores en que pudieron incurrir los estudiantes al representar los intervalos, para realizar la realimentación de la tarea antes de iniciar la siguiente. También, puede verificar, en las soluciones presentadas por los estudiantes, cuál fue la representación más utilizada, para, en la siguiente tarea, explicar las menos utilizadas y así mejorar las posibilidades que el grupo completo consiga el objetivo de aprendizaje.

4.3. Tarea 1.2. Inecuaciones

En la formulación de la tarea Inecuaciones, presentamos los intervalos representados de forma simbólica para que los estudiantes reconozcan sus símbolos y signos y los asocien a una característica específica de los intervalos. Por ejemplo, una cota no incluida en un intervalo se presenta con los símbolos de relación no estricta ($<$ o $>$). La formulación de la tarea se presentará a los estudiantes de forma escrita en una fotocopia.

Descripción de la tarea

Presentamos los elementos que se deben tener en cuenta para la implementación de esta tarea de aprendizaje.

Requisitos. Para esta tarea, se requiere que los estudiantes reconozcan las características de intervalos cuando están representados en forma numérica; conozcan los procedimientos y las propiedades necesarios para resolver inecuaciones; y reconozcan y utilicen la simbología y las convenciones para expresar conjuntos por comprensión.

Aportes de la tarea a las expectativas. Con el desarrollo de esta tarea, pretendemos que los estudiantes, a partir de un contexto matemático, identifiquen las características de los intervalos representados simbólicamente y establezcan equivalencias de símbolos con otras formas de representar intervalos como verbal, gráfica, numérica y simbólica. Con esta tarea, también buscamos que los estudiantes empleen las propiedades de las desigualdades para solucionar inecuaciones. Además, con la formulación de la tarea, promovemos que los estudiantes presenten de manera ordenada la información obtenida al resolver inecuaciones, por medio de intervalos.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea. En esta tarea, los estudiantes relacionan los símbolos de la representación simbólica con las características de los intervalos. Por ejemplo, para representar las cotas que están incluidas en un intervalo, es posible usar los símbolos \leq o \geq . Los estudiantes pueden establecer las equivalencias entre estos símbolos con las demás formas de representar los intervalos y representar los intervalos en la forma que escojan.

Sistemas de representación que se activan. En esta tarea, los estudiantes consideran los intervalos representados de forma simbólica, establecen la equivalencia de presentarlos de otra forma y escogen una forma de representarlos al escribirlos (numérica, verbal, gráfica o simbólica).

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea está formulada en un contexto científico-matemático.

Materiales y recursos. Los materiales para esta tarea son cuadernos, lápices, colores, regla, borrador, tajalápiz, tablero y marcadores.

Agrupamiento e interacciones previstas. El agrupamiento de los estudiantes depende del momento del desarrollo de la tarea. En la primera parte, se trabaja con el grupo completo de estudiantes. En la segunda parte, los estudiantes trabajan por parejas. En la tercera parte, los estudiantes trabajan en el grupo completo de clase. Para finalizar, el profesor se dirige al grupo completo de clase. La interacción que se promueve con esta tarea es la siguiente: (a) estudiante-estudiante (durante la tarea en parejas los estudiantes realizan un trabajo colaborativo), (b) estudiante-profesor (los estudiantes tienen la posibilidad de preguntar al profesor acerca de sus inquietudes durante todo el desarrollo de la sesión), (c) estudiante-grupo de clase (en el momento de presentar sus resultados como grupo a los compañeros de clase) y (d) profesor-grupo de clase (cuando el profesor indaga acerca de los saberes de cada estudiante).

Formulación de la tarea

Trabajo en parejas

1. Resuelvan las siguientes inecuaciones.

a) $3x + 2 < 10$

b) $-4x + 5 > 12$

c) $6x - 3 \leq -5$

d) $x - 10 \geq 24$

2. ¿Cuáles valores para “x” satisfacen la primera inecuación?

3. Mencionen 3 posibles números reales que satisfagan la segunda inecuación.
¿Hay más números que satisfagan esta inecuación?
 4. Representen la solución de cada inecuación.
 5. ¿Es posible expresar los intervalos que encontraron por extensión? Justifiquen su respuesta.
- Las respuestas se presentarán al final de la clase.

Temporalidad. La tarea se desarrolla en cuatro momentos: aclaraciones (10 minutos), trabajo por parejas (15 minutos), presentación de resultados (15 minutos) e institucionalización de conceptos (15 minutos).

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Esta tarea se puede presentar por escrito a los estudiantes. Es conveniente que, antes de iniciar, el profesor presente una contextualización, mencione las formas de representar conjuntos (por extensión y por comprensión) y formule preguntas para verificar si los estudiantes reconocen los símbolos de estas notaciones y su uso. Inicialmente, el profesor presenta la formulación y, con ayuda del grupo, realiza las aclaraciones necesarias sobre los símbolos de la representación simbólica. Después, los estudiantes desarrollan unas preguntas encaminadas a reconocer si comprendieron las características de los intervalos representados simbólicamente, utilizan las propiedades de los reales para llegar a comprender esta notación y presentan los intervalos en una notación equivalente. Por último, los estudiantes presentan sus resultados en plenaria y el profesor modera una discusión para institucionalizar el hecho de que las propiedades de los números reales se cumplen en los intervalos. Los estudiantes pueden sugerir respuestas que se puedan relacionar con la clasificación de intervalos acotados según la inclusión de la cota.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

Para que el profesor tenga una visión general de los procedimientos que pueden realizar los estudiantes al resolver la tarea, presentamos en la figura 9 un grafo del objetivo 1 con los criterios de logro de la tarea resaltados. Observamos que tenemos previstas cuatro estrategias de resolución de la tarea, una por cada forma de representación que el estudiante puede escoger para presentar la información mostrada inicialmente. También, observamos que existen siete criterios de logro que se deben activar necesariamente para resolver la tarea.

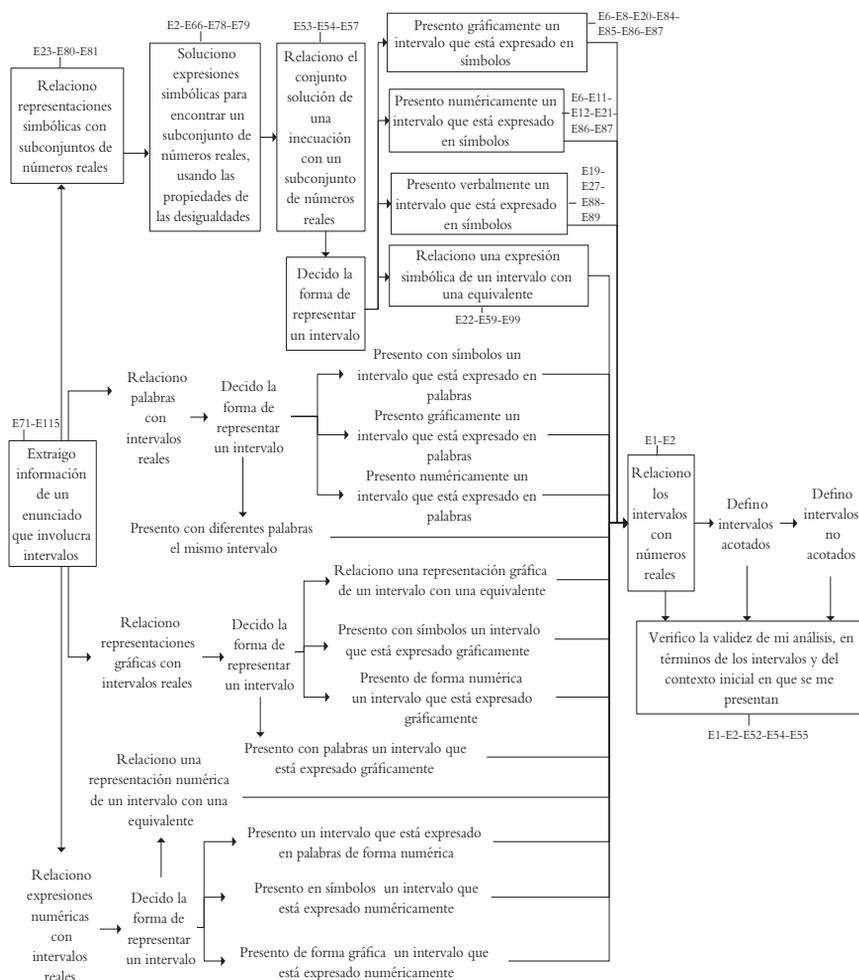


Figura 9. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.2 Inecuaciones

Errores en los que puede incurrir el estudiante. Al abordar la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores que los lleven a no realizar uno de los procedimientos descritos en los criterios de logro. Los criterios de logro más importantes en esta tarea son los relacionados con reconocer las características de los intervalos que están representados simbólicamente y establecer equivalencias con otras formas de representación. Por ejemplo, los estudiantes pueden incurrir en los errores “relaciona una cota incluida con los símbolos $>$ o $<$ ” y “relaciona una cota no incluida con los símbolos \geq o \leq ”. Estos errores se pueden presentar cuando los estudiantes activan el criterio de logro “relaciona

representaciones simbólicas con subconjuntos de números reales”. El listado completo de errores puede consultarse en el anexo 3.

Actuación del profesor. Además de las institucionalizaciones y las explicaciones generales, el profesor debe mantener una actitud motivadora durante toda la sesión; estar atento a animar a los estudiantes a continuar con el desarrollo de la tarea; mediar las posibles diferencias de opinión que se puedan presentar entre integrantes de un grupo o entre grupos; y suministrar las ayudas a los estudiantes para superar los errores que puedan entorpecer el desarrollo de la tarea. Por ejemplo, cuando los estudiantes incurren en errores como relacionar una cota incluida con los símbolos $>$ o $<$ y relacionar una cota no incluida con los símbolos \geq o \leq , el profesor puede explicar la simbología propia de la representación simbólica. De esta manera, los estudiantes podrán continuar con el desarrollo de la tarea de aprendizaje. El listado de ayudas para esta tarea puede consultarse en el anexo 7.

Evaluación

Esperamos que el profesor observe la actuación de los estudiantes durante la implementación de la tarea de aprendizaje y que esté atento a sus intervenciones en el momento de la plenaria, con el fin de que pueda analizar la comprensión que ellos manifiesten acerca de las características de un intervalo (por ejemplo, la inclusión de las cotas, a partir de la representación simbólica). Además, el profesor debe analizar en la solución escrita de la tarea los errores en que pudieron incurrir los estudiantes al representar los intervalos, para realizar la realimentación de la tarea antes de iniciar la siguiente. También, puede verificar, en las soluciones presentadas por los estudiantes, cuál fue la más utilizada, para, en la siguiente tarea, explicar las menos utilizadas y así mejorar las posibilidades de que el grupo completo consiga el objetivo de aprendizaje.

4.4. Tarea 1.3. Prueba Saber 11

En la formulación de la tarea Prueba Saber 11, presentamos los intervalos representados de forma gráfica para que los estudiantes reconozcan sus símbolos y signos y los asocien a una característica específica de los intervalos (por ejemplo, una cota incluida se presenta con un círculo en el extremo de una semirrecta: \bullet). Además, con esta tarea, los estudiantes reafirmarán los conocimientos sobre la clasificación de los intervalos que se trabajaron en la

tarea anterior. Antes de iniciar la tarea, es necesario que los estudiantes hayan realizado pruebas de selección múltiple en las áreas de lectura crítica, matemáticas, ciencias naturales, ciencias sociales e inglés. La formulación de la tarea se presentará a los estudiantes de forma escrita en una fotocopia.

Descripción de la tarea

Presentamos los elementos que se deben tener en cuenta para la implementación de esta tarea de aprendizaje.

Requisitos. Para esta tarea, se requiere que los estudiantes escriban un intervalo en por lo menos dos formas diferentes de representarlos; reconozcan el término cota como el extremo de un intervalo; establezcan si las cotas están incluidas; e identifiquen los nombres según su clasificación y las características de esa clasificación.

Aportes de la tarea a las expectativas. Con el desarrollo de esta tarea, pretendemos que los estudiantes reconozcan las características de los intervalos, formalicen su definición y superen dificultades que puedan haber surgido sobre la clasificación de los intervalos. Además, con los requerimientos de esta tarea, los estudiantes deben ser capaces de interpretar sus resultados numéricos al establecer equivalencias con la representación gráfica. Con la formulación de la tarea, promovemos que los estudiantes sean perseverantes al utilizar la representación gráfica de los intervalos para establecer la pertenencia de un elemento a un intervalo.

Materiales y recursos. Los materiales necesarios para la implementación de la tarea son marcadores, lápiz, colores, regla, borrador, tajalápiz, fotocopias y tablero.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea. En esta tarea, los estudiantes utilizan la densidad de los números reales para establecer que un intervalo contiene infinitos números reales; relacionan los símbolos de la representación verbal con las características de los intervalos; establecen las equivalencias entre símbolos con las demás formas de representar los intervalos; y representan los intervalos en diferentes formas.

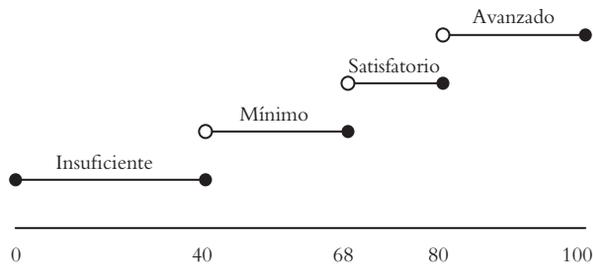
Sistemas de representación que se activan. En esta tarea, los estudiantes leen las características de los intervalos desde la representación gráfica, establecen la equivalencia de presentarlos de otra forma y escogen una forma para escribirlo (numérico, verbal, gráfico o simbólico).

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea se encuentra en un contexto personal, relacionado con la prueba a la que se enfrentarán al finalizar el ciclo de educación media.

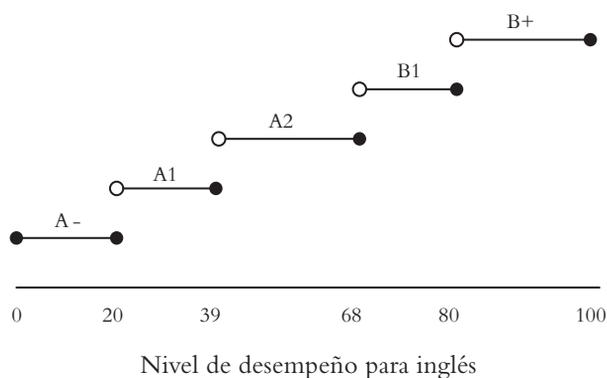
Agrupamiento e interacción que promueve. En la primera parte de la tarea, el profesor trabaja con el grupo completo de clase. En la segunda parte, el grupo completo de estudiantes trabaja individualmente. En la tercera y cuarta parte, los estudiantes trabajan con el grupo completo de clase. Por último, el profesor se dirige al grupo completo de clase. La interacción que se promueve es la siguiente: (a) estudiante-profesor (los estudiantes tienen la posibilidad de preguntar al profesor acerca de sus inquietudes durante todo el desarrollo de la sesión), (b) estudiante-grupo de clase (en el momento de presentar sus resultados a los compañeros de clase) y (c) profesor-grupo de clase (cuando el profesor indaga acerca de los saberes de cada estudiante).

Formulación de la tarea

En Colombia, la prueba Saber 11 es un examen que proporciona información cuantitativa y cualitativa sobre el desarrollo de las competencias básicas de cada estudiante. A partir de la segunda aplicación de esta prueba, en el año 2016, el informe de resultados individuales tendrá, entre otros, los niveles de desempeño insuficiente, mínimo, satisfactorio y avanzado para lectura crítica, matemáticas, ciencias naturales, ciencias sociales, razonamiento cuantitativo y competencias ciudadanas. En la primera figura, se observa la equivalencia entre los niveles de desempeño y los puntajes que se pueden obtener. Para la prueba de inglés, los niveles de desempeño son A-, A1, A2, B1 y B+, como se observa en la segunda figura.



Nivel de desempeño para lectura crítica, matemáticas, ciencias naturales, ciencias sociales, razonamiento cuantitativo y competencias ciudadanas

*Trabajo individual*

Con la información de tus pruebas, completa la tabla.

Análisis de resultados

Materia	Puntaje	Nivel de desempeño
Lectura crítica		
Matemáticas		
Ciencias naturales		
Ciencias sociales		
Inglés		

Responde las siguientes preguntas.

1. ¿En qué materia obtuviste el mejor nivel de desempeño?
2. ¿En qué materia obtuviste el peor nivel de desempeño?
3. Para obtener un nivel de desempeño satisfactorio, ¿cuáles deben ser las notas mínima y máxima?
4. ¿Cuáles son todos los posibles puntajes para obtener un nivel de desempeño B1?
5. Explica la forma de evaluación de la prueba Saber 11 y ubica tus resultados.
6. Construye una definición de intervalo que le puedas presentar a tus compañeros de clase y expón tus resultados.

Las respuestas se presentarán al final de la clase.

Temporalidad. La tarea se desarrollará en cinco momentos: realimentación de tareas anteriores (5 minutos), cuestionario (15 minutos), plenaria (10 minutos), presentación de los resultados (15 minutos) e institucionalización de conceptos (10 minutos).

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Previamente a la implementación de la tarea, el profesor se debe asegurar de que los estudiantes resuelvan preguntas de selección múltiple en las áreas solicitadas en la formulación. Es conveniente que, antes de iniciar, el profesor realice una contextualización, mencione las características generales de la prueba y formule preguntas para verificar si los estudiantes comprendieron el enunciado. Inicialmente, el profesor realiza la realimentación de la tarea anterior. Después, presenta la formulación y, con ayuda del grupo, realiza las aclaraciones necesarias sobre los símbolos en la representación gráfica. Luego, los estudiantes desarrollan unas preguntas encaminadas a reconocer si comprendieron las características de los intervalos representados gráficamente. Por último, presentan sus resultados y el profesor dirige una institucionalización de conceptos relacionados con la pertenencia de un elemento a un intervalo, y con las equivalencias entre la representación gráfica y otras formas de representar intervalos.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

Para que el profesor tenga una visión general de los procedimientos que pueden realizar los estudiantes al resolver la tarea, presentamos, en la figura 10, el grafo del objetivo 1 con los criterios de logro de la tarea resaltados. Observamos que tenemos previstas cuatro estrategias de resolución de la tarea, una por cada forma de representación para presentar la información mostrada inicialmente. También, observamos que existen ocho criterios de logro que se deben activar necesariamente para lograr resolver la tarea.

Errores en los que puede incurrir el estudiante. Al abordar la solución de la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores que los lleven a no realizar uno de los procedimientos descritos en los criterios de logro. Los criterios de logro más importantes en esta tarea son los relacionados con reconocer las características de los intervalos que están representados gráficamente y establecer equivalencias con otras formas de representación. Por ejemplo, los estudiantes pueden incurrir en los errores “establece equivalencia entre los símbolos $>$, $<$ y los símbolos $[]$ ” y “establece equivalencias entre los símbolos \geq , \leq y los símbolos $()$ ”. El listado completo de errores puede ser consultado en el anexo 3.

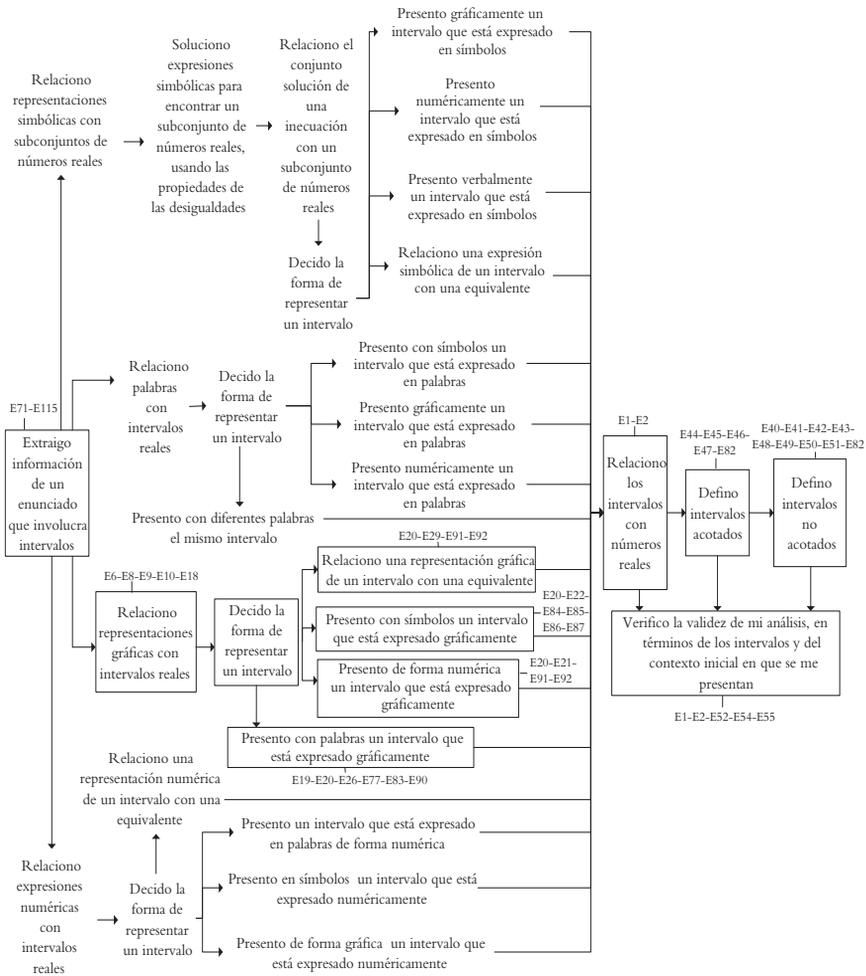


Figura 10. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.3 Prueba Saber 11

Actuación del profesor. Además de las institucionalizaciones y las explicaciones generales, el profesor debe mantener una actitud motivadora durante toda la sesión; estar atento a animar a los estudiantes a continuar con el desarrollo de la tarea; y ayudarlos a superar los errores que puedan entorpecer el desarrollo de la tarea. Por ejemplo, cuando los estudiantes incurren en los errores “establece equivalencia entre los símbolos $>$, $<$ y los símbolos $[]$ ” y “establece equivalencia entre los símbolos \geq , \leq y los símbolos $()$ ”, el profesor puede ejemplificar intervalos que utilizan los símbolos $()$ y $[]$, hacer énfasis en su lectura y en las palabras utilizadas para diferenciar entre intervalos cerrados

y semicerrados. El listado de ayudas para esta tarea puede ser consultado en el anexo 7.

Evaluación

Esperamos que el profesor observe la actuación de los estudiantes durante la implementación de la tarea de aprendizaje y que esté atento a sus intervenciones en el momento de la plenaria, con el fin de que analice la comprensión que ellos manifiesten acerca de la definición formal de los intervalos. Además, el profesor debe establecer si los estudiantes tienen clara la clasificación de los intervalos. También, deberá revisar el material con la formulación diligenciado por los estudiantes o cuadernos de los estudiantes, para identificar los errores en los que incurrieron.

4.5. Tarea 1.4. Atracciones mecánicas

En la formulación de la tarea Atracciones mecánicas, presentamos los intervalos representados de forma verbal para que los estudiantes reconozcan sus símbolos y signos y los asocien a una característica específica de los intervalos (por ejemplo, una cota incluida se presenta con las palabras desde, hasta, mínimo, máximo, de y a). Además, con esta tarea, los estudiantes realizarán equivalencias entre los signos y los símbolos de las diferentes formas de representar intervalos.

Esta tarea se debe presentar a los estudiantes de forma escrita en una fotocopia. Como producto final de esta tarea, se pretende que los estudiantes diseñen una valla publicitaria en la que representen las estaturas de ingreso a diferentes atracciones mecánicas.

Descripción de la tarea

Presentamos los elementos que se deben tener en cuenta para la implementación de esta tarea de aprendizaje.

Requisitos. Para esta tarea, se requiere que los estudiantes utilicen sus conocimientos sobre la propiedad de la densidad de los números reales y sobre las relaciones de orden en ese conjunto numérico. Además, deberán manejar el vocabulario habitual que utilizan para referirse a condiciones de orden como mayor que, menor que, igual, entre, desde, hasta, máximo, mínimo, antes de y después de. También, es necesario que reconozcan las representaciones numéricas, simbólicas y gráficas.

Aportes de la tarea a las expectativas. Con esta tarea, pretendemos que los estudiantes expresen, en alguna representación, un intervalo que se les presenta de forma verbal y gráfica. Para ello, usan las condiciones de orden en la situación y deducen cómo las propiedades de orden y densidad, que se cumplen en los números reales, contribuyen a definir un intervalo como un subconjunto de ese conjunto numérico. Además, con el contexto de la tarea, promovemos que los estudiantes formulen posibles soluciones que puedan utilizarse en la situación real. Como los estudiantes ya han trabajado con diferentes representaciones de intervalos, promovemos que se interesen por modelar la situación en cualquier representación.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea. En esta tarea, los estudiantes relacionan los símbolos de la representación verbal con las características de los intervalos; establecen las equivalencias entre estos símbolos y las demás formas de representar los intervalos; representan los intervalos en diferentes formas; formalizan la clasificación de los intervalos dependiendo de la existencia e inclusión de sus cotas; y utilizan las propiedades de densidad y orden de los números reales.

Sistemas de representación que se activan. En esta tarea, los estudiantes consideran los intervalos representados de forma verbal, establecen la equivalencia de presentarlos de otra forma y escogen una forma de escribirlo (numérica, verbal, gráfica o simbólica).

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea está formulada en un contexto personal.

Materiales y recursos. Los materiales para esta tarea son marcadores, lápiz, papel, regla, borrador, tajalápiz, fotocopias y tablero.

Agrupamiento e interacciones previstas. El agrupamiento de los estudiantes depende del momento del desarrollo de la tarea. En la primera parte, el profesor trabaja en el grupo completo. En la segunda parte, los estudiantes trabajan en el grupo completo de clase. En la tercera parte, los estudiantes trabajan individualmente. En la cuarta parte, los estudiantes trabajan en grupos de cuatro personas. Para finalizar, el profesor se dirige al grupo completo. La interacción que se debe promover en esta tarea es la siguiente: (a) estudiante–estudiante (durante la tarea en grupos los estudiantes realizan un trabajo colaborativo), (b) estudiante–profesor (los estudiantes tienen la posibilidad de preguntar al profesor acerca de sus inquietudes durante todo el desarrollo de la sesión), (c) estudiante–grupo de clase (en el momento de presentar sus resultados como

grupo a los compañeros de clase) y (d) profesor-grupo de clase (cuando el profesor indaga acerca de los saberes de cada estudiante).

Formulación de la tarea

Antes de visitar un parque, es conveniente analizar las condiciones para el uso de sus atracciones. Generalmente, las condiciones de ingreso y uso de las diferentes atracciones que ofrece un parque se publican en páginas web que nos permiten conocerlas previamente.

En nuestra ciudad, uno de los parques de atracciones mecánicas más visitados es Salitre Mágico. En su página web, se encuentra la información presentada en la tabla sobre algunas atracciones.

Condiciones de ingreso y uso de algunas atracciones mecánicas

Atracción mecánica	Especificaciones
Supershot	Esta es una atracción de alto impacto con 38 m de altura, que equivale a lanzarse desde la terraza de un edificio de 15 pisos. Alcanza los 76 km/h antes de llegar a una zona de frenado magnético. Para entrar solo, se requiere una estatura mínima de 135 cm.
Apocalypse	Este es un juego de alto impacto que consiste en una gran góndola que hace movimiento rotacional y traslacional, adornado con luces, colores y sonido. La estatura mínima es de 140 cm.
Doble loop	Esta es una pista de concreto de 235 m de longitud con curvas para 23 carros impulsados con motor a gasolina. Está incluida en el super kit de la diversión. La estatura mínima es de 145 cm.
Tornado	Esta es la montaña rusa montaña más grande de la ciudad, con 900 m de largo, 60 m de ancho y 33 m de alto, y una capacidad de 36 personas simultáneas, en 3 trenes de 2 carros impulsados autónomamente por motor cada uno. La estatura mínima es de 120 cm.
Rueda milenium	Esta atracción es el emblema del parque. Es una rueda panorámica de 46 m de altura con 40 góndolas, adornada con luces y colores, que gira sobre su propio eje en forma vertical. La estatura mínima es de 110 cm.
Avión	Este es un avión real Boeing B-727-200. Esta nave tiene un peso de 43 toneladas y tiene 35 m de longitud total. Se caracteriza por conservar en su interior todo lo relacionado con un avión real. No hay estatura mínima.

Atracción mecánica	Especificaciones
Carrusel	Esta atracción está compuesta por caballos y carrozas decorados con luces, color y sonido que giran alrededor de un eje central sobre dos plataformas de madera. No tiene restricción de estatura.
Mini jet	Esta atracción consta de seis aviones en forma de jet acoplados a una corona que gira continuamente. La estatura mínima es de 80 cm y la máxima de 150 cm.
Marine bay	Estos son barcos que giran en ondas con música infantil. Cuenta con 10 góndolas. En cada góndola van 2 personas. La estatura mínima es de 80 cm y la máxima 150 cm.
Laberinto infantil	Este es un juego infantil en el que se encuentran rodaderos, tuberías plásticas, mallas y colchonetas que desembocan en piscinas de bolas. La estatura mínima es de 80 cm y la máxima de 130 cm.

Trabajo individual

1. Juan mide 1,73 m, Andrea mide 1,48 m y Daniel mide 1,19 m. ¿A qué atracciones pueden ingresar los tres? ¿A qué atracciones no puede ingresar alguno?
2. Escribe todas las posibles estaturas de ingreso al laberinto infantil.
3. Escribe todas las posibles estaturas de ingreso al tornado.

Temporalidad. La tarea se desarrolla en cinco momentos: realimentación de tareas anteriores (10 minutos), plenaria (5 minutos), trabajo individual, lectura y solución de la situación y preguntas (10 minutos), trabajo en grupos (15 minutos) y presentación e institucionalización de conceptos (15 minutos).

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Es conveniente que, al iniciar, el profesor realice una contextualización. Puede pedir a los estudiantes que describan recuerdos sobre sus visitas a lugares que tienen establecidas condiciones de ingreso. Puede hacer las siguientes preguntas: ¿a qué lugares no has podido entrar? y ¿a qué lugar no ha podido entrar alguien que estuviera contigo? Inicialmente, el profesor realiza la realimentación de las tareas anteriores. Después, el profesor presenta la formulación, y con ayuda del grupo, realiza las aclaraciones necesarias sobre las palabras que pueden servir para representar características de los intervalos. Luego, los estudiantes desarrollan unas preguntas encaminadas a reconocer si comprendieron las características de los intervalos representados verbalmente, y presentan los intervalos en una

notación equivalente. Posteriormente, por un lado, los estudiantes presentan sus resultados. Por otro lado, el profesor modera una institucionalización de conceptos relacionados con la pertenencia de resultados específicos a un intervalo, las equivalencias entre la representación verbal y otras formas de representar intervalos. Adicionalmente, orienta a los estudiantes en el diseño de una valla que tenga las condiciones de ingreso a las diferentes atracciones mecánicas de acuerdo con la estatura permitida para cada una.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

Para que el profesor tenga una visión general de los procedimientos que pueden realizar los estudiantes al resolver la tarea, en la figura 11, presentamos el grafo

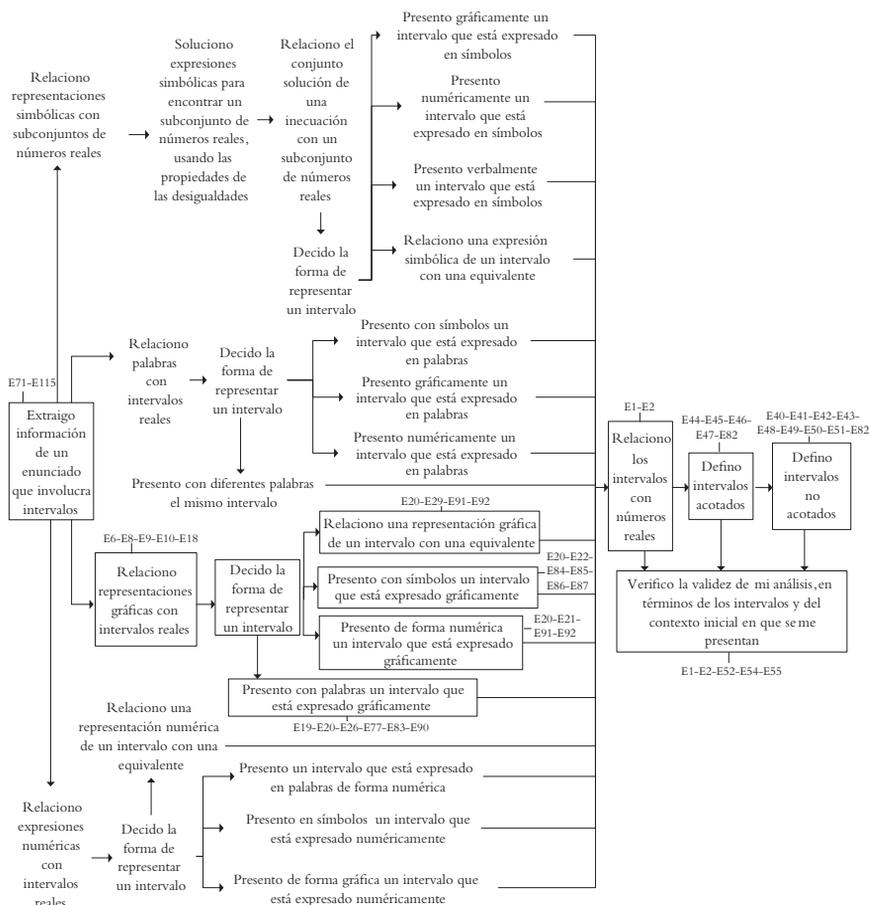


Figura 11. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.4 Atracciones mecánicas

del objetivo 1 con los criterios de logro de la tarea resaltados. Observamos que tenemos previstas cuatro estrategias de resolución de la tarea, una por cada forma de representación que el estudiante puede escoger para presentar la información mostrada inicialmente. También observamos que existen siete criterios de logro que se deben activar para resolver la tarea.

Errores en los que puede incurrir el estudiante. Al abordar la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores que los lleven a no realizar uno de los procedimientos descritos en los criterios de logro. Los criterios de logro más importantes en esta tarea son los relacionados con reconocer las características de los intervalos representados verbalmente, establecer equivalencias con otras formas de representación de los intervalos y verificar las propiedades de los números reales en los intervalos. Por ejemplo, los estudiantes pueden incurrir en el error “relacionar números que no hacen parte de la solución de una situación”, que se puede presentar en el criterio de logro “relaciono los intervalos con números reales”. El listado completo de errores puede consultarse en el anexo 3.

Actuación del profesor. Además de las institucionalizaciones y las explicaciones generales, el profesor debe mantener una actitud motivadora durante toda la sesión; estar atento a animar a los estudiantes a continuar con el desarrollo de la tarea; mediar en las posibles diferencias de opinión que se puedan presentar entre integrantes de un grupo o entre grupos; y suministrar las ayudas a los estudiantes para superar los errores. A partir de los errores que previmos para esta tarea de aprendizaje, presentamos ejemplos de ayudas que el profesor puede brindar a los estudiantes durante su implementación. Por ejemplo, cuando los estudiantes incurren en el error de relacionar números que no hacen parte de la solución de una situación, el profesor puede formular la pregunta ¿existen estaturas que se puedan representar con números negativos? El listado de ayudas para esta tarea puede consultarse en el anexo 7.

Evaluación

Esperamos que el profesor observe la actuación de los estudiantes durante la implementación de la tarea de aprendizaje y que esté atento a sus intervenciones en el momento de la plenaria, con el fin de que analice si los estudiantes comprenden cómo las propiedades de orden y densidad de los números reales se cumplen en los intervalos. Además, el profesor debe analizar la comprensión del grupo de estudiantes acerca de las características de los intervalos representados verbalmente. También, deberá revisar el material

con la formulación diligenciado por los estudiantes y las vallas publicitarias diseñadas por los diferentes grupos de estudiantes, para identificar los errores en los que incurrieron.

4.6. Tarea 2.1. Biciclase (unión)

Antes de realizar la tarea Biciclase (unión), el profesor debe pedir a los estudiantes que tomen los tiempos del recorrido y las visitas que se realizan en bicicleta desde su colegio hasta dos lugares previamente establecidos. Los estudiantes pueden tomar estos tiempos de recorrido y representar los intervalos como deseen. Al iniciar la tarea de aprendizaje, los estudiantes, en grupos de tres personas, elaboran unas tiras de papel que representan los intervalos de tiempo de recorrido y visita a los lugares previstos. La construcción de las tiras de papel puede ser consultada en el anexo 8. Con ayuda de esas tiras de papel, los estudiantes realizan la operación de unión entre intervalos.

La formulación de la tarea se presentará a los estudiantes de forma escrita en una fotocopia. Como producto final de esta tarea, se pretende que los estudiantes logren diseñar las tiras de papel que relacionamos con la representación gráfica de los intervalos.

Descripción de la tarea

Con esta tarea, los estudiantes representan gráficamente un intervalo y realizan la operación de unión entre intervalos. A continuación, presentamos sus elementos.

Requisitos. Para esta tarea, se requiere que los estudiantes realicen representaciones de intervalos, tengan claridad sobre su definición, utilicen lenguaje matemático para referirse a los elementos de un intervalo y conozcan las operaciones básicas entre conjuntos.

Aportes de la tarea a las expectativas. Con el desarrollo de esta tarea de aprendizaje, pretendemos contribuir a que los estudiantes identifiquen y realicen la operación de unión entre intervalos, con base en sus conocimientos previos sobre esta operación. Promovemos que los estudiantes utilicen como herramienta el sistema de representación gráfico (material tiras de papel) para realizar la operación de unión entre intervalos. Además, buscamos que los estudiantes presenten de manera organizada la información obtenida, al solicitar que construyan el material para la solución de esta tarea.

Materiales y recursos. Como recursos para esta tarea, incluimos la información que los estudiantes puedan recolectar durante la salida Biciclaste (conoce el centro de tu localidad). Además de este recurso, utilizaremos en el aula tiras de papel, fotocopias, lápices, colores, regla, borrador, tajalápiz, tablero y marcadores.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea. En esta tarea, los estudiantes utilizan cualquier forma de representación para tomar datos de intervalos de tiempo, relacionan los símbolos de estas representaciones con la representación gráfica, comparan intervalos con base en esas representaciones, constatan que deben realizar la operación de unión, la efectúan y presentan el intervalo solución a la situación en cualquier forma de representación.

Sistemas de representación que se activan. En esta tarea, los estudiantes utilizan todas las formas posibles de representar intervalos (numérica, verbal, gráfica o simbólica). Utilizan la representación gráfica para comparar los intervalos y realizar la operación de unión.

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea está formulada en un contexto personal.

Agrupamiento e interacciones previstas. El agrupamiento de los estudiantes depende del momento del desarrollo de la tarea. En la primera parte, los estudiantes trabajan en grupos de tres personas. En la segunda y tercera parte, los estudiantes trabajan en el grupo completo de clase. La interacción que se promueve con esta tarea es la siguiente: (a) estudiante–estudiante (durante la tarea en grupo los estudiantes realizan un trabajo colaborativo), (b) estudiante–profesor (los estudiantes tienen la posibilidad de preguntar al profesor acerca de sus inquietudes durante todo el desarrollo de la sesión), (c) estudiante–grupo de clase (en el momento de presentar sus resultados como grupo a los compañeros de clase) y (d) profesor–grupo de clase (cuando el profesor indaga acerca de los saberes de cada estudiante).

Formulación de la tarea

Un ejemplo de los desplazamientos (a), (b) y (c) se encuentra disponible en el anexo 8.

Trabajo en grupo

Contesten las siguientes preguntas.

1. Si entendemos por recorrido el tiempo de desplazamiento más el tiempo de visita, escriban un intervalo que represente cada recorrido.

2. ¿Cuál es el intervalo total de desplazamiento (a) de los integrantes del grupo? Contesten la misma pregunta para los desplazamientos (b) y (c).
3. ¿La hora inicial de visita para el recorrido (a) es la misma para los tres?
4. ¿Cuál es el intervalo total de visita (a) de los integrantes del grupo? Contesten la misma pregunta para las visitas (b) y (c).

Con ayuda de la línea de tiempo y las tiras de papel, expliquen a sus compañeros de clase los resultados.

Temporalidad. La tarea se desarrollará en tres momentos: trabajo por grupos (25 minutos), presentación de resultados y acuerdos en plenaria (5 minutos) y verificación de resultados (5 minutos).

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Esta tarea se puede desarrollar en 35 minutos. Antes de iniciar, el profesor debe orientar un recorrido en el que los estudiantes toman los datos sobre intervalos, de tiempos de visitas y de desplazamientos. Los estudiantes construirán el material tiras de papel para representar los intervalos de tiempo. Ellos deben tener la formulación de la tarea durante la implementación. La sesión puede dividirse en tres momentos. En el primer momento, en grupos de cuatro, los estudiantes leen la formulación, realizan las comparaciones de dos intervalos, deciden la operación y la efectúan. Es importante que, durante este primer momento, el profesor esté atento a orientar sobre el tipo de comparación y operación que se debe hacer; incluso, podría ejemplificar en el tablero para aclarar dudas. En el segundo momento, los estudiantes trabajarán en grupos para realizar comparaciones entre más intervalos, de acuerdo con la cantidad de estudiantes por grupo. En la tercera parte, los estudiantes presentarán en plenaria los resultados de su análisis. El profesor dirigirá este último momento y promoverá la institucionalización de conceptos.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

Para que el profesor tenga una visión general de los procedimientos que pueden realizar los estudiantes al resolver la tarea, presentamos, en la figura 12, el grafo del objetivo 2 con los criterios de logro de la tarea 2.1 Biciclase (unión) resaltados. Observamos que tenemos previstas cuatro estrategias de resolución de la tarea, una por cada forma de representación que el estudiante puede escoger para tomar los datos de los intervalos de tiempo. También, observamos que existen 11 criterios de logro que se deben activar necesariamente para lograr resolverla.

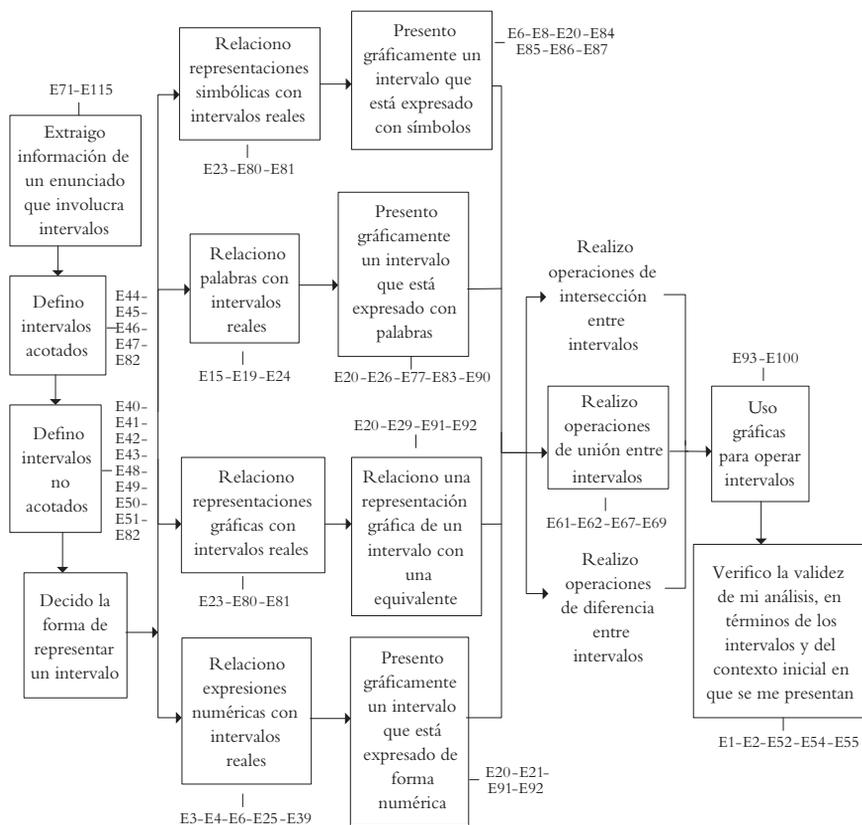


Figura 12. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.1 Biciclase (unión)

Errores en los que puede incurrir el estudiante. Al abordar la solución de la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores que los lleven a no realizar uno de los procedimientos descritos en los criterios de logro. Los criterios de logro más importantes en esta tarea son los relacionados con representar gráficamente intervalos y realizar la operación de unión entre intervalos. Por ejemplo, los estudiantes podrían incurrir en el error “confundir las relaciones entre dos o más intervalos a partir de su representación gráfica”, que se puede presentar en el criterio de logro “relacionar representaciones gráficas con intervalos reales”. El listado completo de errores puede consultarse en el anexo 3.

Actuación del profesor. Además de las institucionalizaciones y las explicaciones generales, el profesor debe mantener una actitud motivadora durante toda la sesión; estar atento a animar a los estudiantes a continuar con el desarrollo de la tarea; mediar en las posibles diferencias de opinión que se puedan presentar

entre integrantes de un grupo o entre grupos; y suministrar ayudas a los estudiantes para superar los errores que puedan entorpecer el desarrollo de la tarea. A partir de los errores que previmos para esta tarea de aprendizaje, presentamos ejemplos de ayudas que el profesor puede brindar a los estudiantes durante la implementación. Por ejemplo, cuando los estudiantes incurren en el error de confundir las relaciones entre dos o más intervalos a partir de su representación gráfica, el profesor puede formular la pregunta ¿cuáles son las relaciones entre conjuntos? El listado de ayudas para esta tarea puede ser consultado en el anexo 7.

Evaluación

Esperamos que el profesor observe la actuación de los estudiantes durante la implementación de la tarea de aprendizaje y que esté atento a sus intervenciones en el momento de la plenaria, con el fin de que analice si representaron de manera gráfica los intervalos y realizaron la operación de unión entre intervalos. También, deberá revisar el material con la formulación diligenciado por los estudiantes y el material tiras de papel que han construido los grupos de estudiantes, para identificar los errores en los que incurrieron.

4.7. Tarea 2.2. Biciclase (intersección)

En la tarea Biciclase (intersección), se utilizan los mismos datos de la tarea Biciclase (unión) y el material construido (tiras de papel). Con ayuda de esas tiras de papel, los estudiantes realizarán la operación de intersección entre intervalos. La formulación de la tarea se presentará a los estudiantes de forma escrita en una fotocopia. Como producto final de esta tarea, se pretende que los estudiantes logren diseñar las tiras de papel que relacionamos con la representación gráfica de los intervalos.

Descripción de la tarea

Con esta tarea, los estudiantes representan gráficamente un intervalo y realizan la operación de intersección entre intervalos. A continuación, presentamos los elementos que la conforman.

Requisitos. Los estudiantes deben ser capaces de realizar representaciones de intervalos, tener claridad de la definición de un intervalo, utilizar lenguaje matemático para referirse a los elementos de un intervalo y conocer las operaciones básicas entre conjuntos.

Aportes de la tarea a las expectativas. Con el desarrollo de esta tarea, pretendemos contribuir a que los estudiantes identifiquen y realicen la operación de intersección entre intervalos con base en sus conocimientos previos. Promovemos que los estudiantes utilicen como herramienta el sistema de representación gráfico (material tiras de papel) para realizar la operación de intersección entre intervalos. Además, buscamos que discutan de manera respetuosa sus argumentos sobre las posibles soluciones de los requerimientos de la tarea.

Materiales y recursos. Como recursos para esta tarea, incluimos la información que los estudiantes puedan recolectar durante la salida Biciclase (conoce el centro de tu localidad). Además de este recurso, utilizaremos, en el aula, tiras de papel, fotocopias, lápices, colores, regla, borrador, tajalápiz, tablero y marcadores.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea. En esta tarea, los estudiantes utilizarán cualquier forma de representación para tomar datos de intervalos de tiempo, relacionarán los símbolos de estas representaciones con la representación gráfica, compararán intervalos con base en esas representaciones, identificarán que deben realizar la operación de intersección, la efectuarán y presentarán el intervalo solución a la situación en cualquier forma de representación.

Sistemas de representación que se activan. En esta tarea, los estudiantes utilizarán cualquier forma posible de representar intervalos (numérica, verbal, gráfica o simbólica). Se utilizará la representación gráfica para comparar los intervalos y realizar la operación.

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea está formulada en un contexto personal.

Agrupamiento e interacciones previstas. El agrupamiento de los estudiantes depende del momento del desarrollo de la tarea. En la primera parte, los estudiantes trabajan en grupos de tres personas. En la segunda y en la tercera parte, los estudiantes trabajan en el grupo completo de clase. La interacción que se promueve es la siguiente: (a) estudiante-estudiante (durante el trabajo en parejas los estudiantes realizan un trabajo colaborativo), (b) estudiante-profesor (los estudiantes tienen la posibilidad de preguntar al profesor acerca de sus inquietudes durante todo el desarrollo de la sesión), (c) estudiante-grupo de clase (en el momento de presentar sus resultados como grupo a los compañeros de clase) y (d) profesor-grupo de clase (cuando el profesor indaga acerca de los saberes de cada estudiante).

Formulación de la tarea

Trabajo en grupo

Contesten las siguientes preguntas.

1. ¿En qué intervalo de tiempo están dos de los integrantes del grupo en el desplazamiento (a)? Contesten la misma pregunta para los desplazamientos (b) y (c).
2. ¿En qué intervalo de tiempo están todos los integrantes del grupo en el desplazamiento (a)? Contesten la misma pregunta para los desplazamientos (b) y (c).
3. ¿En qué intervalo de tiempo están todos los integrantes del grupo en la visita al CADE?, Contesten la misma pregunta para la visita al colegio instituto técnico Rodrigo de Triana IED.

Con ayuda de la línea de tiempo y las tiras de papel, expliquen a sus compañeros de clase los resultados.

Temporalidad. La tarea se desarrollará en tres momentos: trabajo por grupos (10 minutos), presentación de resultados y acuerdos en plenaria (5 minutos) y verificación de resultados (5 minutos).

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Esta tarea se puede desarrollar en 20 minutos. Antes de iniciar, el profesor debe realizar u orientar un recorrido en el que los estudiantes deben tomar los datos sobre intervalos de tiempos de visitas y desplazamientos. Los estudiantes construirán el material tiras de papel para representar los intervalos de tiempo. Ellos deben tener la formulación de la tarea, preferiblemente de forma escrita durante la implementación. La sesión puede dividirse en tres momentos. En el primer momento, por grupos de cuatro, los estudiantes leen la formulación, realizan las comparaciones de dos intervalos, deciden la operación y la efectúan. Es importante que, durante este primer momento, el profesor esté atento a orientar sobre el tipo de comparación y operación que se debe hacer; incluso, podría ejemplificar en el tablero para aclarar dudas. En el segundo momento, los estudiantes trabajarán en grupos para realizar comparaciones entre más intervalos dependiendo de la cantidad de estudiantes por grupo. En el tercer momento, los estudiantes presentarán en plenaria los resultados de su análisis. El profesor debe dirigir la institucionalización de conceptos.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

Para que el profesor tenga una visión general de los procedimientos que pueden realizar los estudiantes al resolver la tarea, presentamos, en la figura 13, el grafo del objetivo 2 con los criterios de logro de la tarea 2.2 Biciclasa (intersección). En la figura 16, observamos que tenemos previstas cuatro estrategias de resolución de la tarea, una por cada forma de representación que el estudiante puede escoger para tomar los datos de los intervalos de tiempo. También observamos que existen 11 criterios de logro que se deben activar necesariamente para lograr resolver la tarea.

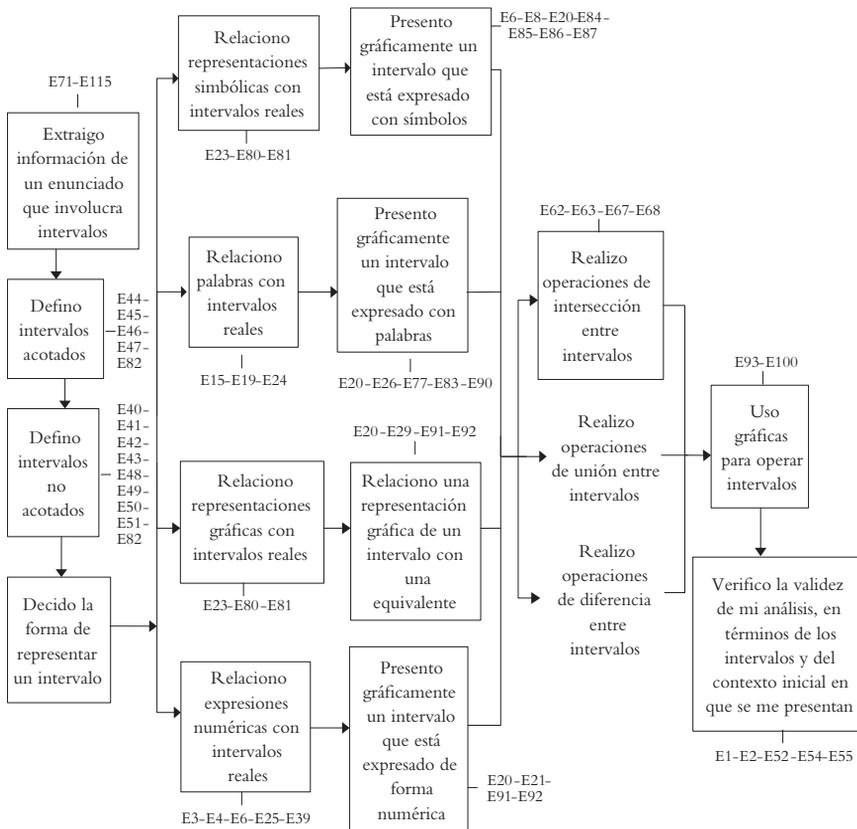


Figura 13. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.2 Biciclasa

Errores en los que puede incurrir el estudiante. Al abordar la solución de la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores que los lleven a no realizar uno de los

procedimientos descritos en los criterios de logro. Los criterios de logro más importantes en esta tarea son los relacionados con representar gráficamente intervalos y realizar la operación de intersección entre intervalos. Por ejemplo, los estudiantes pueden incurrir en el error “utilizar la unión entre intervalos para solucionar situaciones que requieren de la intersección”, que se puede presentar en el criterio de logro “realiza la operación de intersección entre intervalos”. El listado completo de errores puede consultarse en el anexo 3.

Actuación del profesor. Además de las institucionalizaciones y las explicaciones generales, el profesor debe mantener una actitud motivadora durante toda la sesión; estar atento a animar a los estudiantes a continuar con el desarrollo de la tarea; mediar en las posibles diferencias de opinión que se puedan presentar entre integrantes de un grupo o entre grupos; y suministrar ayudas a los estudiantes para superar los errores que puedan entorpecer el desarrollo de la tarea. A partir de los errores que previmos para esta tarea de aprendizaje, presentamos ejemplos de ayudas que el profesor puede brindar a los estudiantes durante la implementación. Por ejemplo, cuando los estudiantes incurrir en el error de utilizar la unión entre intervalos para solucionar situaciones que requieren de la intersección, el profesor puede explicar la forma en que es posible hacer una intersección, unión y diferencia. El listado de ayudas para esta tarea puede consultarse en el anexo 7.

Evaluación

Esperamos que el profesor observe la actuación de los estudiantes durante la implementación de la tarea de aprendizaje y que esté atento a sus intervenciones en el momento de la plenaria, con el fin de que analice si representaron de manera gráfica los intervalos y realizaron la operación de intersección entre intervalos. También, deberá revisar el material diligenciado por los estudiantes y el material tiras de papel que han construido los grupos de estudiantes, para identificar los errores en los que incurrieron.

4.8. Tarea 2.3 Biciclase (diferencia)

En la tarea Biciclase (diferencia), se utilizan los mismos datos de la tarea Biciclase (unión) y el material construido (tiras de papel). Con ayuda de esas tiras de papel, los estudiantes realizarán la operación de diferencia entre intervalos. La formulación de la tarea se presentará a los estudiantes de forma escrita en una fotocopia. Como producto final de esta tarea, se pretende que

los estudiantes logren diseñar las tiras de papel y las relacionen con la representación gráfica de los intervalos.

Descripción de la tarea

Con esta tarea, los estudiantes representan gráficamente un intervalo y realizan la operación de diferencia entre intervalos. A continuación, presentamos los elementos de esta tarea.

Requisitos. Los estudiantes deben ser capaces de realizar representaciones de intervalos y tener claridad sobre la definición de un intervalo. Además, deben utilizar lenguaje matemático para referirse a los elementos de un intervalo y conocer las operaciones básicas entre conjuntos.

Aportes de la tarea a las expectativas. Con el desarrollo de esta tarea, pretendemos contribuir a que los estudiantes identifiquen y realicen la operación de diferencia entre intervalos con base en sus conocimientos previos. Promovemos que los estudiantes utilicen como herramienta el sistema de representación gráfico (material tiras de papel) para realizar la operación de diferencia entre intervalos. Además, buscamos que presenten de manera organizada la información obtenida, al solicitar que expongan sus argumentos acerca de la solución de la tarea por medio de la utilización del material tiras de papel.

Materiales y recursos. Como recursos para esta tarea, incluimos la información que los estudiantes puedan recolectar durante la salida Biciclase (conoce el centro de tu localidad). Además de este recurso, utilizaremos, en el aula, tiras de papel, fotocopias, lápices, colores, regla, borrador, tajalápiz, tablero y marcadores.

Agrupamiento e interacciones previstas. El agrupamiento de los estudiantes depende del momento del desarrollo de la tarea. En la primera parte, los estudiantes trabajan en grupos de tres personas. En la segunda y en la tercera parte, trabajan en el grupo completo de clase. La interacción que se promueve con esta tarea es la siguiente: (a) estudiante–estudiante (durante el trabajo en parejas los estudiantes realizan un trabajo colaborativo), (b) estudiante–profesor (los estudiantes tienen la posibilidad de preguntar al profesor acerca de sus inquietudes durante todo el desarrollo de la sesión), (c) estudiante–grupo de clase (en el momento de presentar sus resultados como grupo a los compañeros de clase) y (d) profesor–grupo de clase (cuando el profesor indaga acerca de los saberes de cada estudiante).

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea. En esta tarea, los estudiantes utilizarán cualquier forma de representar intervalos para tomar datos de intervalos de tiempo; relacionarán los símbolos de estas representaciones con la representación gráfica; compararán intervalos a partir de estas representaciones; identificarán que deben realizar la operación de diferencia y la efectuarán; y presentarán el intervalo solución a la situación en cualquier forma de representación.

Sistemas de representación que se activan. En esta tarea, los estudiantes utilizarán cualquier forma de representar intervalos (numérica, verbal, gráfica o simbólica). Se utilizará la representación gráfica para comparar los intervalos y realizar la operación.

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea está formulada en un contexto personal.

Formulación de la tarea

Trabajo en grupo

Contesten las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es el intervalo que representa la diferencia entre los desplazamientos de dos de los integrantes en cada desplazamiento?
2. ¿Qué persona demoró menos tiempo en sus desplazamientos?

Con ayuda de la línea de tiempo y las tiras de papel, expliquen a sus compañeros de clase los resultados.

Temporalidad. La tarea se desarrollará en dos momentos: trabajo en grupos (15 minutos), presentación de resultados y acuerdos en plenaria (10 minutos) y verificación de resultados (5 minutos).

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Esta tarea se puede desarrollar en 35 minutos. Antes de iniciar, el profesor debe realizar u orientar un recorrido en el que los estudiantes deben tomar los datos sobre intervalos de tiempos de visitas y desplazamientos. Los estudiantes construirán el material tiras de papel para representar los intervalos de tiempo. Deben tener la formulación de la tarea, preferiblemente de forma escrita durante la implementación. La sesión puede dividirse en tres momentos. En el primer momento, por grupos de cuatro personas, los estudiantes leen la formulación, realizan las comparaciones de dos intervalos, deciden la

operación y la efectúan. Es importante que, durante este primer momento, el profesor esté atento a orientar sobre el tipo de comparación y operación que se debe hacer; incluso, podría presentar ejemplos en el tablero para aclarar dudas. En el segundo momento, los estudiantes trabajan en grupos para realizar comparaciones entre más intervalos, dependiendo de la cantidad de estudiantes por grupo. En el tercer momento, presentan en plenaria los resultados de su análisis. El profesor dirige la institucionalización de conceptos.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

Para que el profesor tenga una visión general de los procedimientos que pueden realizar los estudiantes al resolver la tarea, presentamos, en la figura 14, el grafo del objetivo 2 con los criterios de logro de la tarea resaltados. Observamos que tenemos previstas cuatro estrategias de resolución de la tarea, una

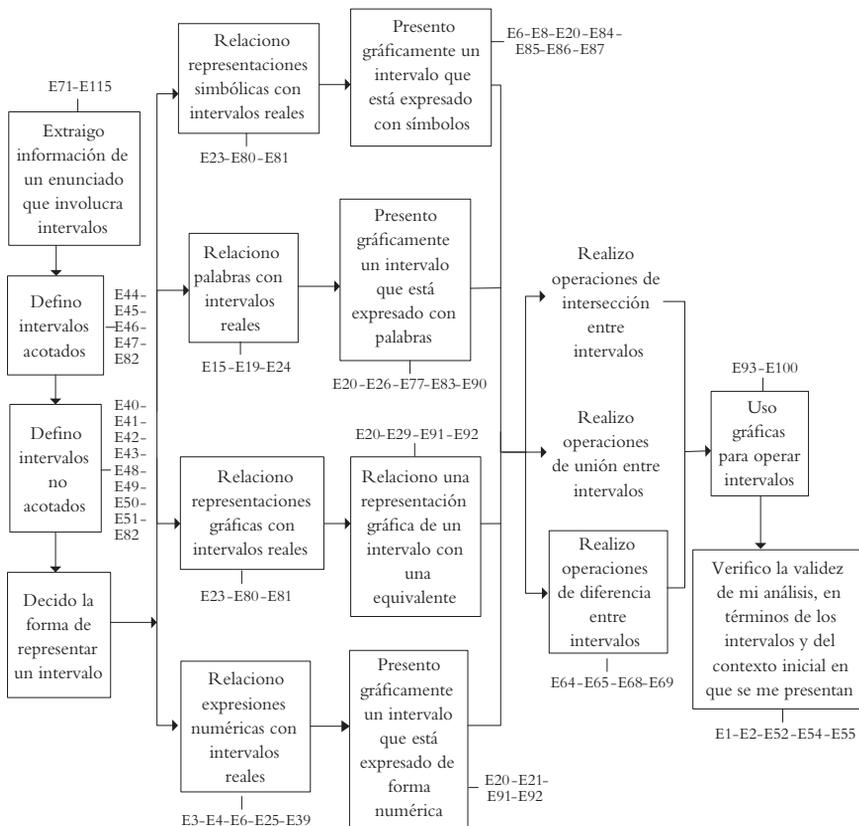


Figura 14. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.3 Biciclase (diferencia)

por cada forma de representación que el estudiante puede escoger para tomar los datos de los intervalos de tiempo. También observamos que existen 11 criterios de logro que se deben activar necesariamente para resolver la tarea.

Errores en los que puede incurrir el estudiante. Al abordar la tarea los estudiantes pueden incurrir en errores que los lleven a no realizar uno de los procedimientos descritos en los criterios de logro. Los criterios de logro más importantes en esta tarea son los relacionados con representar gráficamente intervalos y realizar la operación de diferencia entre intervalos. Por ejemplo, los estudiantes pueden incurrir en el error de incluir elementos que no hacen parte de la diferencia de intervalos, que se puede presentar en el criterio de logro “realiza la operación de diferencia entre intervalos”. El listado completo de errores puede consultarse en el anexo 3.

Actuación del profesor. Además de las institucionalizaciones y las explicaciones generales, el profesor debe mantener una actitud motivadora durante toda la sesión; estar atento a animar a los estudiantes a continuar con el desarrollo de la tarea; mediar en las posibles diferencias de opinión que se puedan presentar entre integrantes de un grupo o entre grupos; y suministrar ayudas a los estudiantes para superar los errores que puedan entorpecer el desarrollo de la tarea. A partir de los errores que previmos para esta tarea de aprendizaje, presentamos ejemplos de ayudas que el profesor puede brindar a los estudiantes durante la implementación. Por ejemplo, cuando los estudiantes incurren en el error de incluir elementos que no hacen parte de la diferencia de intervalos, el profesor puede pedirles que nombren uno de los números que incluyeron en el intervalo solución y preguntarles si cumple con las condiciones de la pregunta. El listado de ayudas para esta tarea puede consultarse en el anexo 7.

Evaluación

Esperamos que el profesor observe la actuación de los estudiantes durante la implementación de la tarea de aprendizaje y que esté atento a sus intervenciones en el momento de la plenaria, con el fin de que establezca si representaron de manera gráfica los intervalos y realizaron la operación de diferencia entre intervalos. También, deberá revisar el material diligenciado por los estudiantes y el material tiras de papel que construyeron los grupos de estudiantes, para identificar los errores en los que incurrieron.

4.9. Tarea 3.1 Índice de masa corporal

En la formulación de la tarea Índice de masa corporal, presentamos una tabla de doble entrada en la que se presentan intervalos acotados y no acotados. Los estudiantes, con base en su talla y peso, utilizan la fórmula indicada y establecen a qué intervalo pertenece su índice de masa corporal (IMC). Se les pide, por grupos de seis personas, completar una tabla de características físicas en la que deben clasificar su IMC. Los estudiantes pueden plantear ecuaciones o inecuaciones para dar solución a los requerimientos de la tarea. Su formulación se presentará en forma escrita en una fotocopia.

Descripción de la tarea

Con esta tarea, los estudiantes plantean inecuaciones que les permiten llegar a intervalos a partir de una situación y justifican su respuesta en el contexto. A continuación, presentamos los elementos de esta tarea.

Requisitos. Presentamos a los estudiantes una situación en la que se requiere que reconozcan formas de medición de cantidades como el peso y la estatura, y sus unidades de medida. Los estudiantes deben tener conocimientos de representaciones de intervalos; saber extraer información de gráficas de doble entrada; despejar y manejar ecuaciones; y reconocer funciones con dos variables.

Aportes de la tarea a las expectativas. Con el desarrollo de esta tarea, pretendemos que los estudiantes produzcan y extraigan información de una situación que les permita expresar un intervalo utilizando cualquier forma de representación y dar solución a un problema. También, buscamos brindar un espacio de discusión para contribuir a que los estudiantes conozcan diferentes argumentos en torno a las características de los intervalos y puedan superar algunas dificultades relacionadas con la solución del problema. Con la formulación de la tarea, promovemos que los estudiantes reflexionen sobre la situación problema, propongan posibles soluciones matemáticas, argumenten el uso de los intervalos en esas soluciones y comparen sus resultados con los de sus compañeros, para llegar a validar o refutar sus resultados en el contexto de la situación.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea. En esta tarea, los estudiantes utilizan una tabla de doble entrada para extraer información sobre intervalos acotados y no acotados. Para completar la tabla de características físicas, los estudiantes establecen la pertenencia de números a un intervalo. Además,

deciden cómo determinar un intervalo al plantear ecuaciones para sus cotas o una inecuación. En cualquiera de los casos, escogen la forma de representación para presentar sus resultados y verificar su validez.

Sistemas de representación que se activan. En esta tarea, los estudiantes leen los intervalos desde una tabla de doble entrada, para dar respuestas a los requerimientos de la tarea. Pueden escoger cualquier forma de representar intervalos (numérica, verbal, gráfica o simbólica).

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea se ubica en los contextos personal y social, relacionados con el cuidado personal.

Materiales y recursos. Los materiales para la tarea son cinta métrica, balanza, lápiz, papel, regla, borrador, tablero, fotocopias y marcador.

Agrupamiento e interacciones previstas. La tarea se inicia con el grupo completo de clase, seguida de un trabajo grupal con seis integrantes. Se finaliza con el grupo completo de clase. La interacción que se promueve con esta tarea es la siguiente: (a) estudiante-estudiante (durante el trabajo en parejas los estudiantes realizan un trabajo colaborativo), (b) estudiante-profesor (los estudiantes tienen la posibilidad de preguntar al profesor acerca de sus inquietudes durante todo el desarrollo de la sesión), (c) estudiante-grupo de clase (en el momento de presentar sus resultados como grupo a los compañeros de clase) y (d) profesor-grupo de clase (cuando el profesor indaga acerca de los saberes de cada estudiante).

Formulación de la tarea

Índice de masa corporal (IMC)

El índice de masa corporal, más conocido por la sigla IMC, es un índice adoptado por la OMS (Organización Mundial de la Salud). Se utiliza para el diagnóstico del sobrepeso y de la obesidad. El IMC se puede calcular fácilmente a partir de dos datos simples: altura y peso.

$$IMC = \text{peso}(\text{kg}) \div \text{altura}^2 (\text{metros})$$

Además del cálculo hecho con la fórmula IMC, otra manera de calcular el índice de masa corporal es a través de las tablas de IMC. La figura presenta uno de los muchos ejemplos disponibles. Busca la línea que corresponde a tu peso y altura, y ve cuál es tu clasificación de acuerdo con el índice de masa corporal⁵.

5 Tomado y adaptado de <http://bit.ly/2pWfXtX>.

4. Construyan una tabla en la que den a conocer los valores del IMC para cada una de las clasificaciones que aparecen en la figura.
5. Planteen inecuaciones que les permitan conocer los intervalos de IMC para cada una de las clasificaciones que aparecen en la tabla.

Temporalidad. La tarea se desarrollará en cuatro momentos: lectura y aclaraciones de la tarea (5 minutos), trabajo grupal de los estudiantes (25 minutos), presentación de resultados y acuerdos en plenaria (10 minutos) y verificación de resultados (5 minutos).

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

El profesor debe realizar la lectura de la formulación con el grupo completo de estudiantes y formular preguntas para verificar la comprensión del enunciado. Los estudiantes deben tener la formulación de la tarea, preferiblemente de forma escrita. El profesor conforma grupos de seis personas y les entrega una balanza y una cinta métrica para que cada integrante del grupo determine su índice de masa corporal y puedan completar la tabla de características físicas en la que establecen la pertenencia de un número a un intervalo. Después de realizar el trabajo grupal, los estudiantes deben presentar los resultados obtenidos a sus compañeros. El profesor debe encaminar la discusión a verificar la veracidad de estos resultados. Para finalizar, el profesor realiza un cierre con el objetivo de institucionalizar los conceptos desarrollados en la tarea.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

Para que el profesor tenga una visión general de los procedimientos que pueden realizar los estudiantes al resolver la tarea, presentamos, en la figura 15, el grafo del objetivo 3 con los criterios de logro de la tarea resaltados. Observamos que tenemos previstas cuatro estrategias de resolución de la tarea, una por cada forma de representar intervalos, que el estudiante puede escoger para presentar los resultados obtenidos. También, observamos que existen nueve criterios de logro que se deben activar necesariamente para resolver la tarea: (a) extracción de la información relevante del enunciado; (b) relación de expresiones numéricas con los intervalos; (c) plantear una inecuación para determinar un intervalo; (d) usar las propiedades de las desigualdades al solucionar expresiones simbólicas para encontrar un intervalo; (e) relacionar el conjunto solución de una inecuación con un intervalo; (f) relacionar expresiones simbólicas con intervalos; (g) decidir la forma en la que se quiere

representar la información identificada; (h) cuatro estrategias de resolución de la tarea que pueden seguir los estudiantes para establecer equivalencias entre la representación simbólica de los intervalos y las representaciones verbal, numérica o gráfica; e (i) verificar la validez de las respuestas obtenidas en el contexto que se le presenta a los estudiantes.

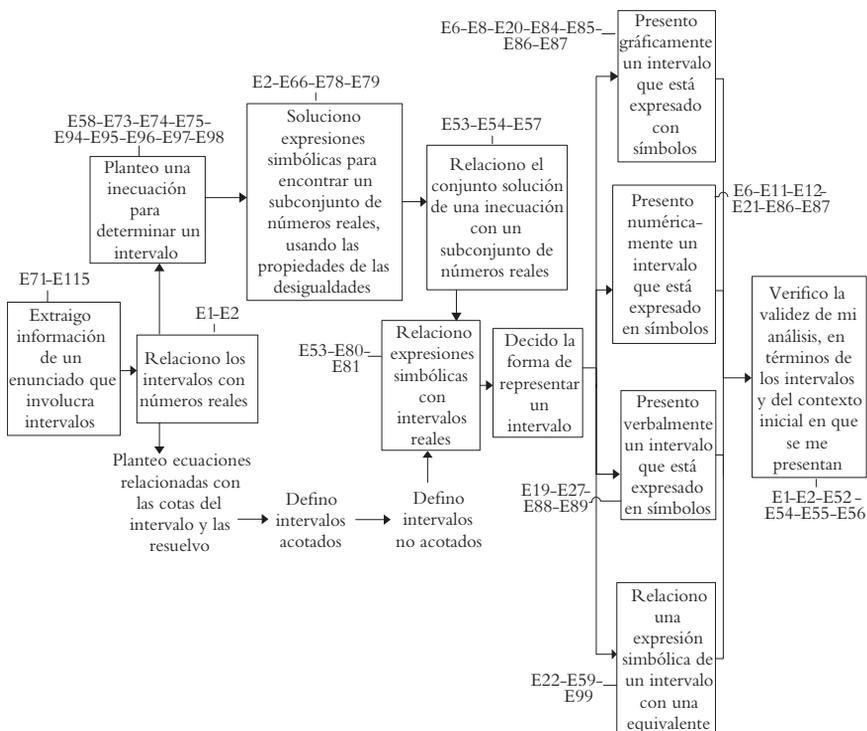


Figura 15. Grafo de criterios de logro de la tarea 3.1 Índice de masa corporal

Errores en los que puede incurrir el estudiante. Al abordar la solución de la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores que los lleven a no realizar uno de los procedimientos descritos en los criterios de logro. Por ejemplo, pueden interpretar equivocadamente las relaciones de orden que permiten establecer la pertenencia de un número a un intervalo. Esto se puede presentar en el criterio de logro “relaciono intervalos con números reales”. El listado completo de errores puede consultarse en el anexo 3.

Actuación del profesor. Además de las institucionalizaciones y las explicaciones generales, el profesor debe mantener una actitud motivadora durante toda

la sesión; estar atento a animar a los estudiantes a continuar con el desarrollo de la tarea; mediar en las posibles diferencias de opinión que se puedan presentar entre integrantes de un grupo o entre grupos; y suministrar ayudas a los estudiantes para superar los errores en los que puedan incurrir. A partir de los errores que previmos para esta tarea de aprendizaje, presentamos ejemplos de ayudas que el profesor puede brindar a los estudiantes durante la implementación. Por ejemplo, cuando los estudiantes incurren en el error de “establecer la pertenencia de un número a un intervalo cuando no lo está”, el profesor puede indagarles sobre si ese número pertenece al intervalo, o si cumple con las condiciones iniciales. De esta manera, los estudiantes podrán evidenciar su error y continuar con el desarrollo de la tarea de aprendizaje. El listado de ayudas para esta tarea puede consultarse en el anexo 7.

Evaluación

Esperamos que el profesor observe la actuación de los estudiantes durante la implementación de la tarea de aprendizaje y que esté atento a sus intervenciones en el momento de la plenaria, con el fin de que analice si representaron los intervalos y justificaron sus respuestas. También, deberá revisar el material diligenciado por los estudiantes para identificar los errores en los que incurrieron.

4.10. Tarea 3.2 Zona cardiaca

Antes de la implementación de la tarea Zona cardiaca, los estudiantes, en clase de educación física, deben realizar una clase de rumba en la que toman su frecuencia cardiaca en tres momentos diferentes: al iniciar la clase, después de 10 minutos y después de 20 minutos. En la formulación de la tarea, se les proporciona la información de las zonas cardiacas en la que se presentan intervalos, de manera verbal. Los estudiantes deben establecer la pertenencia de su frecuencia cardiaca en los intervalos presentados. Para dar respuesta a los requerimientos de la tarea, pueden usar cualquier forma de representar intervalos y validar la veracidad de sus respuestas. La formulación de la tarea se les presentará de forma escrita en una fotocopia.

Descripción de la tarea

Con esta tarea, los estudiantes plantean igualdades que relacionan con las cotas de los intervalos, deciden qué tipo de intervalos son (a partir de la información inicial), los representan, los usan en el análisis de la situación y

presentan conjeturas desde su análisis. A continuación, presentamos los elementos de esta tarea.

Requisitos. Para esta tarea, se requiere que los estudiantes sepan tomar su frecuencia cardíaca, reconocer las unidades de medida y extraer información de una tabla.

Aportes de la tarea a las expectativas. Con el desarrollo de esta tarea, se pretende que los estudiantes produzcan y extraigan información de una situación, utilicen un lenguaje formal para referirse a los elementos de un intervalo y den argumentos válidos en el contexto de las matemáticas a la solución del problema planteado. Además, con la formulación de la tarea promovemos que los estudiantes se interesen por modelar intervalos a partir de ecuaciones.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea. En esta tarea, los estudiantes extraen información relevante sobre intervalos presentados de forma verbal. Deben establecer la pertenencia de números a un intervalo y decidir la forma que consideren más adecuada para representar el intervalo solicitado. Pueden utilizar cualquier forma de representar intervalos (numérica, verbal, gráfica o simbólica) para dar respuesta a los requerimientos de la tarea. Finalmente, deben presentar los resultados obtenidos a sus compañeros de clase.

Sistemas de representación que se activan. En esta tarea, los estudiantes leen los intervalos presentados de forma verbal, para dar respuestas a los requerimientos de la tarea. Pueden escoger cualquier forma de representación (numérica, verbal, gráfica o simbólica).

Contextos en los que se sitúa la tarea. La tarea se encuentra en los contextos personal y social, relacionados con el cuidado personal.

Materiales y recursos. Los materiales para esta tarea son hoja, lápiz, colores, regla, borrador, tajalápiz, tablero y marcadores.

Agrupamiento e interacciones previstas. El agrupamiento de los estudiantes durante la tarea estará dado en parejas y en el grupo de clase. La interacción que se promueve con el desarrollo de la tarea es la siguiente: (a) estudiante–estudiante (durante el trabajo en parejas los estudiantes realizan un trabajo colaborativo), (b) estudiante–profesor (los estudiantes tienen la posibilidad de preguntar al profesor acerca de sus inquietudes durante todo el desarrollo de la sesión), (c) estudiante–grupo de clase (en el momento de presentar sus resultados como grupo a los compañeros de clase) y (d) profesor–grupo de clase (cuando el profesor indaga acerca de los saberes de cada estudiante).

Formulación de la tarea

Zona cardíaca

La frecuencia cardíaca (Fc) es un parámetro que se usa habitualmente para determinar la intensidad de un entrenamiento o actividad. La Fc de entrenamiento se suele dar en porcentajes relativos al máximo de la frecuencia cardíaca. Un método sencillo para calcular Fc máxima consiste en restar la edad a 220. Este resultado se toma como el 100%.

$$Fc \text{ máxima para hombres} = 220 - \text{edad}$$

$$Fc \text{ máxima para mujeres} = 226 - \text{edad}$$

A partir de esta Fc máxima, podemos calcular los porcentajes en que deberíamos estar según el objetivo perseguido en un entrenamiento. Los intervalos están dados en términos de porcentajes de la frecuencia cardíaca máxima, de la siguiente manera.

Intensidad muy ligera (zona base): 50-60%. Esta zona es útil para trabajos de recuperación, calentamiento y vuelta a la calma.

Intensidad ligera (zona quema grasas): 60-70%. Esta zona es para el trabajo base de la condición física. Es muy recomendable para personas que se inician en el deporte y quieren comenzar a construir una buena forma física. También es utilizado en los inicios de temporada de deportistas para comenzar a asentar una base de trabajo.

Intensidad moderada (zona aeróbica): 70-80%. En este intervalo, ya se persigue un objetivo de mejora en rendimiento y se trabaja la eficiencia del corazón (utilización de menos energía para la realización de un esfuerzo). Es recomendado para ciclos de entrenamientos preparatorios a pruebas de media-larga duración en los que se establece una base aeróbica importante.

Intensidad dura (zona anaeróbica): 80-90%. Esta zona ya es un escalón en el que la fatiga aparece de manera manifiesta. El objetivo es ganar rendimiento y poder trabajar a alta intensidad a lo largo del tiempo. No se recomienda para programas en los que se busque mejora de la condición física básica: para eso están los escalones anteriores. Este es un intervalo para entrenamiento específico y anaeróbico que persigue rendimiento en el deporte.

Intensidad máxima (zona máxima): 90-100%. Esta zona identifica el máximo esfuerzo que pueden tolerar nuestros órganos y músculos. Se trata de un entrenamiento anaeróbico que, debido a su dureza, solo se puede aplicar en breves periodos de tiempo (menos de 5 minutos). Las agujetas y el ácido láctico harán

aquí de las suyas. Por eso, esta zona solo es recomendable para entrenamientos específicos de deportistas que busquen rendimiento⁶.

Observa la figura que resume esta información



Zona cardiaca (tomado de <http://bit.ly/2q0EbDI>)

1. Nuri y Natalia acuden al gimnasio con objetivos diferentes. ¿Qué les recomendarías según sus objetivos personales?
 - a. Nuri tiene 24 años y desea realizar un entrenamiento para mejorar su condición física.
 - b. Natalia tiene como objetivo ejercitarse para perder peso. Tiene 34 años.
2. En el gimnasio cuentan con una zona para realizar clases grupales y el entrenador principal le sugiere al administrador que presente esta información en términos de la frecuencia cardiaca para grupos de personas por edades. Su petición incluye las siguientes edades como ejemplos: 20, 30 y 40. ¿Cómo presentan los intervalos que cumplan con estas condiciones?

Trabajo en parejas

3. Analicen los resultados obtenidos en la clase de rumba a la que asistieron.
 4. Calculen las diferentes zonas cardiacas en las que podrían estar según los objetivos que les presentamos en la información inicial.
 5. Clasifiquen cada uno de los datos obtenidos en la clase de educación física.
 6. Si podemos expresar las zonas cardiacas como intervalos en los que la cota inferior está incluida y la superior no, planteen ecuaciones para cada una de las cotas que cumplan con las condiciones iniciales de cada una de las zonas y escriban intervalos que cumplan con la clasificación descrita.
- Presenten una conclusión a sus compañeros de clase.

Temporalidad. La tarea se desarrolla en cuatro momentos: lectura y aclaraciones de la tarea (5 minutos), trabajo individual (25 minutos), presentación de resultados y acuerdos en plenaria (10 minutos) y verificación de resultados (5 minutos).

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Esta tarea se puede desarrollar en 55 minutos. Es conveniente que, antes de iniciar, el profesor realice la lectura de la formulación de la tarea con el grupo completo de estudiantes y haga preguntas para verificar la comprensión del enunciado. Los estudiantes deben tener la formulación de la tarea, preferiblemente de forma escrita. El profesor pedirá a los estudiantes formar parejas para solucionar la tarea. Ellos, con ayuda de los datos tomados acerca de sus frecuencias cardiacas, establecen la pertenencia de un número a un intervalo. Después de realizar el trabajo por parejas, los estudiantes deben presentar los resultados obtenidos a sus compañeros. El profesor debe encaminar la discusión a verificar la veracidad de estos resultados. Para finalizar, el profesor realiza un cierre con el objetivo de institucionalizar los conceptos desarrollados en la tarea.

Grafo de criterios de logro de la tarea, errores y actuación del profesor

Para que el profesor tenga una visión general de los procedimientos que pueden realizar los estudiantes al resolver la tarea, presentamos, en la figura 16, el grafo del objetivo 3 con los criterios de logro de la tarea resaltados. Observamos que tenemos previstas cuatro estrategias de resolución de la tarea, una por cada forma de representación que el estudiante puede escoger para presentar los resultados obtenidos. También observamos que existen nueve criterios de logro que se deben activar necesariamente para resolver la tarea.

Errores en los que puede incurrir el estudiante. Al abordar la solución de la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores que los lleven a no realizar uno de los procedimientos descritos en los criterios de logro. Por ejemplo, pueden omitir información importante para el planteamiento de los intervalos. Este error se puede presentar en el criterio de logro “extraigo información de un enunciado que involucra intervalos”. El listado completo de errores puede consultarse en el anexo 3.

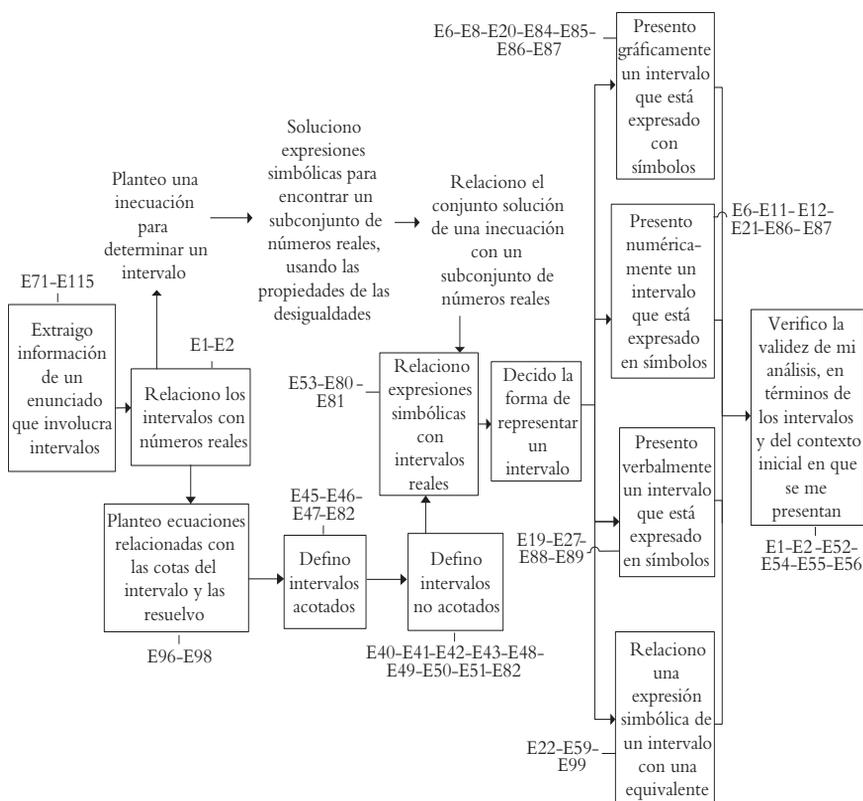


Figura 16. Grafo de criterios de logro de la tarea 3.2 Zona cardiaca

Actuación del profesor. Además de las institucionalizaciones y las explicaciones generales, el profesor debe mantener una actitud motivadora durante toda la sesión, estar atento a animar a los estudiantes a continuar con el desarrollo de la tarea, mediar en las posibles diferencias de opinión que se puedan presentar entre integrantes de un grupo o entre grupos y suministrar las ayudas a los estudiantes para superar los errores. A partir de los errores que previmos para esta tarea de aprendizaje, presentamos ejemplos de ayudas que el profesor puede brindar a los estudiantes durante la implementación. Por ejemplo, cuando un estudiante incurre en el error de proponer soluciones sin validar su veracidad, el profesor puede pedirle que tome las cotas del intervalo solución y verifique si están en los intervalos. El listado de ayudas para esta tarea puede consultarse en el anexo 7.

Evaluación

Esperamos que el profesor observe la actuación de los estudiantes durante la implementación de la tarea de aprendizaje y que esté atento a la presentación de los resultados obtenidos por cada grupo. El profesor deberá también revisar el material diligenciado por los estudiantes para identificar los errores en los que incurrieron.

5. Evaluación final

La evaluación final de la unidad didáctica contiene 10 preguntas abiertas que permiten establecer si los estudiantes alcanzaron los objetivos de aprendizaje propuestos para el tema. A continuación, presentamos la evaluación final y la rúbrica de evaluación por objetivo de aprendizaje de la unidad didáctica.

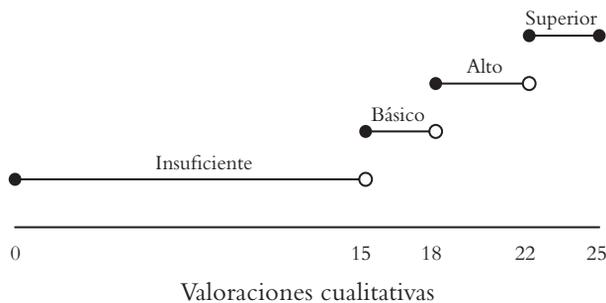
5.1. Formulación de la evaluación final

A continuación, presentamos las tareas de evaluación que conforman la evaluación final. Sugerimos que estas tareas sean presentadas de manera individual a los estudiantes.

Contesta las preguntas 1 y 2 de acuerdo con la siguiente situación.

Sistema de evaluación

En nuestro colegio el sistema de evaluación está establecido de la siguiente manera: los estudiantes obtienen máximo 15 puntos en su trabajo de clase, máximo 5 puntos en la evaluación bimestral y máximo 5 puntos de proyecto de síntesis, para un total de máximo 25 puntos en cada periodo. Las valoraciones cualitativas se muestran en la figura.



1. Establece los intervalos de las valoraciones cualitativas de nuestro colegio en la siguiente tabla.

Valoraciones	Gráficamente	En palabras	Numéricamente	Simbólicamente
Superior				
Alto				
Básico				
Insuficiente				

2. El profesor de sociales pone los puntos con tres cifras decimales. Sin embargo, al dar la valoración definitiva, aproxima los puntos de la siguiente manera. Si la valoración es mayor o igual a 0,5, aproxima al siguiente número entero. Si es menor que 0,5, aproxima al número entero anterior.

Escribe todos los posibles puntajes desde 14 hasta 15 con los que se aprueba sociales.

Contesta las preguntas 3 y 4 de acuerdo con la siguiente información.

Subsidio familiar

El subsidio familiar de vivienda (sfv) es un aporte que entrega el Estado y que constituye un complemento del ahorro para facilitar la adquisición, construcción o mejoramiento de una solución de vivienda de interés social al ciudadano. En la tabla que encuentras a continuación, se presentan los ingresos en salarios mínimos mensuales legales vigentes (SMMLV) y el subsidio al que se tiene derecho, en el año 2016⁷.

Valores subsidio de vivienda 2016 Decreto 412 del 7 de marzo de 2016			
Ingresos en salarios mínimos (SMMLV)	Ingresos familiares en pesos	Valor del subsidio familiar de vivienda en salarios mínimos (SMMLV)	Valor del subsidio familiar de vivienda en pesos
[0,1.6]	[0, 1 103 128]	30	20 683 650
(1.6, 2]	(1 103 128, 1 378 910]	25	17 236 375
(2,3]	(1 378 910, 2 068 365]	20	13 789 100
[3,4)	(2 068 365, 2 757 820]	12	8 273 460

7 Tomado de módulo de razonamiento cuantitativo Saber pro 2015-1 (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación [Icfes], 2015, p. 11).

3. En una empresa, los trabajadores tienen salarios que dependen de las labores que desempeñan y la cantidad de horas que trabajan por semana. Escribe, en una frase, cuáles son los posibles ingresos familiares en pesos de los trabajadores que están aplicando a un subsidio de \$20 638 650.
4. Realiza la gráfica que representa los intervalos de ingresos familiares en salarios mínimos para asignar los subsidios de vivienda.

Contesta las preguntas 5, 6 y 7 para las siguientes inecuaciones: $2x + 1 \geq 3$ y $2x - 2 < 5$.

5. ¿Cuál es el conjunto solución que le corresponde a cada inecuación?
6. Escribe el conjunto de números que satisfacen ambas inecuaciones.
7. Escribe el conjunto de números que satisface la primera inecuación, pero no la segunda.
8. Fernando Alonso, Pau Gasol y Rafa Nadal nunca se ponen de acuerdo. El piloto, Fernando Alonso, dice que solo puede ir a tomar algo entre las 2 de la tarde (es que se levanta muy tarde) y las 9 de la noche. El basquetbolista, Pau Gasol, dice que él solo puede entre las 9 de la mañana y las 4 de la tarde (porque quiere dormir la siesta). Y el tenista, Rafa Nadal, solo puede desde las tres y media de la tarde hasta las 10 de la noche (porque ha quedado para irse de fiesta). Representa las horas a las que puede asistir cada uno. ¿Cuál es el espacio de tiempo que tienen para verse los tres⁸?
9. Se estima que el costo anual de manejar un cierto automóvil nuevo se obtiene mediante la fórmula

$$C = 0,35m + 2200,$$

donde m representa la cantidad de millas recorridas al año y C es el costo en dólares. Juan compró uno de esos vehículos y decide apartar para el año próximo entre 6 400 y 7 100 dólares para los costos de manejo. ¿Cuál es el intervalo correspondiente de millas que puede recorrer con su nuevo automóvil⁹?

10. En una empresa comercializadora de automóviles, se establece que el promedio de venta mensual de los vendedores es de \$300 000 000. Para los nuevos vendedores, se establece que, si venden más del 80% de ese monto mensual, se les dará una comisión de venta del 5%. Si venden entre el 60% y el 80%, se les dará una comisión del 3%. Y si venden menos del 60%, no recibirán comisión. Escribe los intervalos en dinero según la venta individual que corresponden a cada comisión.

8 Tomado y adaptado de Pelegino (2010).

9 Tomado y adaptado de Stewart, Redlin y Watson (2007).

5.2. Rúbricas de evaluación

En las tablas 4, presentamos las rúbricas con las que evaluamos el logro de cada uno de los objetivos propuestos. Las tareas 1 a 5 evalúan el objetivo 1; las tareas 6 a 8, el objetivo 2; las tareas 9 y 10, el objetivo 3. Establecimos los posibles niveles de desempeño para cada objetivo según la consecución de los criterios de logro y los errores en los que incurran los estudiantes al abordar las tareas de evaluación.

Tabla 4
Rúbrica de evaluación para los objetivos

Nivel de desempeño	Criterio de evaluación
Superior	El estudiante cumple con los criterios de logro propuestos para el objetivo 1, es decir, no se admite errores.
Alto	El estudiante activa los criterios de logro relacionados con la lectura y extracción de información de enunciados que involucran intervalos (CdL1.1), realiza traducciones entre sistemas de representación (CdL1.6-1.7-1.8-1.11-1.12-1.13-1.17-1.18-1.19-1.22-1.23-1.24), relaciona una representación de un intervalo con otra equivalente (CdL1.9-1.14-1.16-1.21), establece que las propiedades de los números reales se cumplen para los intervalos (CdL1.25) y expresa su respuesta en términos del contexto en que se ha presentado la situación (CdL1.28). En este nivel, el estudiante puede incurrir en errores al aplicar algoritmos de operaciones entre números reales. Por ejemplo, en el punto 5, el estudiante puede resolver la inecuación como si fuera una ecuación o hallar la solución sin tener en cuenta las propiedades de las desigualdades (E 57-66-78-79); en el punto 1, puede relacionar intervalos abiertos a intervalos donde sus cotas están incluidas. Algunos de los otros errores que se pueden presentar al clasificar los intervalos relacionados con la forma de representar las cotas (E44-45-46-47-49-50-51).
Básico	El estudiante reconoce la situación planteada y extrae parte de la información del enunciado. Incorre en el error de omitir información importante en el enunciado (E71). También, puede confundir algunos símbolos de los diferentes sistemas de representación o del mismo sistema (E3-4-8-11-12-19-20-21-22-80-81); puede incurrir en errores relacionados con la interpretación del cumplimiento de las propiedades de orden y densidad de los números reales (E1-2); puede interpretar equivocadamente el símbolo infinito o su uso en los intervalos (E39-40-41-42-43); o incurrir en errores que no le permiten justificar sus soluciones. Por ejemplo, el estudiante puede dar resultados que no corresponden a la solución de cada punto (E-24-52-55).

Nivel de desempeño	Criterio de evaluación
Bajo	El estudiante tendrá un nivel de desempeño bajo si incurre en alguno de los siguientes errores: no extrae la información planteada en el enunciado (E115); establece equivalencias erróneas entre sistemas de representación o en el mismo sistema (6-9-10-14-15-26-27-29-77-83-84-85-86-87-88-89-90-91-92); utiliza algoritmos de forma equivocada para resolver operaciones entre números reales (E59-99); considera equivalentes intervalos acotados y no acotados (E82); o presenta justificaciones incoherentes de sus resultados de acuerdo con el contexto presentado (E18-23-25-53-54-56).
Rúbrica de evaluación para el objetivo 2	
Superior	El estudiante cumple con los criterios de logro propuestos para el objetivo 2 y no incurre en errores.
Alto	El estudiante activa los criterios de logro relacionados con la lectura y extracción de información de enunciados que involucran intervalos (CdL2.1); clasifica intervalos (CdL2.2-2.3); relaciona los diferentes sistemas de representación con intervalos reales; realiza traducciones entre los sistemas de representación y el sistema de representación gráfico (CdL2.5-2.6-2.7-2.8-2.9-2.10-2.11-2.12); realiza operaciones entre intervalos (CdL2.13-2.14-2.15); y expresa su respuesta en términos del contexto en que se ha presentado la situación (CdL2.17). En este nivel, el estudiante puede incurrir en errores al clasificar los intervalos (E44-45-46-47-48-49-50-51). Por ejemplo, el estudiante, en los puntos 6, 7 y 8, puede relacionar un intervalo cerrado con un intervalo donde sus cotas no están incluidas.
Básico	En este nivel, el estudiante extrae parte de la información del enunciado, e incurre en alguno de los siguientes errores: omitir información relevante (E71); puede incurrir en errores relacionados con la interpretación del cumplimiento de las propiedades de orden y densidad de los números reales (E2); confundir los símbolos entre los diferentes sistemas de representación y entre el mismo sistema (E3-4-6-8-19-20-21-80-81); interpretar equivocadamente el símbolo infinito o su uso en los intervalos (E39-40-41-42-43); incurrir en errores relacionados con la aplicación de las operaciones entre intervalos (E63-61-62-64-65-100); o incurrir en errores que no le permiten justificar sus soluciones (E52-54-55).
Bajo	El estudiante tendrá desempeño bajo si incurre en alguno de los siguientes errores: no extrae la información planteada en el enunciado (E115); relaciona intervalos con los números enteros comprendidos entre dos enteros (E1); establece equivalencias erróneas entre sistemas de representación y el sistema de representación gráfico (E10-15-26-29-77-83-84-85-86-87-90-91-92-93); considera equivalentes intervalos acotados y no acotados (E82); confunde la operación que debe realizar entre intervalos en cada situación (E67-68-69); o presenta justificaciones incoherentes de sus resultados de acuerdo con el contexto presentado (E18-23-24-25-56).

Nivel de desempeño	Criterio de evaluación
Rúbrica de evaluación para el objetivo 3	
Superior	El estudiante cumple con los criterios de logro propuestos para el objetivo 3 y no incurre en errores.
Alto	El estudiante activa los criterios de logro relacionados con la lectura y extracción de información de enunciados que involucran intervalos (CdL3.1); plantea ecuaciones o inecuaciones para describir características de los intervalos (CdL3.3-3.6); representa los intervalos (CdL3.11-3.12-3.13-3.14); y expresa su respuesta en términos del contexto en que se ha presentado la situación (CdL3.15). El estudiante podría incurrir en errores al momento de resolver las ecuaciones o al despejar las inecuaciones (E57-66-78-79-98).
Básico	El estudiante reconoce la situación planteada y extrae parte de la información del enunciado. Incurre en uno o más de los siguientes errores: omitir información relevante (E71); confundir algunos de los símbolos al representar los intervalos (E6-8-11-12-19-20-21-22-73-74-75-77-27-80-81); relacionar intervalos con los números enteros comprendidos entre dos enteros (E1); interpretar equivocadamente el símbolo infinito o su uso en los intervalos (E40-41-42-43); incurrir en errores al clasificar los intervalos (E44-45-46-47-48-49-50-51); o incurrir en errores que no le permiten justificar sus soluciones (E54-55).
Bajo	El estudiante tendrá desempeño bajo si incurre en alguno de los siguientes errores: no extrae la información planteada en el enunciado (E115); o incurre en errores relacionados con la interpretación del cumplimiento de las propiedades de orden y densidad de los números reales (E2-95-96-97); establece equivalencias erróneas entre sistemas de representación (E84-85-86-87-88-89); considera equivalentes intervalos acotados y no acotados (E82); incurre en errores que no le permiten plantear y resolver ecuaciones o plantear y resolver inecuaciones para representar características de los intervalos (E58-59 -94-99); o presenta justificaciones incoherentes de sus resultados de acuerdo con el contexto presentado (E53-54-56).

6. Conclusiones

Para llegar a la cartilla que presentamos en este documento, implementamos las tareas de aprendizaje con un grupo de estudiantes y analizamos los resultados obtenidos para realizar las mejoras necesarias al diseño de la unidad didáctica. Evaluamos la actuación de los estudiantes de acuerdo con los procedimientos que utilizaron al resolver cada una de las tareas y los errores

en que incurrieron, para establecer en qué medida lograron los objetivos. Pudimos concluir que la unidad didáctica contribuyó a que los estudiantes conocieran diferentes representaciones de intervalos y lograran relacionarlas al realizar traducciones entre ellas. Las tareas que propusimos en diferentes contextos y representaciones les permitieron analizar las características de un intervalo desde diversas situaciones reales y les dieron la posibilidad de interactuar con el concepto matemático. Además, la unidad didáctica activó en los estudiantes capacidades que les permitieron realizar operaciones de unión, intersección y diferencia entre dos o más intervalos, a partir de situaciones reales, que llevaron al contexto matemático.

Con el desarrollo de la unidad didáctica los estudiantes cambiaron su actitud frente al aprendizaje de las matemáticas, ya que, antes de implementar las tareas de aprendizaje, se mostraban apáticos al trabajo en matemáticas. Las tareas de aprendizaje les dieron una perspectiva diferente que les permitió interactuar entre ellos y discutir argumentos sobre las características de los intervalos. Los recursos y materiales utilizados los incentivaron a presentar de forma organizada sus resultados, al usar diferentes representaciones. Además, observamos que, después de realizar las discusiones con sus pares, lograron modelar situaciones usando los intervalos.

También pudimos establecer que fortalecimos en los estudiantes todas las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos previstos en el diseño de la unidad didáctica. Diseñamos tareas de aprendizaje que contribuyeron a que los estudiantes desarrollaran las capacidades de matematizar (al realizar la lectura de situaciones en diferentes contextos), hacer uso de los intervalos para modelarlas, operar intervalos y dar resultados en términos del contexto en que se presentó cada situación.

Una de las limitaciones de la unidad didáctica es que se emplea mucho tiempo para la implementación de las tareas de aprendizaje. Sin embargo, creemos que los estudiantes se benefician porque tienen la oportunidad de desarrollar diferentes habilidades (como la argumentación y la validación de resultados), progresar en su seguridad para plantear sus puntos de vista y adquirir conocimientos a través del uso de los intervalos.

7. Listado de anexos

En la tabla 5, presentamos el listado de anexos con su respectiva descripción.

Tabla 5
Listado de anexos

	Nombre del anexo	Descripción
01	Grafos de criterios de logro de los objetivos	En este anexo, se encuentran los grafos de criterio de logro de cada uno de los objetivos
02	Listado de capacidades	En este anexo, describimos las capacidades del tema intervalos
03	Dificultades y errores	En este anexo, se encuentran las dificultades de la unidad didáctica con sus respectivos errores
04	Sistemas de representación	En este anexo, se encuentran con más detalle las formas de representación de intervalos, con sus respectivas definiciones y el grafo que reúne esta información
05	Material fotocopiable	En este anexo, se encuentra el material fotocopiable de cada una de las tareas de aprendizaje
06	Criterios de logro	En este anexo, se encuentra la descripción de los criterios de logro por objetivo
07	Listado de ayudas	En este anexo, se encuentran las ayudas para cada una de las tareas de aprendizaje
08	Tiras de papel	En este anexo, describimos como construir el material tiras de papel para el objetivo 2

8. Referencias

- Apóstol, Tom M. (1976). *Análisis matemático*. Barcelona: Reverté.
- Apóstol, Tom M. (1984). *Calculus* (vol. I). Barcelona: Reverté.
- Gómez, P. (2018). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes). (2015). *Módulo de razonamiento cuantitativo Saber pro 2015-1*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España (MECD). (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*. Recuperado el 30 de enero del 2014, de <http://bit.ly/2JbJTer>.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor. Recuperado de <http://is.gd/IRHR7t>

- Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá: Autor. Recuperado de <http://is.gd/SMxhPP>
- Pelegino, S. (2010). *Didáctica de los números reales*. Recuperado de Publicastuslibros.com.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Instituto de Ciencias de la Educación (ICE)-Horsori. Recuperado de <http://bit.ly/2J9IKUN>.
- Stewart, J. Redlin, L. y Watson, S. (2007). *Pre-cálculo. Matemáticas para el cálculo*. México, D. F.: Cengage Learning.