http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6
ISSN: 2254-8351

Educación Matemática en la Infancia

Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil

Encarnación Castro,
Universidad de Granada, España, encastro@ugr.es
María C. Cañadas
Universidad de Granada, España, mconsu@ugr.es
Marta Molina
Universidad de Granada, España, martamg@ugr.es

Fecha de recepción: 12-06-2017
Fecha de aceptación: 22-11-2017
Fecha de publicación: 31-12-2017

RESUMEN
Presentamos un estudio centrado en el pensamiento funcional de un grupo de 12 estudiantes de Educación Infantil (5-6 años) de un colegio privado de Granada. Trabajamos con ellos durante tres sesiones, utilizando una metodología de investigación de diseño. En estas sesiones les planteamos tres situaciones cercanas a los niños, empleando diferentes representaciones y que involucran las funciones $y = x$, $y = 2x$, $y = x + 1$. En los resultados ponemos de manifiesto que estos estudiantes evidenciaron pensamiento funcional a través de las relaciones funcionales de correspondencia y covariación. Algunos estudiantes percibieron patrones y llegaron a la generalización.

Palabras clave: Educación Infantil, patrón, generalización, pensamiento funcional.

Functional thinking shown by kindergarten students

ABSTRACT
We present results from 12 kindergarten students (5-6 years old) of a private school in Granada. We work with them during three sessions using a design research methodology. In these sessions, we proposed the students three familiar situations, using different representations, and involving the functions $y = x$, $y = 2x$, $y = x + 1$. In the results, we show that these students evidenced functional thinking through correspondence and co-variation functional relationships. Some of the students perceived the patterns and achieved the generalization.

Key words: Early Childhood Education, pattern, generalization, functional thinking.

1. Introducción

Este artículo ha sido escrito con el pensamiento puesto en Enrique Castro, Catedrático del Departamento de Didáctica de la Universidad de Granada. Durante más de 30 años, ha dedicado una parte importante de su docencia a la formación de maestros de Educación Infantil. Las autoras han colaborado estrechamente con él en tareas de investigación en el marco de variados proyectos de investigación I+D que Enrique Castro ha dirigido. Desde 2014, tras dejar la dirección de este tipo de proyectos para dar paso y apoyar a otros investigadores más jóvenes del equipo, participa como investigador en proyectos que las doctoras Cañadas y Molina dirigen centrados en el pensamiento algebraico, particularmente en el pensamiento funcional. Este artículo se centra en los dos focos mencionados: pensamiento funcional y Educación Infantil.

Las ideas sobre Educación Matemática en las primeras edades han evolucionado considerablemente en los últimos años (p. ej., Castro, Cañadas y Castro-Rodríguez, 2013; Castro y Castro 2016; Clements y Sarama, 2007). Ha pasado de no ser reconocida a considerarse un elemento importante para la formación de los niños de Educación Infantil. Uno de los argumentos a favor de la importancia de la Educación Matemática en estas edades es la nueva visión sobre la posible competencia matemática en los primeros años y su influencia en el éxito de estudios posteriores. Hace unas décadas se consideraba que en Educación Infantil no era posible tener capacidades matemáticas que pudiesen considerarse como tales; en cambio, actualmente, con apoyo de la investigación educativa, se acepta que los niños en las primeras edades pueden razonar matemáticamente y son propensos a aprender conceptos y adquirir habilidades matemáticas, siendo los primeros aprendizajes matemáticos sorprendentemente importantes (p. ej., Clements, Baroody y Sarama, 2013). Diferentes autores evidencian que "los niños pequeños tienen mentes matemáticas sofisticadas y un afán natural por participar en una serie de actividades matemáticas" (Mulligan y Mitchelmore, 2013, p. 29). Una declaración conjunta de la *National Association for the Education of Young Children* (NAEYC) y *el National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (2002; 2009) reconoce que el aprendizaje de las matemáticas de un individuo depende, en gran medida, de la calidad de la educación matemática recibida entre los tres y los seis años. Una consecuencia de tal reconocimiento es la preocupación creciente de educadores y responsables de políticas educativas por mejorar el aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil.

1.1 ¿Qué matemáticas trabajar en Educación Infantil?

Algunos investigadores, entre los que se encuentran Clements, Baroody y Sarama (2013), señalan cinco bloques de contenidos matemáticos que se pueden trabajar en infantil: (a) números y operaciones; (b) geometría; (c) medida; (d) patrones y estructuras (álgebra escolar en términos de Clementes y Sarama, 2007); y (e) datos. Estos bloques no son equivalentes en cuanto a la cantidad de contenidos que incluye cada uno; los hemos presentado por orden decreciente en cantidad de contenidos.

Una vez fijados los bloques de contenido, se presenta el dilema de tomar la decisión sobre aquello que es apropiado para el desarrollo de la Educación Matemática en la infancia dentro de cada uno de estos bloques. Se parte de dos supuestos antagónicos: por un lado, pretender preparar a los escolares para el éxito posterior, aceptando que una educación temprana intensiva sobre los conocimientos matemáticos básicos permite llegar a alcanzar un nivel aceptable; por otro lado, no se quiere someter a los niños pequeños a una instrucción severa, imponiéndoles conocimientos que no estén listos para aprender, desplazando el currículo de niveles educativos superiores hacia los grados inferiores (p. ej., Seo y Ginsburg, 2004). Se aboga por un plan de estudios cuidadosamente planeado, desafiante, atractivo, culturalmente apropiado (NCTM, 2013), basado en los intereses de los escolares, de sus motivaciones y competencias previas, considerándose que la construcción de conocimientos matemáticos se logra mediante las experiencias de la vida diaria de los niños, dentro del marco de sus intereses (NAEYC/NCTM, 2002). Se sustenta que el aprendizaje de las matemáticas, en general, ha de hacerse con comprensión. Particularmente, para el bloque de álgebra escolar de los primeros niveles, se señala que el pensamiento algebraico debe ir más allá de la fluidez computacional de la aritmética, y prestar más atención a la estructura de las matemáticas. Para ello se recomienda trabajar formas particulares de pensamiento como: hacer análisis de situaciones estudiando el cambio, ver posibles relaciones entre cantidades y descubrir la estructura subyacente, trabajar la generalización, la predicción, la resolución de problemas y el modelado de situaciones a través de las matemáticas (p. ej., Cai y Knuth, 2011).

En este trabajo centramos nuestra atención en el bloque de patrones y estructura en términos de Clements et al (2013) o álgebra escolar en términos de Clements y Sarama (2007). Dentro de este bloque, nuestro interés está en el pensamiento funcional de niños de Educación Infantil. Lo asumimos como parte de la propuesta curricular *early algebra*, que recomienda introducir el pensamiento algebraico en los primeros años de escolarización obligatoria, esto es, primaria e incluso infantil (Cañadas y Molina, 2016; Kaput, 1999; Molina, 2009).

2. Marco teórico y antecedentes

Presentamos a continuación el marco teórico de este trabajo articulado en torno a las nociones de pensamiento funcional, patrones y generalización. Posteriormente recogemos algunos antecedentes destacados en relación al tema que nos ocupa.

2.1 Pensamiento funcional

En la literatura se habla de razonamiento algebraico, pensamiento algebraico, razonamiento funcional y pensamiento funcional. En todos los casos se requiere establecer relaciones, si bien el uso del término razonamiento presenta connotaciones lógicas.

Blanton y Kaput (2004) describen el razonamiento algebraico como el proceso mediante el cual se llegan a generalizar relaciones matemáticas, a partir de un conjunto de instancias particulares, y a expresarlas en formas cada vez más formales. Estos autores señalan que el razonamiento algebraico se produce particularmente en tareas en las que se puede generalizar desde patrones numéricos para desarrollar relaciones funcionales. El razonamiento funcional es una rama del razonamiento algebraico (Payne, 2012). El pensamiento funcional se centra en las relaciones, tanto directa (de la variable dependiente con la variable independiente) como inversa (de la variable independiente con la variable dependiente), existentes entre cantidades que tienen capacidad de variación simultánea (Blanton y Kaput, 2004; Warren y Cooper, 2005). Cañadas y Molina (2016) lo definen como "un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (p. 210). Se trata de un tipo particular de pensamiento generalizado que favorece el desarrollo del pensamiento algebraico (p. ej., Payne, 2012) y que es abordado en la Educación Primaria y Educación Infantil, por lo general, mediante tareas que involucran relaciones funcionales de tipo lineal (p. ej., Blanton y Kaput, 2004; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016).

Partimos de dos tipos de relaciones funcionales que presentan Confrey y Smith (1995): correspondencia y covariación. En la relación de correspondencia, la función se asocia a una regla con la que determinar el valor de y, único, de cualquier valor de x dado (p. ej., $y = 2x + 4$ no expresado necesariamente de forma simbólica). Una relación de correspondencia, como un modelo *input-output* (un valor dado a x, como entrada, genera un valor, de salida, para y), es una contribución plausible para entender que las relaciones entre dos conjuntos de números a veces pueden ser expresadas como reglas algebraicas generales. Usualmente, los estudiantes que identifican esta relación abordan cómo ciertos valores en x generan valores de y. Según Confrey y Smith (1995), este tipo de relación produce una dependencia excesiva de las expresiones algebraicas, frente a un descuido del uso de las tablas, en la compresión de la función. En la relación de covariación se entiende la función como la yuxtaposición de dos secuencias relacionadas, cada una de las cuales se genera independientemente a través de un patrón de valores. Vemos aquí una gran conexión entre la relación funcional y los patrones. La covariación muestra como el cambio en una secuencia o patrón, obliga al cambio en el otro (coordinar el movimiento de y_m a y_{m+1} con el de x_m a x_{m+1}). Las tablas de valores facilitan observar la coordinación de la variación en dos o más columnas —según el número de variables involucradas— a medida que nos desplazamos a través de las filas de la tabla. La relación de covariación implica analizar, manipular y comprender las relaciones y cambios simultáneos entre las cantidades variables. Identificar la relación de covariación en las funciones implica una comprensión de la forma en que las variables dependientes e independientes (x e y) cambian simultáneamente. Algunos autores (p. ej., Saldanha y Thompson, 1998) entienden, que para la covariación se ha de construir en la mente la imagen sostenida de dos valores de cantidades de magnitud, simultáneamente. Estos dos tipos de relaciones asociados a la función arrojan luz diferente sobre la relación funcional subyacente común (p. ej., Ayalon, Watson y Lerman, 2015).

2.2 Patrones y generalización

En Educación Matemática se considera patrón a cualquier regularidad predecible que, por lo general, implique operaciones numéricas, espaciales o relaciones lógicas (Mulligan y Mitchelmore, 2013). El patrón viene dado por una regla que expresa una regularidad entre elementos que pueden ser objetos, números o formas geométricas (p. ej., Castro, 1995). La asociación de los patrones con el pensamiento algebraico está garantizada por la presencia, en los patrones, de la abstracción y la generalización. En los primeros niveles educativos la manipulación, descubrimiento y generalización de patrones son actividades vinculadas al álgebra escolar. Los patrones permiten la transición al álgebra mediante el establecimiento de relaciones de tipo funcional (Zazkis y Liljedahl, 2002).

La generalización es un concepto amplio en matemáticas, muy ligado a la inducción. Poincaré (1902) considera la inducción como la vía para llegar al conocimiento en cualquier ciencia y por extensión al conocimiento matemático. "Hay que partir de situaciones particulares y observar regularidades para alcanzar la generalización" (p. 38). La generalización se evidencia cuando los estudiantes perciben un patrón subyacente, incluso cuando no son capaces de representarlo claramente (Castro, Cañadas y Molina, 2010). Implica la afirmación de una propiedad, o técnica, para un gran conjunto de objetos. El alcance de tal afirmación es mayor que el conjunto de casos verificados individualmente; implica un número infinito de casos (por ejemplo, para todo número entero). Kaput (1999) considera que la generalización es

> … extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo de, y entre ellos. (p. 136)

La generalización, imprescindible en álgebra, conlleva inferencia y en ella juega un papel importante la conjetura.

2.3 Antecedentes

Los hallazgos en investigación han arrojado luz sobre las muchas habilidades, capacidades, conocimientos generales y específicos sobre las matemáticas adquiridos por los niños en edades tempranas. La investigación realizada en las últimas décadas con los más pequeños ha incorporado, entre sus intereses, el pensamiento algebraico de los niños, a la par que se investiga sobre pensamiento aritmético. Esto es debido a un cambio de la mentalidad tradicional que entendía que el pensamiento algebraico aparece después de que se haya desarrollo el aritmético (p. ej., Warren y Cooper, 2005). Existen evidencias de que el inicio del pensamiento algebraico surge y se desarrolla a partir de la capacidad de ver y representar patrones y relaciones (p. ej., Warren y Cooper, 2005). Así mismo se sostiene que las matemáticas prácticamente se basan en patrones y estructuras (p. ej., Mulligan y Mitchelmore, 2013).

Estudios llevados a cabo en el contexto del *early algebra* con estudiantes de los primeros cursos de Educación Primaria, han puesto de manifiesto que a estas edades pueden desarrollar diversos modos de pensamiento algebraico, mostrando, entre otras, las siguientes capacidades: (a) usar una variedad de estrategias para resolver problemas asociados a una función lineal (p. ej., Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2016); (b) representar relaciones funcionales lineales utilizando expresiones algebraicas (p. ej., Brizuela y Martínez, 2012); (c) representar datos en tablas, las cuales les permiten sacar conclusiones e, incluso, llegar a hacer generalizaciones (p. ej., Moss y Beatty, 2010); y (d) usar diferentes representaciones para resolver un problema, como tablas, gráficos y ecuaciones, y entender la traducción entre ellas (p. ej., Blanton y Kaput, 2004).

Los estudios centrados en la capacidad de los escolares más pequeños han utilizado, sobre todo, tareas donde el pensamiento funcional se produce generalizando patrones numéricos. Blanton y Kaput, (2004) comprobaron que los estudiantes de cursos elementales son capaces de desarrollar y expresar relaciones de tipo funcional, y describieron el proceso evolutivo que presentan niños de diferentes cursos. Se ha mostrado que los niños poseen ideas intuitivas sobre diferentes relaciones como la dependencia, la causalidad y la variación, que desarrollan a través de observaciones de fenómenos físicos que los rodean (p. ej., Seo y Ginsburg, 2004), también de relaciones entre cantidades que pueden entenderse como covariantes o como correspondencia (Panorkou, Maloney y Confrey, 2014.). Algunos estudios han mostrado que los niños de Educación Infantil describen sus propios patrones, comenzando con la repetición de formas geométricas (Waters y Jilliam, 2004) y, entre las estrategias que utilizan para continuar un patrón, se destaca la recursividad o recurrencia, proceso mediante el cual cada término se obtiene a partir del anterior.

A pesar de los estudios realizados, algunos investigadores (p. ej., Papic y Mulligan y Mitchelmore, 2011) indican que el trabajo por hacer es amplio, quedando muchas preguntas sin respuesta sobre cómo y cuándo el pensamiento algebraico se desarrolla en los años previos a la escolarización formal, o cómo se produce el "salto" desde la simple repetición de patrones a otros contextos matemáticos más sofisticados, o la forma en que estos están vinculados con el pensamiento funcional.

Nuestro trabajo está en línea con la investigación sobre el pensamiento algebraico emergente. Exploramos cómo es el pensamiento funcional en un grupo de escolares del último curso de Educación Infantil (5-6 años). Para ello, nos planteamos los siguientes objetivos de investigación: (a) identificar evidencias de pensamiento funcional en los estudiantes participantes en la investigación y (b) describir el pensamiento funcional mostrado.

3. Método

La metodología adoptada es la de un experimento de enseñanza, en el marco de la investigación de diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Es de carácter exploratorio, a modo de una evaluación de diagnóstico, dentro del primer ciclo iterativo del experimento de diseño.

Trabajamos con un grupo de 12 estudiantes de 5-6 años, en un aula de un colegio privado de Granada. Llevamos a cabo tres sesiones de aproximadamente una hora de duración, en días no consecutivos. Se presentaron y discutieron tres situaciones, las cuales entrañan una relación funcional lineal diferente. Todas las sesiones se desarrollaron con la estructura que describimos a continuación. Una profesora-investigadora presentaba el contexto de la situación e iba formulado preguntas relativas a casos particulares de la función. Según apreciaba que los alumnos entendían lo que se les estaba preguntando, iba aumentando el tamaño de los números propuestos como casos particulares, llegando a preguntar por la generalización y la expresión de dicha relación mediante una letra. Se siguió un proceso inductivo para el planteamiento de las preguntas relativas a la situación, según el modelo de Cañadas y Castro (2007). Las sesiones se desarrollaron con todo el grupo y fueron grabadas con videocámara por un segundo investigador presente en el aula. Estas grabaciones constituyen la información recogida. Las respuestas que obtuvimos son orales, de aquellos estudiantes que participaban voluntariamente respondiendo a las preguntas planteadas. Se aprecia en el visionado de la grabación que hay estudiantes que no participan. La maestra habitual de los alumnos estuvo presente pero no intervino en el desarrollo de las sesiones.

3.1 Diseño

Se diseñaron tres situaciones sobre perros, collares para los perros y platos para comer y beber los perros. Para estas situaciones, se emplearon imágenes de perros, collares y platos en colores que se pegaron en la pizarra. Las situaciones se plantearon en tres sesiones, si bien no coincidió una situación para cada sesión, por ajustes de horario. En la sesión 1 se trabajó la situación 1 y se introdujo la situación 2. En la sesión 2 se culminó la situación 2 y en la sesión 3 se trabajó la situación 3. En la tabla 1 recogemos esta información, caracterizamos las situaciones presentadas a los estudiantes y detallamos la función lineal asociada. Las situaciones están inspiradas en una tarea presentada en el estudio de Blanton y Kaput (2004). Los escolares no disponían de papel ni lápiz.

Tabla 1. *Situaciones, funciones asociadas y ejemplo de pregunta*

Sesión	*Contexto*	*Función*	*Ejemplos de preguntas*
1	Cuidadora de animales. Perros, collares. Materiales mostrados en la pizarra. Presentación de casos particulares donde se ve que se pone un collar a cada perro.	$y = x$	Imaginad cinco perros ¿cuántos collares son necesarios para poner uno a cada perro? ¿Y para cien perros? ¿Cómo sabéis que son cien? ¿Y si son x perros?
1	Cuidadora de animales. Perros, platos de comida. Materiales mostrados en la pizarra. Presentación de casos particulares donde se ve que se dan dos platos de comida a cada perro.	$y = 2x$	Para un perro ponemos dos platos. Para dos perros ponemos cuatro platos. Para Tres perros ponemos seis platos. Y para cuatro perros, ¿cuántos platos son?
2	Cuidadora de animales. (Continuación sesión anterior)	$y = 2x$	Y si son un millón de perros. ¿Cuántos platos? Y si son x perros. ¿Cuántos platos?
3	Cuidadora de animales. Perros, platos de comida y de agua. Materiales mostrados en la pizarra. Presentación de casos particulares donde se ve un plato de comida para cada perro y uno de agua compartido por todos los perros.	$y = x + 1$	Si hay tres perros ¿Cuántos platos son necesarios? Si hay cinco perros ¿Cuántos platos? ¿Cómo lo sabes?

4. Análisis de datos y resultados

Realizamos un análisis, para cada una de las sesiones, de aquello sucedido en las aulas y que tiene interés para la investigación que presentamos. De acuerdo con el marco teórico, y a priori, tomamos en consideración (como categorías) la aparición de: establecimiento de relación funcional y si esta es de correspondencia o de covariación, detección de patrones y estrategia de formación de los mismo y establecimiento de generalización. Recogemos fragmentos de las intervenciones, asignando el código I para la investigadora, E para cualquier estudiante que diera una respuesta individual (no se hace diferenciación entre los estudiantes), y Es cuando se trata de una respuesta dada por varios de ellos.

4.1 Función *y=x*

La investigadora introduce la situación de unos perros a los cuales se les va a poner un collar. Explica al grupo que va poner en la pizarra pegados algunas imágenes de perros y les va a colocar a cada uno su collar. Utiliza dichos perros para proponer los primeros casos particulares —un perro, dos, tres, cuatro—, obteniendo como respuesta uno, dos, tres, cuatro. Estas respuestas son dadas contando los perros (como se percibe del movimiento de los labios y por los gestos de los escolares) que la investigadora ha ido colocando pegados en la pizarra.

La investigadora pide a los estudiantes que digan un número "grande" (elevado). Un estudiante contesta once. A la pregunta de la investigadora "¿cuántos collares son entonces necesarios?", varios alumnos responden once. Se sabe que en esta ocasión ya no han contado pues los once perros no están expuestos en la pizarra.

I: ¿Cómo sabéis que son once collares?
Es: Porque son once perros.
[Ante la petición de que digan números altos que conozcan, un estudiante dice: mil.]
I: ¿Cuántos collares para los mil perros?
E: Pues mil collares.
I: ¿Cómo lo has pensado? ¿Por qué no has dicho dos mil collares?
E: Porque no hay dos mil perros.

Un estudiante dice: "la respuesta siempre es eso" y hace la siguiente afirmación: "si hay veinte mil perros tiene que haber la misma cantidad de collares".

Otro estudiante, ante la petición de decir un número muy grande dice: "hasta el infinito y más allá". La investigadora le pregunta: "entonces, ¿cuántos collares necesitarás?" Y la respuesta del mismo estudiante es: "Hasta el infinito y más allá".

I: ¿Y para "tropecientos" perros?
Es: Tropecientos collares.
I: ¿Y para muchos-muchos-muchos perros?
Es: Muchos-muchos-muchos collares.
I: ¿Y para x perros?
Es: x collares.
I: ¿Y para z perros?
Es: z collares.

Se observa que para los primeros casos particulares los estudiantes responden tras contar los perros que se les van pegando en la pizarra. Señalan con el dedo o siguen con la mirada los perros de la pizarra. Sin embargo, llega un momento a partir del cual ya no cuentan, no solo porque ese número "elevado" de perros no esté presente en la pizarra, sino porque no les es necesario ya que han percibido el patrón.

Cuando se les pide que digan un número elevado, dicen 11, lo cual pone de manifiesto la percepción de algunos estudiantes de "número grande", aunque algunos hablan de miles o millones. Ven evidente las respuestas que dan, sus explicaciones así lo dejan ver cuando se les pregunta "¿por qué no han dicho 2000 collares para mil perros?", respondiendo "porque no hay 2000 perros". También cuando dicen que para 20000 perros necesitan 20000 collares y explican que tiene que ser ese número de collares porque hay 20000 perros.

Un alumno generaliza verbalmente mediante la expresión "debe haber la misma cantidad de collares". Este alumno, hace una generalización de forma espontánea en términos de Pinto y Cañadas (2017) ya que hasta ese momento no se le había hecho pregunta alguna sobre la generalización. Además, destaca que algunos estudiantes, no tienen dificultad en aceptar las letras (x, z) como representantes de cantidades pues en sus respuestas las usan: la investigadora pregunta por los collares necesarios cuando hay x perros y responden que son necesarios x collares.

4.2 Función *y = 2x*

La investigadora introduce la situación mostrando un perro y dos platos pegados en la pizarra y, seguidamente, el caso de dos perros con sus 4 platos. Al colocar tres perros, antes de poner los platos, los estudiantes intervienen indicando que se necesitan 6 platos. Lo que indica que han percibido el patrón. La interacción entre la entrevistadora y los estudiantes se muestra a continuación.

I: ¿Y para cuatro perros?
E: Pues otros dos..., ocho.
I: ¿Por qué?
E: Porque dos, más dos, más dos, más dos, son ocho (lo calcula mentalmente).
E: Porque dos más dos son cuatro, más otro dos son seis, más otro dos son ocho.
I: ¿Y para cinco perros?
E: Diez platos.
I: ¿Cómo lo sabes? (dirigiéndose a un estudiante).
E: He pensado.
I: ¿Por qué diez y no veinte ni ocho?

Un estudiante responde planteando una pregunta.

E: Porque ¿cómo ocho más dos van a ser veinte?
I: ¿Pero cómo habéis llegado al diez?
E: Porque he sumado cinco más cinco. Porque los de agua y los de comida son cinco más cinco.
I: ¿Y para siete perros?
Es: Catorce platos.

Algunos estudiantes se muestran en desacuerdo y por ello un estudiante explica la respuesta dada.

E: Uno, uno y dos; dos, tres y cuatro, cuatro, cinco y seis...doce, trece y catorce (lo calcula mentalmente).
E: Para siete es muy difícil.
I: ¿Y para cien perros?
E: Doscientos platos.
E: Uno, uno y dos; dos, tres y cuatro, cuatro, cinco y seis...doce, trece y catorce (lo calcula mentalmente).

Como algunos estudiantes están despistados, la investigadora vuelve a poner en la pizarra seis perros y doce platos y pregunta.

I: Y si pongo un perro más, ¿cuántos platos necesito?
Es: Catorce.
I: ¿Cómo lo has hecho? (dirigiéndose a un estudiante).
E: Porque dos más dos son cuatro, dos más dos son cuatro, dos más dos son cuatro y dos más dos son cuatro.
I: ¿Y para mil perros?
E: Dos mil platos.
I: ¿Y para un millón de perros?
Es: Dos millones de platos.
I: ¿Cómo lo sabéis?

E: Porque hay que ponerle dos platos a cada perro.
I: Y para el infinito y más allá.
E: Infinito dos, más allá.
E: Infinito más allá, dos.
I: Y para x perros, ¿cuántos platos?
E: Cero patatero, no existe ese número.

En este caso el patrón es percibido con rapidez por algunos estudiantes: el doble, aunque en ese momento no lo expresan. Para calcular el resultado en el caso de cuatro y cinco perros, algunos razonan de forma recurrente sumando dos al caso anterior, ya sea partiendo del resultado del caso particular previo o realizando la suma reiterada. Un estudiante dice que consigue 10 sumando 5 + 5, cinco de agua y cinco de comida.

Algunos estudiantes no entienden los resultados para los casos particulares de 4 y 5 perros. Al mostrarles con el material hasta 4 perros, logran responder correctamente para 5 perros y al presentarles 5 perros y 10 platos en la pizarra, responden correctamente para 6 perros. Para este caso algunos estudiantes lo hacen contando y dan la respuesta correcta (doce).

A partir de los seis perros, algunos muestran dificultades. Pensamos que parte de los que responden adecuadamente para 7 y 8 perros, obvian el conjunto inicial, se fijan solo en el conjunto final y razonan por recurrencia, sumando 2 al número anterior. Un caso específico, en el que una niña va haciendo grupos de 4 conforme va aumentando el número. Para 8 perros, se necesitan 16 platos. Parece que usa esa estrategia porque dice "le es más fácil sumar".

Cuando se les pregunta por 10 perros, varios estudiantes responden rápido que se necesitan 20 platos. Claramente, no les ha dado tiempo a hacerlo por recurrencia, lo que nos induce a pensar que han sumado diez más diez o conocen el hecho numérico de esa suma. Un estudiante responde que, para 100 perros, necesita 200 platos, y para 1000 perros, necesita 2000 platos. Para un millón de perros, dos millones de platos. Para mil millones de perros, dice dos mil millones de platos. Consideramos que este estudiante ha establecido la relación de poner el dos delante del número dado de perritos. Otros niños se muestran acuerdo y dan las mismas respuestas. Uno explica "porque hay que ponerle dos platos a cada perro".

Ante la pregunta "¿para hasta el infinito y más allá perros?", ya no ven donde han de colocar el número 2: uno responde "hasta el infinito dos y más allá platos"; otro "infinito y más allá dos". Para "¿muchos perros?", reconocen que son más platos que perros. Un alumno dice que necesitamos "dos más". En este caso, cuando se les pregunta por "x perros", dicen que eso no existe.

Entendemos que cuando van sumando dos cada vez que se aumenta un perro se está más cercano a la idea de covariación. En el caso de dos veces el número de perros la relación se acerca más a la correspondencia y esta se mantiene cuando se habla de números grandes como cien o mil. El pensamiento operacional mostrado, en los dos casos, es aditivo, no aparece el multiplicativo, se pone de manifiesto cuando dicen que para "hasta el infinito y más allá perros" son necesarios "hasta el infinito dos y más allá platos, o que para muchos perros "necesitamos dos más". Contrariamente a lo que ocurre en la función $y = x$ no admiten el uso de las letras como representantes de cantidades.

4.3 Función *y* = *x* + *1*

La investigadora explica que cada perro tendrá un plato para comida y que habrá un solo plato con agua para todos. Pone en la pizarra un perro y un plato para comida y otro para agua. Después dos perros con dos platos de comida y un solo plato de agua. Los estudiantes cuentan y explican lo que la investigadora reproduce en la pizarra.

I: Si hay tres perros, ¿cuántos platos?
E: Cuatro.
I: Si hay cuatro perros, ¿cuántos platos?

Ningún estudiante responde y la investigadora da la respuesta.

I: Dime tu número favorito.
E: El diez.
I: Y si son diez perros, ¿cuántos platos necesitamos?
E: Once (responden tras pasar unos segundos).
I: ¿Por qué son once?
E: Porque cinco más seis son once.
E: Porque sumando cinco más cinco, más uno, son once (presenta los dedos de la mano).
I: Y para siete perros, ¿cuántos platos?

Los estudiantes no responden y la investigadora pone siete perros con sus platos de comida y el de agua en la pizarra y muestra la cantidad, si bien no dice cuántos son.

I: Y si fueran ocho perros, ¿cuántos platos necesitaríamos?
E: Nueve.
I: ¿Cómo lo has pensado?
E: Porque hay un plato de agua.
I: ¿Y si son diez?
E: Once, pues si diez de comida y uno más de agua, pues entonces son once.
I: Si hay doce perros ¿Cuántos platos?
E: Trece.
I: ¿Por qué?
E: Porque doce más uno.
E: Porque he pensado.

Una estudiante dice: "no tengo ni idea" y la investigadora vuelve a los casos en lo que el número de perros es menor y los va poniendo en la pizarra, hasta que termina la sesión.

Esta sesión ha aportado menos información que las anteriores. Muchos estudiantes decían no entender. Creemos que una de las causas posibles sea achacable a que los estudiantes estuviesen cansados pues las respuestas no eran espontáneas. Otra de las posibles causas puede estar en que la función entraña más dificultad que las anteriores. Puede ser también que no entendieran por qué número se les preguntaba (si entraba o no en el resultado el plato para el agua). No obstante, algunos estudiantes (muy pocos) descubren el patrón de tomar el mismo número de platos que de perros y sumarle uno, que estaría más próximo a la covariación que a la correspondencia.

5. Conclusiones

Con esta investigación hemos puesto en evidencia que algunos niños de 5-6 tienen desarrolladas ideas intuitivas de relaciones funcionales lineales, más profundas en el caso de la función identidad y menos cuando se consideran las relaciones funcionales $2x$ y $x+1$. Así mismo se ha puesto de manifiesto que unos niños perciben relaciones funcionales de correspondencia y otros de covariación. Creemos que, en algunos casos, los estudiantes perciben solo el patrón de variación de la variable dependiente, usando la recurrencia para responder a la pregunta planteada. El pensamiento operacional de estos estudiantes es aún aditivo, lo que no les permite la expresión de la relación "doble", como producto de la cantidad inicial por dos y se pierden al colocar ese número 2 cuando no es una cantidad accesible, como lo es para ellos la unidad seguida de ceros. Somos muy cautelosas al hablar de nuestros resultados, por los pocos estudiantes con los que hemos trabajado y por el escaso número de sesiones implementado. No obstante, los sumamos a las evidencias obtenidas por Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest (2006) sobre lo que los estudiantes de corta edad pueden hacer en relación a ideas algebraicas que normalmente no aparecen en el currículo matemático infantil, por entender que no están al alcance de los niños. Además, el conocimiento obtenido tanto de las respuestas de los estudiantes como del desarrollo de las sesiones, nos permite diseñar un nuevo ciclo del experimento de enseñanza para seguir explorando en este campo.

La importancia del razonamiento en el desarrollo matemático de los niños es destacada por los investigadores, así como que un razonamiento matemático eficaz implica la capacidad de observar patrones y estructuras, tanto en situaciones de la vida real como en objetos simbólicos, ya que permite la formación de generalizaciones (Mulligan y Mitchelmore, 2013). Poco a poco se va alcanzado consenso sobre que los estudiantes pueden aprender y deben ser expuestos a ideas algebraicas a la vez que desarrollan sus habilidades de cálculo. Esto requiere fundamentalmente un cambio en la forma de trabajar la aritmética. Aceptando que la generalización es el núcleo del pensamiento algebraico, las operaciones aritméticas pueden tratarse como funciones, esto es, relaciones en las que intervienen cantidades que varían y números (Carraher et al., 2006). Los maestros de Educación Infantil deben guiar a los niños a establecer conexiones de ideas dentro de las matemáticas, así como con otras materias. Para ello, el trabajo con patrones es recomendable para estudiar regularidades y relaciones a través de una variedad de experiencias apropiadas y estrategias de enseñanza basadas en la investigación. Los currículos para maestros de Educación Infantil deben incluir atención al componente del pensamiento funcional, a través del trabajo con patrones. Es también conveniente que los maestros en ejercicio tengan la oportunidad de un desarrollo profesional continuo, para que los resultados de nuevas investigaciones lleguen al profesorado, lo cual apoyaría una educación matemática infantil de alta calidad.

Agradecimientos
Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Ayalon, M., Watson, A. y Lerman, S. (2015). Functions represented as linear sequential data: relationships between presentation and student responses. *Educational Studies in Mathematics, 90*(3), 321-339. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9628-9

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Brizuela, B. M. y Martínez, M. V. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En M. Carretero, J. A. Castorina y A. Barreiro (Eds.), *Desarrollo cognitivo y educación: procesos de conocimiento y contenidos específicos* (Vol. 2, pp. 263-286). Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Cai, J. y Knuth, E. (2011). Preface to Part I. En Autores (Eds.). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 3-4). Nueva York, NY: Springer.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41,* 87-103. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorization for analyzing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Castro E., Cañadas, M. C. y Castro-Rodríguez, E. (2013) Pensamiento numérico en edades tempranas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(2), 1-11.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento Inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 54*, 55-67.

Castro, E. y Castro, E. (2016). Matemáticas en Educación Infantil. En E. Castro y E. Castro (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil* (pp. 21-41). Madrid, España: Pirámide.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 461-556). Nueva York, NY: Information Age.

Clements, D. H., Baroody, A. J. y Sarama, J. (2013). Background research on early mathematics. *National Governor's Association, Center Project on Early Mathematics*. Descargado de http://www.nga.org/files/live/sites/NGA/files/pdf/2013/1311SEME-Background.pdf

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Covariation and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 66-86. https://doi.org/10.2307/749228

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

Moss, J. y Beatty, R. (2010). Knowledge building and mathematics: Shifting the responsibility for knowledge advancement and engagement. *Canadian Journal of Learning and Technology, 36*(1), 1-33. https://doi.org/10.21432/T24G6B

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. C. (2013). Early Awareness of Mathematical Pattern and Structure. En L. D. English y J. T. Mulligan (Eds.). *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp, 29-45). Nueva York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8_3

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 365-375). Málaga, España: SEIEM.

NAEYC/NCTM (2002). *Early childhood mathematics*. National Association for the Education of Young Children. Consultado 24/04/2017, en https://www.naeyc.org/files/naeyc/file/positions/psmath.pdf

NCTM (2009). *Mathematics in early childhood learning*. Consultado 24/04/2017 en http://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Position-Statements/Mathematics-in-Early-Childhood-Learning/

Panorkou, N., Maloney, A. P. y Confrey, J. (2014). *Expressing Covariation and correspondence relationships in elementary schooling*. Trabajo presentado en NCTM Research Conference, 7-9 Abril de 2014, Nueva Orleans. Descargado de https://nctm.confex.com/nctm/2014RP/webprogram/ExtendedAbstract/Paper1940/EQX_NCTM_040314%20.pdf

Papic, M. M., Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237-269. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Generalization in fifth graders with a functional approach. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 49-56). Singapur, Taiwan: PME.

Payne, N. T. (2012). *Tasks that promote functional reasoning in early elementary school students*. Tesis Doctoral. The University of North Carolina, Carolina del Norte.

Poincaré, H. (1902). *Science and Hipótesis*. Nueva York: Dover. (Traducción al castellano: A. B. Besio, y J. Banti, J., 1963, La ciencia y la hipótesis. Madrid, España: Espasa-Calpe.

Saldanha, L. y Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En S. B. Berenson y W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education-North America* (Vol 1, pp. 298-304). Raleigh, NC: PME-NA.

Seo, K. H. y Ginsburg, H. P. (2004). What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education? Lessons from new research. En D. H. Clements, J. Sarama y A. M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 91-104). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162. https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5

Waters, F. y Jillian L. (2004). A study of mathematical patterning in early childhood settings. En I. Putt, R. Faragher y M. MacLean (Eds), *Proceedings Mathematics education for the 3rh millennium: Towards 2010. The 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 321-328). Townsville, Australia: MERGA.

Zazkis R. y Liljedahl P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379-402. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178

Encarnación Castro. Doctora en Matemáticas por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Catedrático de Universidad en la Universidad de Granada. Su tarea docente está dirigida a la formación de maestros de infantil y primaria. Su investigación se centra en el ámbito del pensamiento numérico y algebraico. Es miembro del grupo de investigación FQM-0193 "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" (http://fqm193.ugr.es/). Web personal: http://wdb.ugr.es/~encastro/
Email: encastro@ugr.es

María C. Cañadas. Profesora Titular del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Doctora en Didáctica de la Matemática. Su docencia se centra en asignaturas de Didáctica de la Matemática en programas de formación de futuros maestros y profesores de matemáticas, y profesores de matemáticas en ejercicio. Es coordinadora del Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Es miembro del grupo de investigación FQM-0193 "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" (http://fqm193.ugr.es/). Sus líneas de investigación son el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico, en la que actualmente es investigadora principal de dos proyectos de investigación I+D del Gobierno de España. Es editora asociada de Infancia y Aprendizaje (http://www.tandfonline.com/loi/riya20). Sus publicaciones en acceso abierto están disponibles en: http://is.gd/AYjP6Y.
Email: mconsu@ugr.es

Marta Molina González. Doctora y profesora titular en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada. Su tarea docente está dirigida a la formación de maestros de primaria y de investigadores en Didáctica de la Matemática. Su investigación se centra en el ámbito del pensamiento numérico y algebraico. Es miembro del grupo de investigación FQM-0193 "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" (http://fqm193.ugr.es/).
Email: martamg@ugr.es