Relime Vol. 1, Núm. 1, marzo1998 pp.5-21

Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes

Ismenia Guzmán R.[1]

RESUMEN

Este estudio considera como referencia el enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de nociones matemáticas, en particular algunas propiedades de funciones. Este enfoque ha sido desarrollado por Raymond Duval y se apoya en la noción semiótica de registro. Se consideraron registros gráfico, algebraico (o formal) y lengua natural con los estudiantes de primer año de ingeniería, respecto a nociones relativas a funciones reales y el sentido que estas nociones cobran para ellos. Un análisis de las respuestas de los estudiantes revela que están dadas en un solo registro, sin coordinar explícitamente dos o más. Las respuestas se quedan en el registro en el cual está planteada la pregunta, o recurren al registro algebraico, con frecuencia privilegiado en las clases.

ABSTRACT

This study takes as a reference the cognitive focus based on the registers of semiotic representation and its impact on the learning of mathematical notions, in particular some properties of functions. This focus has been developed by Raymond Duval and is based upon the semiotic notion of register. We have considered graphical, algebraical (or formal) and natural language records with first-year students of engineering, with respect to notions of real functions and the meaning that these notions have for them. The analysis of students' responses revealed them to be in only one register, without coordinating explicitly two or more. Often the responses stay in the register in which the question was asked, or resort to the algebraic register.

RÉSUMÉ

Cet étude considère comme référence l'approche cognitif basé sur les registres de représentation sémiotique et son éventuel rapport avec l'apprentissage des notions mathématiques, en particulier certaines propriétés de fonctions. Cet approche a été développé par Raymond Duval et s'appui sur la notion sémiotique de registre. On été considérés des registres graphique, algébrique (ou formel) et la langue première avec les étudiants de première année dans les formations des ingénieurs, en rapport avec des notions relatives aux fonctions réelles ainsi qu'au sens de ces notions. Une analyse des réponses des étudiants révèle que celles-ci ont été assemblés dans un seul registre, sans coordonner explicitement deux ou plus. Les réponses se restent dans le registre où la question a été posée, ou font appel au registre algébrique, souvent privilégié dans les cours.

Este estudio considera como referencia el enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de nociones matemáticas, en particular algunas propiedades de funciones. Este enfoque ha sido desarrollado por Raymond Duval y se apoya en la noción semiótica de registro. Un registro está constituido por signos en el sentido más amplio de la palabra: trazos, símbolos, íconos... y estos signos están asociados de

[1] Profesora titular de la Universidad Católica de Valparaíso

manera interna y externa; de manera interna, según los lazos del contexto y de pertenencia a una misma red semántica; y de manera externa, según las reglas de combinación de signos en expresiones o configuraciones; estas reglas son propias de la red semántica involucrada. En consecuencia los registros son medios de expresión y de representación caracterizados precisamente por sus respectivos sistemas semióticos.

Nuestro objetivo es poner en evidencia el rol que juegan los registros de representación en las respuestas de los estudiantes, dado que distinguir y coordinar distintos registros es una actividad necesaria y natural en matemáticas. Estas actividades deberían constituir objetivos pedagógicos en la enseñanza de la matemática; sin embargo, las respuestas de los estudiantes estrechamente relacionadas con la enseñanza recibida, dejan ver que ésta no ha puesto suficiente énfasis en la relación existente entre los índices significativos de las distintas representaciones de las nociones tratadas. Por otra parte, la distinción y coordinación de registros son fundamentales para el desarrollo del pensamiento, idea central en el enfoque cognitivo mencionado, ha sido la perspectiva de análisis para numerosas investigaciones en didáctica de la matemática, en Estrasburgo, en el equipo de François Pluvinage y Raymond Duval desde hace unos 10 años.

I. Aspectos teóricos

Según Duval (1996), hay al menos dos características de la actividad cognitiva implicada en las estrategias matemáticas. Por una parte se recurre a varios registros de representación semiótica, algunos de los cuales han sido específicamente desarrollados para efectuar tratamientos matemáticos; y por otra, los objetos matemáticos no son accesibles mediante la percepción, como ocurre con la mayoría de los objetos en las otras disciplinas.
A partir de aquí, Duval plantea dos interrogantes claves en relación con el aprendizaje: ¿cómo aprender a cambiar de registro? y ¿cómo aprender a no confundir un objeto con la representación que se hace de él?
Puesto que una estrategia matemática combina generalmente tratamientos y conversiones, la diferenciación funcional de registros de representación y la coordinación entre ellos constituyen los dos puntos claves para el aprendizaje.
El traslado entre registros no se efectúa espontáneamente a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada, pero puede ser un obstáculo serio cuando no hay congruencia. En efecto, en el traslado entre registros se trata de la confrontación de representaciones de naturaleza diferente de un mismo objeto. Este traslado da lugar a fenómenos de congruencia y no congruencia semántica. Cuando hay congruencia, el traslado puede ser trivial, por ejemplo: Dada la gráfica de la función $f(x) = x$, se ve en el dibujo una recta que es la bisectriz del primer cuadrante. Ante una pregunta sobre la monotonía de esta función, se responde que se trata de una función creciente y la mayoría de los estudiantes tienen éxito, pues hay aquí un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la percepción de la noción de crecimiento asociada con el hecho de que la gráfica sube.
Pero cuando no hay congruencia, la tarea puede ser muy difícil y no accesible para muchos estudiantes. Por ejemplo, si pensamos en una función $f(x) = x^2$ cuya representación gráfica es una parábola centrada y se pide dibujar la parábola que representa a la función $f(x) = (x+1)^2$, muchos estudiantes fracasan debido a que se trata de una parábola que está trasladada a la izquierda de la dada y con vértice en el punto de coordenadas (-1.0). El estudiante ve el signo más de la expresión y dibuja la parábola a la derecha de la dada. Este ejemplo es de las tareas fáciles relativas a fenómenos de no congruencia, pues contempla un traslado del registro algebraico al gráfico.
Para el éxito de la coordinación de registros es esencial la discriminación de unidades o de valores pertinentes a la representación semiótica. R. Duval sostiene que las representaciones semióticas son aquellas en las cuales la producción no puede hacerse sin la movilización de un sistema semiótico: así las representaciones semióticas pueden ser producciones discursivas (en lenguaje natural, en lenguaje formal) o no discursivas (figuras, gráficos, esquemas...). Esta producción no responde únicamente o necesariamente a una función de

comunicación: puede responder también a una función de objetivación o a una función de tratamiento.
Según el autor citado, para comprender la producción de las representaciones semióticas hay que tomar en cuenta tres aspectos: *el aspecto estructural* relativo a la determinación de la significación de los signos y de las posibilidades de representación que ofrecen; el *aspecto fenomenológico* relativo a las exigencias psicológica de producción o de aprehensión de los signos y el *aspecto funcional* relativo al tipo de actividad que los signos permiten llevar a cabo.
Por otra parte, el objeto representado no debe confundirse con el contenido de la representación, pues el contenido de la representación depende en parte de la forma, en la medida en que el "contenido" es lo que el registro utilizado permite presentar explícitamente del objeto representado. Por ejemplo, la ecuación de una parábola y el gráfico de la parábola se refieren al mismo objeto matemático, pero no tienen exactamente el mismo contenido puesto que no dan cuenta de las mismas propiedades del objeto.
En el párrafo sobre estructura de multirregistro de la representación y actividad conceptual, Duval afirma que la diversificación de los registros de representación semiótica es la constante del desarrollo de los conocimientos tanto desde el punto de vista individual como del científico y del cultural. La importancia para el funcionamiento del pensamiento, generalmente se explica por las dificultades o limitaciones que encuentra la función de comunicación que existe entre los registros (Duval ,1995).
Más adelante, en la misma obra, el autor plantea la pregunta ¿la actividad conceptual implica la actividad semiótica o es independiente? Según él, las respuestas a esta pregunta, implícita o explícitamente comandan la orientación y las decisiones didácticas para el aprendizaje de las matemáticas y para la comprensión de textos en lengua natural.

La respuesta más frecuente sostiene que la actividad conceptual no depende de la actividad semiótica, por tres razones:

La primera tiene que ver con la diversidad misma de los registros de representación: para formar la representación de un objeto o transformarla. Es posible cambiar de registro y entonces "elegir" el más económico o el más potente.

La segunda se refiere a que el funcionamiento del pensamiento parece movilizar un solo registro de representación cada vez. La consideración de varios registros se justificaría solamente en situaciones en que un cambio de registro se hace necesario por cuestiones de tratamiento.

La tercera razón se refiere a la estructura misma de la representación de acuerdo con la relación que liga al representante con el representado (el representado es un objeto real que puede ser percibido; el representante evoca "objetos ausentes"). La comprensión de una representación en un registro determinado parece implicar directamente la comprensión del contenido conceptual representado, sobre todo cuando el registro de representación es la lengua natural.

En contra de estas razones existe, sin embargo, la persistencia del fenómeno de bloqueos de registros y su estrecha relación con dificultades de comprensión conceptual, las cuales se manifiestan principalmente por el fracaso de la conversión en caso de no congruencia y por la ausencia de transferencia de conocimientos fuera de los sistemas estándares de aprendizaje.
Estos fenómenos conducen a vislumbrar otra respuesta: la actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación. Es necesario, dice Duval, que un sujeto alcance el estadio de la coordinación de representaciones semióticamente heterogéneas, para que pueda discriminar al representante y al representado o a la representación y el contenido conceptual que esta representación expresa, solicita o ilustra.

II. El estudio: Trabajo en terreno y Análisis

Se considerarán los siguientes registros: gráfico, algebraico (o formal) y lengua natural. Constataremos su presencia en las respuestas de estudiantes de primer año de ingeniería, respecto a nociones relativas a funciones reales y el sentido que estas

nociones cobran para ellos.
Un cuestionario de 16 ítems fue aplicado a 75 estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial de primer año de la universidad (de 18 a 19 años), independientemente del curso mismo. A continuación examinaremos cuatro preguntas y sus respectivas respuestas.

Las preguntas son conceptuales, se refieren a función continua, función biyectiva, restricciones; son relativamente sencillas, no las más habituales en los cursos pero responden al propósito del estudio: constatar la presencia de los registros mencionados en las respuestas de los estudiantes. El análisis se hará por pregunta y en términos de los registros involucrados.

Pregunta 1

Dé un ejemplo que explique el concepto de continuidad que usted tiene.

Ésta es una pregunta abierta, formulada en el registro del lenguaje natural, que permite recoger el conocimiento que ha internalizado el estudiante, las representaciones de la función continua que maneja, qué registros pone en juego y en qué medida los conocimientos matemáticos de los estudiantes se quedan como saberes especializados o pasan a formar parte de su saber cultural.

Obtuvimos 37 ejemplos aceptables:

1. Una clase de respuestas (18 estudiantes) recurre *al lenguaje natural* y se reagrupan en cuatro modalidades. [1]

Modalidad 1: escriben simplemente las palabras *seno, sinusoide o sen x:*

35: *La función seno.*
47: *Una sinusoide.*
57:*Lla onda del seno, o coseno.*
32: *Sen*(*x*), *todas las funciones trigonométricas son continuas.*
68: *Sen x.*

Estos ejemplos parecen asociar una visualización intuitiva de la gráfica (cartesiana) de esas palabras.

Modalidad 2: se refiere a la función *seno* o *sen x* como función continua con referencias implícitas a su gráfico:

26: *Por ejemplo, el seno es una función continua en todo su dominio* (*todas las funciones trigonométricas son continuas cuando sus gráficos no se cortan*).
67: *Un ejemplo sería la función sen x que es constante en todos los R y no tiene saltos entre un punto y otro.*

Modalidad 3: se apoyan en la palabra *polinomio:*

09: *Polinomios.*
18:*Los polinomios.*
42: *Un ejemplo de continuidad son los polinomios.*
46:*La continuidad son funciones que no tienen ningún tipo de perforaciones y no se indefinen en ningún punto, ejemplo: los polinomios.*

---

[1] El número de la izquierda designa el número que identifica al alumno.

En esta modalidad, la representación es de tipo algebraico, aunque escriben “polinomios” en lugar de funciones polinómicas y la 46, al parecer, deja ver una visualización de sus representaciones gráficas.

Modalidad 4: Los alumnos hacen referencia a un gráfico:

10: *La recta.*
11:.*Por ejemplo la línea recta definida por la ecuación* $x+y=8$, *está en un dominio R, tiene infinitas soluciones y es continua en R..*
21: *El gráfico de una recta constante. Ejemplo:* $y=3$
25: *Ejemplo: una analogía graficable por una función exponencial, el crecimiento de una colonia de bacterias en un periodo de tiempo.*
59: *La gráfica del seno, coseno, las parábolas también son continuas.*
61: *La gráfica de* $y=\frac{x+1}{x}$ *no es continua ya que en* $x=0$ *la función no está definida.*
73: *La gráfica de* $f(x)=x^2$

Como puede constatarse, las referencias gráficas son implícitas, son más bien visualizaciones intuitivas de las gráficas que designan en lenguaje natural, por ejemplo, el alumno 10, el 25 y el 59; o en lenguaje algebraico (formal) como el 73 y el 61. Los alumnos 11 y 21 apoyan el lenguaje natural con el algebraico.

2. Una segunda clase de respuestas (13 estudiantes) recurre *al registro algebraico* y se presentan dos modalidades:

Modalidad 1: dan una fórmula para $f(x)$. Veamos algunos ejemplos:

04: $f(x)=x+2$ *;* $g(x)=|x|$
06: $f(x)=F(x)=\frac{x}{x+2}$, *función continua en R* -{1}
24: $f(x)=\frac{2x+1}{x}$, *la función no es continua cuando* $x=0$
30: $F(x)=1$, *x perteneciente a R..*
31: $y=x^2$ *,es continua en todo su dominio.*
41: *"* $f(x)=\frac{1}{x}$ *tiene una discontinuidad en* $x=0$, *porque la función se va al infinito en ese punto.*
55: $f(x)=x^2$ *, es continua en todos los reales, puesto que no se indefine.* $f(x)=\frac{1}{1-x}$ *tiene una discontinuidad en* $x=1$ *y* $x=-1$, *luego mediante el concepto de límite hay que verificar si sus discontinuidades son reparables".*
60: *Sí lim* $f(a)=f(a)$. *Ej.* $f(x)=\frac{x+2}{x^2-4}$ *en esta función se tiene que analizar discontinuidad en* $x=2$ *y* $x=-2$*".*
62: *La función* $y=x^2-1$ *no se indefine ni se corta en su dominio R, está formada por un solo trazo.*

En estos ejemplos las explicaciones que dan los alumnos pertenecen al registro algebraico, incluyendo las escasas justificaciones, cuando las hay, con excepción de las respuestas de los alumnos 41 y 61 que implícitamente aluden a una visualización.

Modalidad 2: dan una expresión algebraica, pero no una fórmula. Ejemplos:

8: x^3.
13: |*x*| *es una función continua no se corta.*
19: *x^2 +3x+2 es una función continua en todo su dominio ya que los polinomios son continuos".*
41: *Por ejemplo:* $\frac{x}{x-1}$ *en x = 1 y continua en todos los demás números reales, pues su gráfico sólo se corta en x = 1.*

Aquí observamos también que las explicaciones proporcionadas por los alumnos pertenecen al registro algebraico con las excepciones de los alumnos 13 y 41 que hacen referencias al gráfico.

3. En la tercera clase de respuestas, los alumnos *no dan ejemplo* (13 estudiantes) pero tratan de explicar cuándo una función es continua, se encuentran cinco modalidades: veamos sus explicaciones:

Modalidad 1:

01: *Una función es continua en un punto cuando está definida en ese punto.*
14: *Cuando una función no se indefine en ningún punto.*
48: *Cuando una función es continua está definida para todos los reales.*

Este tipo de respuesta en lenguaje natural, contiene la concepción incompleta de función continua que tiene gran parte de los estudiantes.
El aspecto conceptual que retienen es que la continuidad de una función en un punto, se reduce a que la función esté definida en ese punto.

Lo que los alumnos responden se acerca a la concepción que tenían los matemáticos del tiempo de Descartes, quien eliminó de su geometría las curvas que no eran continuas. Este hecho revela la existencia de cuestiones epistemológicas que es necesario tener en cuenta.

Modalidad 2: Las respuestas de los alumnos contemplan otro aspecto conceptual, aislado del anterior, referido a la existencia de los límites laterales. A continuación se consignan:

03: *Sea f*(*x*) *función y c en f*(*x*)*, si los límites laterales de éste son iguales entonces es continua.*

Pensamos que este estudiante alude a la continuidad de f en c, lo que significa que la continuidad de f en c la reduce a la igualdad de los límites laterales.

12: *Es continua cuando en f*(*x*) *sus límites laterales son iguales.*
27: *Los límites laterales cuando x tiende a un punto son iguales y también es igual al límite evaluado en ese punto.*

Se podría asumir que el estudiante 27 da dos condiciones para la continuidad de una función f en un punto: la igualdad de los límites laterales y que este límite es igual al valor de la función en ese punto. Aun cuando le faltó explicar que "ese punto" debe pertenecer al dominio de la función, esta respuesta, en los aspectos teóricos, es más completa que las anteriores.

Modalidad 3: hace referencia a la representación gráfica interpretando el "no se corta".

33: *Cuando una función no está cortada en ninguna parte, o sea, el límite por la derecha y por la izquierda son iguales.*

Este estudiante interpreta el “no está cortada” por la igualdad de límites laterales.

44: *Que la función no se corte por ningún lado de su recorrido.*

Este estudiante identifica a la gráfica con la función. Cuando dice “que la función no se corte” no distingue el objeto representado de la representación. Al agregar “por ningún lado de su recorrido” aparentemente está aludiendo a la existencia de imagen para cada punto.

Modalidad 4: son explicaciones más ingenuas, en lenguaje natural, y tácitamente con referencias gráficas:

15: Una función que se dibuja con una sola línea.
50: *Algo es continuo cuando no se interrumpe la gráfica de la función.*
72: *Una continuidad me da un gráfico de una línea o curva sin levantar la mano.*

Se ha podido constatar, por otra parte, que para varios estudiantes la continuidad de una función se reduce al hecho que se pueda dibujar su gráfica “sin levantar el lápiz”.

Modalidad 5: Otras respuestas intentan dar un criterio para determinar la continuidad de una función en un punto:

36: *Si tú tienes un punto x* (*punto de acumulación*) *se debe estudiar la continuidad calculando el límite.*
39: *Un* x_0 *, determinar si es continua analizando por límites, acercándose por la derecha e izquierda.*

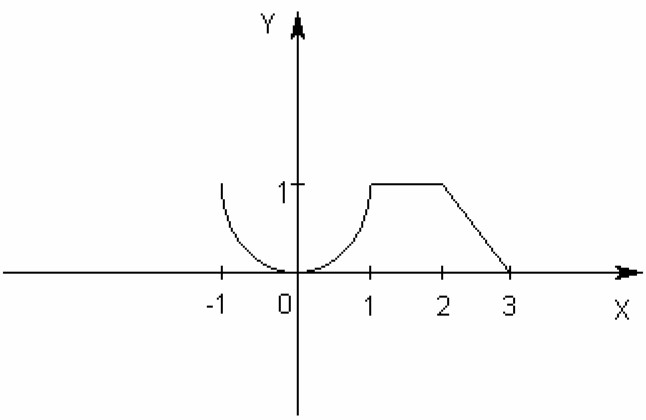
Estos estudiantes intentan dar explicaciones tomando en cuenta la teoría, tal vez con alguna visualización, tal es el caso del estudiante 36 que escribe “punto de acumulación”, o cuando el 39 afirma “acercándose por la derecha e izquierda”.
Las respuestas anteriores muestran que los estudiantes no aplican el concepto formalizado tratado en clases. Éste se les ha explicado a través de la definición formal, conocida por su complejidad.
En general esta definición se da en lenguaje formal y se ilustra gráficamente, pero no se traduce al lenguaje natural. La dificultad de la comprensión de esta definición está en su estructura y en su funcionamiento[2]. Después de la definición, la noción de continuidad se operacionaliza dándose el criterio para la continuidad de f en x_0 . (x_0 en el dominio de *f*, límite de *f* cuando *x* tiende a x_0 debe ser igual al valor de f en x_0). De este criterio los estudiantes no retienen la simultaneidad de las condiciones, las cuales en conjunto traducen el hecho de que la gráfica de la función no se corte.
Cuando se tratan discontinuidades y se estudia la posibilidad de remediarlas, no se hace el suficiente hincapié en la coordinación de los registros gráfico y algebraico (o formal). Cuando los alumnos ven un corte en la gráfica de una función creen que basta definir la imagen para remediar la continuidad, o si la función no tiene límite creen que siempre se puede redefinir uno.
A partir de lo anterior, surge la necesidad de encontrar una explicación a las siguientes preguntas: ¿Se trata el tema demasiado rápido sin tener en cuenta el aspecto epistemológico mencionado y los alumnos no alcanzan a captar el significado gráfico de las nociones teóricas? ¿Se les pide buscar contraejemplos que los ayuden a acercarse mejor al concepto?

Una posible explicación podría ser que en clases se descuida el vocabulario y la discriminación entre las unidades pertenecientes a registros distintos. Esto no está referido al rigor del lenguaje matemático sino a la necesidad de distinguir las representaciones de los objetos representados, distinción que mejoraría la expresión de los estudiantes y la redacción de sus respuestas.

[2] Cf. Duval, 1995, p. 171

Pregunta 2

Dada la función *f* cuya representación gráfica está dada por



¿es *f* continua en el punto de abscisa $x=3/2$?

Esta pregunta está planteada en el registro gráfico, y pretende que a partir del gráfico los estudiantes respondan si la función es continua en el punto dado, es decir que reconozcan que la función es continua en el punto de abscisa $x=3/2$ y puedan explicar este hecho.
Es parte del contrato didáctico que las respuestas en matemáticas se explican o se justifican. La pregunta obliga al estudiante a exhibir en su explicación la comprensión que tiene del concepto de continuidad en punto y su acercamiento real a la comprensión de la definición estudiada en clases. En las respuestas hemos encontrado diversas clases de expresiones para justificar la propiedad

1. Una primera clase de respuestas dice **“la imagen del 3/2 está definida”** (22 estudiantes). Algunos utilizan el lenguaje natural y aparecen las nociones de dominio de una función e imagen de un elemento. El estilo de estas respuestas es:

01: *Sí, porque para el x existe el y.*
11: *Sí , porque su imagen es* 1.
55: *Sí, está definida en el intervalo.*
62: *x = 3/2 está en el dominio de f.*
66: *Sí, ya que pertenece al dominio de f.*
25: *Sí, porque dado un elemento del dominio existe el reflejo o resultado y además este está dentro del rango esperado en el desarrollo de la función, o sea se sucede, en la gráfica no se rompe.*

Éstas son respuestas escuetas que dan cuenta de una lectura gráfica que interpreta las nociones teóricas de imagen y preimagen.

Implícitamente las siguientes respuestas aluden a la existencia de la imagen

12: *Sí, porque no hay un punto indefinido.*
63: *Sí, el punto pertenece a la gráfica.*

Otros emplean un lenguaje algebraico y escriben:

06: $f(3/2) = 1$

En esta clase los alumnos interpretan el gráfico movilizando las nociones teóricas de imagen y preimagen. Aunque a veces lo hacen implícitamente, el lenguaje utilizado es una mezcla entre el natural y el formal, pero da cuenta de una comprensión de las nociones mencionadas.

2. Una segunda clase de respuestas dice *"no se corta el gráfico"* (13 estudiantes). encontramos tres modalidades:

Modalidad 1: describen en lenguaje natural, sin precisión, lo que leen en la representación gráfica de la función dada; veamos:

13: *Es continua en el punto, no se corta.*
23: *La línea no tiene corte.*
26: *El gráfico no se corta.*
10: *No hay separación.*
52: *La función no tiene salto en ese tramo.*

Modalidad 2: utilizan la palabra "continua" o "discontinua" en el sentido (del corte) del lenguaje corriente:

59: *Sí, las rectas son continuas en este caso.*
65: *Sí, no presenta problemas de discontinuidad.*
45: *Sí, porque puedo pasar el lápiz por toda la función sin levantarlo.*
49: *Sí, porque está trazada sin levantar el lápiz.*

Modalidad 3: respuestas ambiguas que interpretan la palabra continuidad en el sentido de continuo

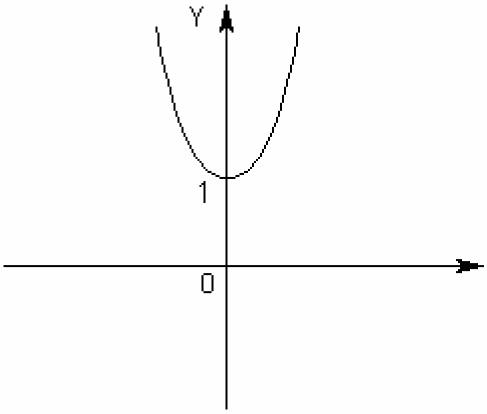
22: *Sí, porque el gráfico nunca se detiene.*
67: *Es constante la función, no se pierde la continuidad.*
33: *Sí, es pareja la curva.*
03: *Sí, la función cambia de forma no su estructura.*

La clase de las respuestas incorrectas (22) son del estilo siguiente:

31: *No, porque 3/2 no pertenece al dominio.*
42: *Sí, porque el gráfico en ese punto se mueve suavemente creciente.*
74: *No, puesto que no aparece expresado en la gráfica.*
75: *La función no está definida en el punto.*

Al parecer el hecho de que no se haya marcado en el gráfico, el $x = 3/2$ ni su imagen produjo serias dificultades a estos alumnos. Cabe señalar además que hubo 18 omisiones en esta pregunta.

Pregunta 3



La parábola dibujada es la representación gráfica de una función real *f*.

a) Se afirma que f no es una biyección. Explique por qué.
b) Marque una parte de la parábola que represente una biyección.
c) Escriba una fórmula para *f*.

Las respuestas a esta pregunta exigen poner en juego nociones matemáticas en lenguaje natural, el registro gráfico, el traslado entre el registro gráfico al algebraico. Aparecerán aquí los fenómenos de congruencia y no congruencia relativos a la conversión. En efecto, explicar que la gráfica no representa una biyección lleva consigo un fenómeno de no congruencia entre los aspectos visuales y teóricos. De modo que es necesario poner en práctica el concepto de biyección en las partes a) y b) de la pregunta. La parte c) de esta pregunta exige un traslado del registro gráfico al algebraico. Para responder es necesario reconocer en el gráfico una parábola cuyo vértice no es el origen sino el punto de coordenadas (0,1) de modo que habrá que adaptarle una ecuación que satisfaga las condiciones exigidas por el dibujo dado.

Las respuestas aceptables para el ítem a) se dividen en dos clases:

1. La primera (siete estudiantes) corresponde a los que afirman que *f* **no es biyectiva, porque no es inyectiva** y explican: “para distintas preimágenes existe la misma imagen”.
Hay otras cuatro respuestas que se podrían agregar a esta clase, que hacen una lectura gráfica muy rápida, no ven que $y = 1$ tiene una sola preimagen y no lo toman en cuenta. Afirman: “para cada imagen existen dos preimágenes”. También puede haber aquí una dificultad con los cuantificadores...

Estos estudiantes hacen una lectura gráfica y ponen en juego el concepto de función biyectiva como función inyectiva y epiyectiva. Coordinan el registro gráfico con apoyo conceptual en el registro algebraico (o formal). Hay seis estudiantes que dicen *“no es inyección o no es 1-1”*, pero no explican lo que significa. ¿No ven la necesidad de explicar?

2. La segunda clase (15 respuestas) explica dando un **criterio gráfico**, afirmando: “Si se traza una paralela al eje de las *x*, ésta corta a la parábola en dos puntos”.
Un estudiante explica afirmando “la función es simétrica con respecto al eje *y*” (Identifica la función con su gráfica).

3. La tercera clase (19 respuestas) corresponde a las respuestas incorrectas que afirman que no es inyectiva porque “cada elemento del dominio tiene dos imágenes”. Se observa aquí una confusión con el concepto de función. A continuación, ejemplos concretos:

19: *No es biyectiva, para cada x existen dos imágenes.*
31: *No es biyectiva por no cumplir con la inyectividad, ya que cualquier punto posee dos*

imágenes.
37: *Porque debe haber una sola imágen para un x y hay dos.*

4. La última clase es de las omitidas (12 estudiantes).

El ítem b) de esta pregunta obtuvo: 48 respuestas correctas, 41 respuestas están expresadas por medio de una marca en el gráfico. Otras cuatro respuestas dieron el intervalo $[o,+\infty[$ ó $]-\infty, 0]$ y 3 respuestas afirmaron "en el primer cuadrante".

El 37% de los estudiantes que contestaron correctamente el ítem b) respondieron incorrectamente el ítem a). Lo que significa que ellos no coordinan el registro gráfico con el algebraico (o formal), coordinación necesaria para responder el ítem a). El ítem b), por el contrario, no exigía coodinación.

Respuestas al ítem c). Encontramos 27 correctas y 21 omitidas. El resto son incorrectas. Veamos el tipo de errores:
01: $y = (x\text{-}2)^2$
10: $f(x) = x^2\text{-}1$
11: $x^2 = \mathrm{y}$
14: $y\text{-}1 = 4\mathrm{c}\ (x\text{-}1)^2$
17: $(x\text{-}2)^2 + \mathrm{y}+9=0$
18: $y +1 = (x +0)^2$
19: $\mathrm{y} = (x\text{-}1)^2$
21: $(x+\mathrm{h})^2.= 4\mathrm{c}(y+\mathrm{k})$
24: $f(x) =x^2 +x$
39: $(\mathrm{y}\text{-}1)^2 = x$
46: $x = y^2+ 1$
53: $f(x) = x^2 + x +1$
73: $x^2 = y + 1$

La respuesta 10 la repiten también tres estudiantes. Ésta es la expresión de una parábola vertical y trasladada en una unidad. Lo curioso del caso es que en la expresión $y = \mathrm{a}x^2+\mathrm{b}$, que es la que corresponde al gráfico y al parecer tenían en mente, existe congruencia entre el signo + con el traslado (hacia arriba) del vértice de la parábola. Sin embargo, ella parece no haber sido percibida por estos estudiantes.

Por otro lado, el estudiante 18 no se da cuenta que es una parábola trasladada, identifica las coordenadas del vértice (0,1); aplica la fórmula general reemplazando las coordenadas, pero aquí no hay congruencia entre el signo + de la fórmula general con el traslado (hacia arriba) del vértice de la parábola. El alumno al escribir: $y+1=(x+0)^2$, parece asumir la congruencia, pero no controla después su fórmula con las coordenadas del vértice.

El alumno 46 puede haber confundido las variables, pero es evidente que no controló su fórmula con las coordenadas del vértice.
El 19 confunde las coordenadas del vértice. El 39 dice lo mismo pero además confunde las variables.
En las respuestas de los alumnos: 1, 11, 17, 24, se observó inexistencia de control de fórmulas, lo que muestra la falta de coordinación de los estudiantes de los registros algebraico y gráfico.

También hay respuestas **no pertinentes** como las siguientes:
3: $\dfrac{x^2}{x+1}$

6: $f(x)=\begin{cases} f, & si \;\; x<0 \\ f, & si \;\; x>0 \end{cases}$

13: y^x

26: $f(x) = x+1$

49: $f(x)=\begin{cases} x^n & ; x \neq 0,\; n \;\; par,\; x \in R \\ 1 & ; x = 0;\; x \in R \end{cases}$

Lo anterior lleva a preguntarse: ¿Es un índice positivo que la mayoría de las fórmulas de las respuestas incorrectas pertinentes correspondan a parábolas verticales? ¿Asocian el hecho de que las funciones de segundo grado tienen como representación gráfica las parábolas? Esta asociación no la han hecho quienes han dado respuestas no pertinentes o han omitido.

Pregunta 4

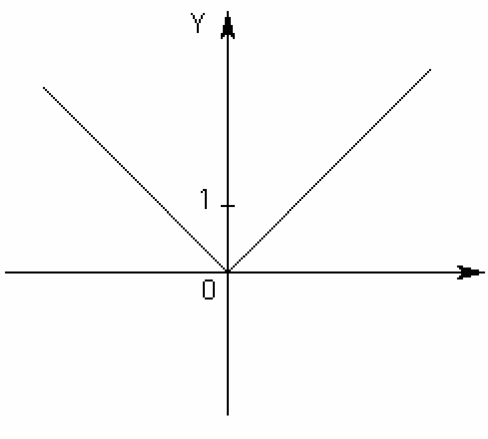
Dada la función real f definida por: $f(x)=|x-1|$., defina una restricción de f (llámela g), de modo que g sea una función biyectiva.

Esta pregunta formulada en el registro algebraico pone en juego las nociones de restricción de una función y de función biyectiva además del valor absoluto, noción que necesita ser dominada para poder desarrollar la tarea; si se prefiere el registro algebraico debe poder traducir en desigualdades apropiadas el valor absoluto dado y poner en juego la noción de biyectividad. En caso de preferir el registro gráfico, debe reconocer que la gráfica que le corresponde a la función dada es la gráfica conocida del valor absoluto $f(x)=|x|$ pero trasladada hacia la derecha. y luego elegir una rama de la gráfica (una semirrecta) y adaptarle una ecuación adecuada.

No responden esta pregunta 32 estudiantes, 14 dan respuestas aceptables y 25 dan respuestas entre incompletas y erróneas.

Todas las respuestas dadas han recurrido al registro algebraico, salvo un estudiante que recurre al registro gráfico, pero se equivoca justamente al representar la función, veamos:

11: *La función* $f(x) = |x-1|$ *tiene un gráfico como:*



la restricción sería [-∞,1] y [1,+∞[para que sea biyectiva.

Como puede apreciarse, el gráfico lo dibuja centrado en el origen, no se percata que el gráfico está trasladado. En general hay un problema de no congruencia. Cuando las traslaciones de los gráficos son horizontales, el signo - de la expresión algebraica, traduce una traslación a la derecha. Pero en este caso al parecer hay solamente una lectura equivocada. También es incorrecta la restricción que da el alumno al utilizar la conjunción, con lo cual no hay avances. ¿Supone que no es necesario definir explícitamente una expresión para *g*, y que basta con restringir el dominio de *f*?

Entre las respuestas incompletas existe:

Una clase de respuestas en las que se define $g = f$, y su dominio, por ejemplo:

17.

$$\begin{aligned} g : [2,+\infty[\; &\to \; R^+ \\ x \quad \alpha \quad & |x-1| \end{aligned}$$

Pero, 17 se equivoca al dar el conjunto de llegada de *g*.

40:

$$\begin{aligned} g : [1,+\infty[\; &\to \; R \\ x \quad \alpha \quad & |x-1| \end{aligned} \qquad \textit{es biyectiva}$$

Aquí se equivoca al dar el conjunto de llegada, lo que muestra una dificultad con la epiyectividad:

43:

$$\begin{aligned} g : R \; &\to \; R \\ x \;\; \alpha \;\; & |x-1| \end{aligned}$$

Incorrectos los conjuntos de partida y llegada.

44:

$$\begin{aligned} g : [1,+\infty[\; &\to \; [0,+\infty[\\ x \quad \alpha \quad & f(x) = |x-1| \end{aligned}$$

Bien los conjuntos de partida y llegada.

45: $g(x) = |x\text{-}1|$, $x \in [1, +\infty[$

No se pronuncia por el conjunto de llegada.

58: *Sea*

$$\begin{aligned} g : [1,+\infty[\; &\to \; R \\ x \quad \alpha \quad & f(x) = |x-1| \end{aligned} \qquad\qquad [-\infty,1] \to R$$

Se equivoca en el conjunto de llegada.

Una segunda clase de respuestas incompletas traduce el valor absoluto, pero no se decide por una función g ni explica el dominio, por ejemplo:

01: $$|x| = \begin{cases} x-1, & x \geq 0, \; x \geq 1 \\ -x+1, & x < 0, \; x > 1 \end{cases}$$

05: $$g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$$

19: $\quad |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -(x-1), & x < 1 \end{cases}$

21:	x-1>0	g(x) = x-1,	x = 1
	x-1<0	g(x) = x-1,	x < 1

Otra clase de respuestas intenta dar el conjunto de partida de g, pero sin definir g explícitamente, por ejemplo:

22: $\quad g : [\ 1,\infty] \to R$

$\quad\quad g :]\text{-}\infty,1] \to R$

Esta respuesta propone dos conjuntos de partida distintos, en cualquier caso se equivoca en el conjunto de llegada y no de define explícitamente la g.

30:

$$R^{+} - \{1\} \to R^{+}$$

$$x \begin{cases} x > 1, \ldots, x-1 \\ x < 1, \ldots, -x+1 \end{cases}$$

La respuesta 30 intenta traducir el valor absoluto |x-1|, y al parecer restringe el dominio simultáneamente. No se pronuncia por una restricción biyectiva de la función dada y se equivoca en el conjunto de partida.

La respuesta 37 se equivoca en traducir el valor absoluto de x-1, no define la función g pedida, pero al parecer intentaría dar el dominio de g.

Entre las respuestas incorrectas una clase traduce el valor absoluto de x-1 y se detiene ahí, es decir no contesta la pregunta, por ejemplo escriben:

01: $|x-1| = \begin{cases} x-1, \ \ldots, \ x \geq 1, \ldots, \ x \geq 1 \\ -x+1, \ \ldots, \ x < 0, \ldots, \ x > 1 \end{cases}$

05: $\quad g(x) = \begin{cases} x-1, \ \ldots, \ x > 1 \\ -x+1, \ \ldots, \ x < 1 \end{cases}$

32:	Si x<1, -(x-1)	Si x >1, (x-1)
	y = -x+1	y = x-1

La respuesta 32 está equivocada al traducir el valor absoluto.

Una segunda clase de respuestas incorrectas da intervalos para x, tal vez como posibilidad de dominio de g , veamos algunos ejemplos:

49: $x \in\ ]1,\infty +[$ ó $x \in]\text{-}\infty , \text{-}1[$

Esta respuesta da dos intervalos disjuntos de R; ¿posibles dominios para g?

24: x *en*]1, +∞ [

Esta respuesta es muy económica da sólo ese intervalo; ¿posible dominio de g?

14: $x = 1$ y $x < 1$

En esta respuesta a pesar de la conjunción y, reconoce el dominio de la función dada f, pero no avanza.

18: $Rg\{\ x = 1, x$ en $[1, \infty[$ ó $]-\infty, 1]\}$

Esta frase, en lenguaje algebraico, es confusa y contradictoria. Expresa el rango o recorrido (¿de la función g?) en términos de las *x*, que en este caso representan elementos del dominio y no se pronuncia por la función pedida.

Conclusión

Un análisis de las respuestas de los estudiantes revela que son, en general, monorregistros. Es decir, están dadas en un solo registro, sin coordinar explícitamente dos o más. Las respuestas se quedan en el registro en el cual está planteada la pregunta, o recurren al registro algebraico, con frecuencia privilegiado en las clases. La ingenuidad de la redacción de las respuestas, cuando en forma espontánea recurren al registro gráfico, queda de manifiesto por la descripción en lenguaje natural de visualizaciones a veces implícitas y otras veces de una lectura explícita de un gráfico.

En las respuestas a la pregunta 1, formulada en lenguaje natural, se puede observar que de las 37 respuestas aceptables cinco fueron dadas en el registro gráfico, 16 en el registro algebraico y 16 en lenguaje natural. En general, más de la tercera parte contenía representaciones algebraicas, un tercio de éstas hacía visualizaciones implícitas de la gráfica de la función seno y las otras hacían referencias implícitas al gráfico de rectas.
Queda en evidencia entonces que más del 50% de las respuestas aceptables recurre a representaciones algebraicas, el 14% recurre a representaciones gráficas y las restantes recurren a visualizaciones implícitas. Esto permite concluir que el registro algebraico tiene más presencia que los otros en las respuestas de los estudiantes.

La pregunta 2, planteada en el registro gráfico, solicitaba una lectura y una formulación en lenguaje natural de la noción de continuidad en un punto. Las respuestas aluden a una lectura gráfica que describe la visualización de un hecho, sin explicar la suficiencia del mismo; otras respuestas son aún más ingenuas y expresadas en un lenguaje pobre desde el punto de vista de las nociones matemáticas. Esta pregunta sencilla, pero no habitual, exige un traslado del registro gráfico al lenguaje natural para expresar el concepto de función continua en un punto.

Las respuestas de los estudiantes, ¿dejan al descubierto que ellos tienen una concepción parcial de este concepto o una dificultad para redactar una explicación completa, privilegiando el aspecto que les parece más relevante?
Aun cuando no es posible afirmar que estos estudiantes no saben lo que es una función continua en un punto, sí se podría afirmar que no tienen habilidad para leer o interpretar un gráfico movilizando conceptos pertinentes que aprendieron en lenguaje formal o natural.
La traducción de un lenguaje a otro, la coordinación de registros no es un objetivo de enseñanza que se tome en cuenta explícitamente, y esto sin duda no favorece ni ayuda a los estudiantes a formular sus explicaciones. Muchas veces los estudiantes saben más de lo que son capaces de expresar y redactar, lo que es fácil comprobar en entrevistas con ellos: dar una explicación verbal es más fácil que darla por escrito. Las repuestas dadas podrían mostrar una debilidad para

formular explicaciones en el registro del lenguaje natural. Esta deficiencia es una cuestión de aprendizaje que necesita ser tomada en cuenta para revisar lo que se está enseñando.

La pregunta 3 también está planteada en el registro gráfico y exigía tres tareas: una lectura y explicación de la noción de función biyectiva y un traslado al registro algebraico.
Cuando se pide explicar (ítem a) por qué f es biyectiva, las respuestas aceptables son 34 (45.3%); 19 estudiantes hacen una lectura gráfica dando explicaciones conceptuales en lenguaje natural, 15 respuestas están en el registro gráfico los estudiantes dan un criterio gráfico.
Hay 19 estudiantes que leen incorrectamente el gráfico, confundieron las nociones de imagen y preimagen, y que trataron de dar una explicación conceptual como los primeros.
Cuando se les pidió marcar expresamente en el gráfico (ítem b) la parte de la parábola que representaba a una función biyectiva, 48 alumnos (64%) respondieron correctamente: 41 hicieron una marca y los otros escribieron los intervalos. No se exigía formulación sino una acción, por lo que les resultó más fácil que a), resultando que un 37% que tuvo éxito en b), no lo tuvo en a).
En el ítem c), que exigía un claro traslado del registro gráfico al algebraico, hubo 27 respuestas correctas y 21 omitidas. Entre las respuestas incorrectas pertinentes, la falla más frecuente fue la falta de control de las fórmulas propuestas, lo que muestra la ausencia de preocupación por lograr la correspondencia entre las unidades significativas gráficas y las algebraicas. Algunos propusieron la fórmula general, aprendida en el registro algebraico, pero no pudieron ajustarla al gráfico propuesto debido a fallas de lectura de los índices gráficos y sus respectivas correspondencias con los algebraicos. Lo anterior muestra una vez más la dificultad que encuentran los estudiantes para coordinar distintos registros.
Cabe hacer notar aquí que esta pregunta sencilla, aun cuando no es habitual, deja ver la poca familiaridad de los estudiantes con esta tarea de traslado.
Por otra parte, también está el hecho frecuente entre los estudiantes de dar respuestas sin verificar, lo que no es habitual en matemáticas, pero esta falta de control podría mostrar una falla pedagógica que indicaría que este control de resultados o justificación de afirmaciones no está siendo considerada como una tarea habitual necesaria para tener éxito en el aprendizaje. Si se logra el éxito final con tareas reproductivas o aprendizaje de algoritmos o técnicas, la enseñanza de la matemática está mostrando una gran insuficiencia en lo que respecta al aprendizaje.

La pregunta 4, planteada en el registro algebraico, resultó la más difícil para los estudiantes. Sólo hubo 14 respuestas aceptables y 25 entre incompletas y erróneas. Las principales dificultades constatadas estuvieron en definir los conjuntos de partida y llegada de la función g, que se pedía fuera restricción de la función f y la traducción de la función dada $f(x)=|x\text{-}1|$ y en dificultades de tipo conceptual que tienen que ver con el concepto mismo de función, de valor absoluto y de restricción de una función.

En general, las respuestas analizadas muestran deficiencias conceptuales y falta de coordinación entre los registros algebraico, gráfico y lenguaje natural. Esto es una posible consecuencia de la enseñanza recibida por esos estudiantes. También se detectó la dificultad para relacionar; los estudiantes están poco familiarizados en las funciones de coordinar la lectura de un hecho expresado en un registro determinado y en la expresión o formulación en lenguaje natural y, a la inversa, expresar un enunciado dado en lenguaje natural en términos de otro registro, y por supuesto los traslados del registro gráfico al algebraico. La preparación es insuficiente en este tipo de tareas; estas traducciones y traslados requieren aprendizaje, como ya se ha mencionado; no surgen como acciones espontáneas del sujeto.

El aporte del enfoque cognitivo considerado en esta investigación se da en el sentido de mostrar una vía para orientar un tipo aprendizaje y enseñanza de la matemática que favorezca la comprensión y adquisición de nociones conceptuales mediante la puesta en juego de los distintos registros de representación que exige la noción objeto de enseñanza. Parece evidente que la coordinación de todas las representaciones pertinentes de una noción determinada ayuda a la adquisición de ella.

La teoría de registros de representación de R. Duval es reciente, no tiene más 10 años y la ha desarrollado en forma independiente de Vigotsky; sin embargo, comparte con él la tesis de que el pensamiento no es puramente conceptual, sino que también es semiótico. Vygostky ha insistido en el rol del lenguaje natural en el desarrollo del pensamiento, es decir considera un solo registro de representación semiótica y lo explica de manera intuitiva. R. Duval insiste en la pluralidad de registros de representación semiótica y explica el porqué y el cómo las palabras y los signos son esenciales en el desarrollo del pensamiento conceptual.

Finalmente, señalemos algunas sugerencias que pueden desprenderse de esta investigación y que podrían iluminar la tarea pedagógica en el aula. En primer lugar, el lenguaje natural tendría que tener una mayor presencia en las clases de matemáticas, tanto de parte del profesor como de los alumnos, para lo cual debería estar garantizado el espacio para que los alumnos puedan expresarse. También debe cuidarse que en las pizarras y en los cuadernos de matemáticas las escrituras simbólicas y las fórmulas dejen lugar a textos escritos en castellano o lenguaje materno. La comprensión de la noción más compleja pasa por el lenguaje materno, registro de representación y tratamiento importante en la significación de las nociones que se estudien. Además está a la vista que en matemática es necesario utilizar con frecuencia otras formas de expresión: figuras geométricas o no, tablas, grafos, diagramas, gráficos cartesianos, fórmulas y otras escrituras simbólicas. Pero en las clases de matemáticas, los profesores privilegian en general las escrituras simbólicas, de ahí que las pizarras estén llenas de ellas, muchas veces pensando que son más matemáticas; esto pareciera indicar que así se traduce el rigor matemático. Surge la pregunta: ¿De qué sirve el rigor matemático sin la comprensión del significado de los objetos involucrados?

Para favorecer los aprendizajes y favorecer el desarrollo del pensamiento conceptual es fundamental que los alumnos lleguen a articular diferentes representaciones semióticas; para lo cual es necesario enfrentarlos a suficientes problemas de traslados entre las distintas representaciones semióticas que admite la noción matemática objeto del aprendizaje focalizado. Plantear estos problemas es una tarea creativa para los profesores, pues este tipo de problemas, hasta ahora, son poco frecuentes en los textos escolares y en las clases de matemáticas. Aunque estos problemas parezcan fáciles a juicio de algunos profesores, la evidencia empírica demuestra otra cosa desde el punto de vista de los alumnos, como lo muestra nuestro estudio y algunos otros.

Bibliografía

Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. (1988).Vol 1. France.

Duval, Raymond(1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang. Suisse.

Duval, Raymond (1996) "Quel Cognitif Retenir en Didactiques des Mathématiques?" *RDM*, Vol. 16 No. 3, 349-382.

Guzmán R., Ismenia (1990) *Le rôle des représentationdans l´appropriation de la notion de fonction*. Thèse de doctorat. France: ULP Strasbourg.

Otras referencias

Dager,Antoine (1993). *Environnement Informatique et Apprentissage de l´articulation entre registres graphique et algebrique de représentations de fonctions*. Thèse de doctorat. Université Paris VII.

Ruiz-Higueras, Luisa (1993). *Concepciones de los alumnos sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*.Tésis de doctorado. España: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad Granada.

Hitt E.,Fernando (1995). “Intuición de primera *versus* pensamiento analítico: Difucultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa”. *Revista Educación Matemática*.Vol.7. México: Grupo Editorial Iberoamericana.